Séminaire N. Bourbaki

Claude Godbillon

Travaux de D. Anosov et S. Smale sur les difféomorphismes

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. nº 348, p. 23-35

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1968-1969__11__23_0>

Séminaire BOURBAKI
21e année, 1968/69, n°348 Novembre 1968

TRAVAUX DE D. ANOSOV ET S. SMALE SUR LES DIFFÉOMORPHISMES

par Claude GODBILLON

Cet exposé est inspiré d'un important mémoire [14] où S. Smale analyse les progrès récents dans la théorie des systèmes dynamiques.

1. Introduction.

La théorie globale des systèmes dynamiques trouve son origine dans l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires et des groupes à un paramètre qu'elles engendrent. Mais il est naturel d'aborder aussi dans ce contexte une telle étude pour les difféomorphismes (considérés comme générateurs de "groupes discrets à un paramètre"). Ce choix se trouve d'ailleurs justifié par le fait que tous les phénomènes rencontrés dans le cas des équations différentielles sont déjà présents, et bien souvent sous une forme plus agréable, dans celui des difféomorphismes.

On désigne par M une variété différentiable (de classe C^r, $1 \leq r \leq \infty$) compacte, connexe, de dimension m. On munit le groupe $D(M)$ des difféomorphismes de M de la topologie C^r ; $D(M)$ est alors un espace de Baire, et on dit qu'une propriété sur $D(M)$ est <u>générique</u> si l'ensemble des difféomorphismes la vérifiant est une intersection dénombrable d'ouverts denses.

Soit f un difféomorphisme de M. Un point x de M est un <u>point périodique</u> de f s'il existe un entier $p > 0$ tel que $f^p(x) = x$: p est une <u>période</u> de x (si $p = 1$ x est un point fixe de f).

L'orbite d'un point x de M est l'ensemble des points $f^n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$. Un point périodique est donc un point dont l'orbite est finie.

L'étude qualitative des difféomorphismes se fait du point de vue de la structure de l'ensemble des orbites. Dans ce cadre deux difféomorphismes conjugués dans le groupe $H(M)$ des homéomorphismes de M (muni de la topologie C°) ont le même comportement. La notion de stabilité structurelle, introduite par A. Andronov et L. Pontrjagin pour les équations différentielles [1], se rattache alors à cette situation.

DÉFINITION 1. Un difféomorphisme f de M est structurellement stable si pour tout voisinage U de l'identité dans $H(M)$ il existe un voisinage V de f dans $D(M)$ tel que tout difféomorphisme f' de V est conjugué de f par un homéomorphisme h de U : $f \circ h = h \circ f'$.

Cette définition ouvre les deux questions suivantes :

i) la stabilité structurelle est-elle une propriété générique ?

ii) existe-t-il une caractérisation géométrique simple des difféomorphismes structurellement stables ?

On peut répondre affirmativement à ces deux questions dans le cas du cercle S^1 (M. Peixoto [7]). Par contre S. Smale a montré que la stabilité structurelle n'est pas une propriété générique pour le tore T^3 [13] (on ignore d'ailleurs si sur toute variété compacte il existe un difféomorphisme structurellement stable).

2. Variétés stables et instables.

Soit $\eta = (E,p,B)$ un fibré vectoriel muni d'une structure riemannienne, et soit F un automorphisme de η (au-dessus d'un homéomorphisme f de B).

DÉFINITION 2. L'automorphisme F est une contraction de η s'il existe deux nombres $C > 0$ et $\lambda \in]0,1[$ tels que

$$\|F^n(v)\| < C\lambda^n \|v\| \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } v \in E .$$

L'automorphisme F est une expansion de η si F^{-1} est une contraction.

Si B est compact cette notion est évidemment indépendante du choix de la métrique riemannienne sur η .

DÉFINITION 3. L'automorphisme F est hyperbolique s'il existe deux sous-fibrés vectoriels $\sigma = (X,p,B)$ et $\nu = (Y,p,B)$ ayant les propriétés suivantes :

i) $\eta = \sigma \oplus \nu$;

ii) σ et ν sont invariants par F ;

iii) $F_{|X}$ est une contraction de σ ;

iv) $F_{|Y}$ est une expansion de ν .

Les deux sous-fibrés σ et ν sont alors déterminés de façon unique par ces conditions.

Considérons maintenant un difféomorphisme f de la variété M.

DÉFINITION 4 . Un point fixe x de f est hyperbolique si l'application tangente

$$f_x^T : T_x(M) \to T_x(M)$$

est hyperbolique.

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que les valeurs propres de f_x^T aient toutes un module différent de 1. La dimension de X (resp. Y) est alors égale au nombre des valeurs propres de module inférieur à 1 (resp. de module supérieur à 1).

THÉORÈME 1. Soit x un point fixe hyperbolique de f, et soit $X \oplus Y$ la décomposition correspondante de $T_x(M)$. Il existe un plongement $h : X \to M$ (i.e. une application différentiable injective de rang maximum) ayant les propriétés suivantes :

i) $h(0) = x$ et $h_o^T = f_{x|X}^T$;

ii) $h(X) = \{y \in M | \lim_{n \to +\infty} . f^n(y) = x\}$.

L'existence de h sur un voisinage ouvert U de 0 dans X est un résultat classique (E. Coddington et N. Levinson [5]). On prolonge h à X en posant $h(u) = f^{-N}(h(f_x^T)^N(u))$ où N est tel que $(f_x^T)^N(u) \in U$.

Cette sous-variété, désignée par $W^s(x)$, est appelée la variété stable de f en x . On définit ensuite la variété instable $W^u(x)$ de f en x comme la variété stable de f^{-1} en x.

Un point périodique x de f de période p est hyperbolique s'il est un point fixe hyperbolique de f^p. On définit les variétés stables et instables $W^s(x)$ et $W^u(x)$ de f en x comme les variétés stables et instables de f^p en x.

THÉORÈME 2 (I. Kupka [6], S. Smale [11]). Les deux propriétés suivantes sont génériques :

a) tous les points périodiques du difféomorphisme f sont hyperboliques ;

b) si x et y sont deux points périodiques (distincts ou non) de f $W^s(x)$ et $W^u(y)$ se coupent transversalement.

En un point de période p hyperbolique le graphe de f^p est transverse à la diagonale de $M \times M$.

Un difféomorphisme vérifiant la condition a) possède donc un nombre fini de points périodiques de période p ; l'ensemble de ses points périodiques est par conséquent dénombrable.

Une démonstration de la généricité est dans [11].

Remarque. Un difféomorphisme structurellement stable possède les propriétés a) et b). Il peut cependant, et c'est le cas des difféomorphismes d'Anosov, avoir une infinité de points périodiques.

S. Smale a été ainsi amené à considérer les difféomorphismes vérifiant en plus des conditions a) et b) du théorème 2 les deux propriétés suivantes :

c) l'ensemble Ω des points périodiques de f est fini ;

d) pour tout point $y \in M$ $\lim\limits_{n \to \pm\infty} . f^n(y) \in \Omega$.

Ces difféomorphismes permettent de construire une partition en cellules de M généralisant celle introduite par R. Thom pour les fonctions de Morse [15].

THÉORÈME 3 (S. Smale [10]). Soit f un difféomorphisme de M vérifiant les conditions a), b), c) et d). Alors :

i) pour tout point $x \in \Omega$ $W^s(x)$ est une sous-variété régulière de M ;

ii) $M = \bigcup\limits_{x \in \Omega} W^s(x)$;

iii) pour tout point $x \in \Omega$ l'adhérence de $W^s(x)$ est une réunion de sous-variétés stables (disjointes) de dimensions inférieures ;

iv) si B_i désigne le i-ème nombre de Betti de M, et M_i le nombre de points $x \in \Omega$ tels que $\dim . W^s(x) = i$, on a les relations

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i M_i \geq \sum_{i=0}^{k} (-1)^i B_i$$

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i M_i = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i B_i \ .$$

Remarques.

i) Les propriétés a) et c) caractérisent les difféomorphismes structurellement stables du cercle S^1 (M. Peixoto [7]) ;

ii) la propriété c) n'est pas générique (proposition 1) ;

iii) J. Palis a montré que les difféomorphismes du théorème 3 forment un ouvert non vide de $D(M)$.

Il a aussi montré que ces difféomorphismes sont structurellement stables en dimensions inférieures à 2.

3. Difféomorphismes d'Anosov [2], [3].

DÉFINITION 5. Un difféomorphisme d'Anosov est un élément f de $D(M)$ tel que l'application tangente $f^T : T(M) \to T(M)$ soit hyperbolique et détermine une décomposition non triviale de $T(M)$.

Cette notion est directement inspirée de la structure du champ géodésique sur le fibré unitaire tangent à une variété riemannienne de courbure négative (théorème de Hadamard-Cartan).

Exemple. Soit A une matrice carrée d'ordre m à coefficients entiers, de déterminant 1 , dont toutes les valeurs propres sont de module différent de 1 ; A induit un difféomorphisme d'Anosov du tore $T^m = \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$.

On constate sur cet exemple que les sous-fibrés σ et ν associés à f^T déterminent deux feuilletages différentiables de T^m qui sont transverses et invariants par f. Cette situation est en fait générale pour les difféomorphismes d'Anosov, à ceci près que ces feuilletages ne sont pas nécessairement différentiables (bien que chacune de leurs feuilles soit une sous-variété différentiable de M).

PROPOSITION 1. <u>L'ensemble des difféomorphismes d'Anosov est un ouvert de</u> $D(M)$.

Soit k la dimension de ν, et soit f_* l'application induite par f dans l'ensemble des champs de k-plans sur M. Le champ de k-plans π déterminé par ν est invariant par f_*, et f_* est une contraction au voisinage de π. Cette dernière propriété est conservée dans une petite perturbation de f. Par conséquent si g est un difféomorphisme suffisamment voisin de f, g_* possède un point fixe voisin de π qui détermine un sous-fibré de dimension k de $T(M)$ invariant par g, et sur lequel g est une expansion.

On procède de façon analogue pour obtenir un sous-fibré supplémentaire invariant par g et sur lequel g est une contraction.

THÉORÈME 4 (D. Anosov [2]). <u>Un difféomorphisme d'Anosov est structurellement stable</u>.

Soit $C(M)$ l'ensemble des applications continues de M dans elle-même muni de la topologie C^0 ; $C(M)$ est une variété banachique. Introduisons avec J. Mather ([14] appendice à la partie 1) l'application $A : D(M) \times C(M) \times D(M) \to C(M) \times C(M)$ définie par $A(f_1,g,f_2) = (g \circ f_1, f_2 \circ g)$. Cette application est différentiable en son second argument et, si f est un difféomorphisme d'Anosov, un "théorème de fonction implicite" permet de trouver un voisinage U de f dans $D(M)$, un voisinage V de l'identité dans $H(M)$ et une application continue $u : U \to V$ tels que pour tout $f' \in U$ $g = u(f')$ soit l'unique solution dans V de l'équation fonctionnelle $g \circ f' = f \circ g$.

Remarques.

i) Si M est une surface orientable possédant un difféomorphisme d'Anosov M est difféomorphe au tore T^2.

ii) A. Avez [4] et H. Rosenberg [9] ont montré que si M possède un difféomorphisme d'Anosov pour lequel un des feuilletages associés est de codimension 1 et de classe C^2 M est difféomorphe au tore T^m.

Il se pose donc le problème de déterminer la classe des variétés compactes possédant un difféomorphisme d'Anosov. L'exemple suivant dû à S. Smale [14] montre qu'il existe dans cette classe d'autres variétés que les tores.

Exemple. Soit G le groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X & Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $x, y, z, X, Y, Z \in \mathbb{R}$.

Soit Γ le sous-groupe de G formé des matrices pour lesquelles x, y, z sont dans $\mathbb{Z}(\sqrt{3})$ et $X = \bar{x}$, $Y = \bar{y}$, $Z = \bar{z}$ (où $\overline{a + b\sqrt{3}} = a - b\sqrt{3}$) ; Γ est un sous-groupe discret non commutatif de G tel que G/Γ soit une variété compacte (non difféomorphe au tore T^6).

Soit $\lambda = 2 + \sqrt{3}$. L'application

$$F : (x,y,z,X,Y,Z) \mapsto (\lambda x, \lambda^{-1}y, \lambda^{-2}z, \lambda^{-1}X, \lambda Y, \lambda^{2}Z)$$

est un automorphisme de G laissant Γ invariant et induisant un difféomorphisme d'Anosov sur G/Γ.

Remarque. Pour cet exemple, comme pour ceux des tores, le revêtement universel de la variété considérée est l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$. Plus généralement A. Avez a montré [4] que si un difféomorphisme d'Anosov possède une mesure de Lebesgue invariante le revêtement universel de M est l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$.

Un des théorèmes fondamentaux d'Anosov concerne d'ailleurs ces difféomorphismes possédant une mesure invariante.

THÉORÈME 5 (D. Anosov et Y. Sinai [3]). *Soit* f *un difféomorphisme d'Anosov possédant une mesure de Lebesgue invariante. Alors :*

i) *l'ensemble des points périodiques de* f *est partout dense dans* M ;

ii) f *est ergodique.*

On ne sait pas si l'assertion i) reste vraie sans l'hypothèse de l'existence d'une mesure invariante.

Un théorème analogue dans le cas des équations différentielles permet de conclure à l'ergodicité du champ géodésique sur le fibré unitaire tangent à une variété riemannienne de courbure négative.

4. Difféomorphismes de Smale.

Entre les cas limites des difféomorphismes du théorème 3, où f^T est hyperbolique au-dessus d'un ensemble fini, et celui des difféomorphismes d'Anosov, où

f^T est hyperbolique au-dessus de M, S. Smale a considéré des difféomorphismes pour lesquels f^T est hyperbolique au-dessus d'un fermé invariant intermédiaire. La notion de point non errant de G. Birkhoff y joue un rôle essentiel.

DÉFINITION 6. <u>Soit</u> f <u>un difféomorphisme de</u> M. <u>Un point</u> x <u>de</u> M <u>est un point errant de</u> f <u>s'il existe un voisinage</u> U <u>de</u> x <u>tel que</u> $U \cap f^n(U) = \emptyset$ <u>pour tout</u> $n > 0$.

L'ensemble des points errants de f est un ouvert invariant de M. Son complémentaire $\Omega = \Omega(f)$ est l'ensemble des <u>points non errants</u>. Cet ensemble contient en particulier les points périodiques de f ; de plus pour tout $y \in M$ $f^n(y)$ tend vers Ω quand $n \to \pm\infty$.

L'ensemble de ces points non errants peut posséder une structure fort complexe. S. Smale a par exemple construit ([12], [14]) un difféomorphisme f de la sphère S^2 ayant les propriétés suivantes :

i) $\Omega(f)$ se compose de deux points fixes et d'un compact C homéomorphe à l'ensemble de Cantor ;

ii) la restriction de f à C est conjuguée de l'opérateur de décalage du schéma de Bernouilli à deux symboles (en particulier les points périodiques de f sont denses dans Ω) ;

iii) f^T est hyperbolique au-dessus de Ω ;

iv) il existe un voisinage U de f dans $D(S^2)$ tel que tout difféomorphisme de U possède les propriétés i), ii) et iii).

De tels exemples ont conduit S. Smale à étudier les difféomorphismes ayant les deux propriétés suivantes (axiome A de [14]) :

a) f^T est hyperbolique au-dessus de $\Omega = \Omega(f)$;

b) les points périodiques de f sont denses dans Ω .

THÉORÈME 6 (décomposition spectrale des difféomorphismes [14]). Soit f un difféomorphisme de M vérifiant les conditions a) et b). Alors :

i) $\Omega(f)$ est une réunion disjointe de fermés invariants $\Omega_1,\ldots,\Omega_k$;

ii) chaque Ω_i est l'adhérence d'une orbite de f ;

iii) $M = \cup W^s(\Omega_i)$ où $W^s(\Omega_i) = \{y\in M \mid f^n(y) \to \Omega_i$ quand $n \to +\infty\}$.

La démonstration de ce théorème utilise une généralisation délicate des notions de variétés stables et instables.

S. Smale introduit enfin, en plus des conditions a) et b) précédentes, et avec les notations du théorème 6, la condition suivante (Axiome B de [14]) :

c) si $W^s(\Omega_i) \cap W^u(\Omega_j) \neq \emptyset$, il existe deux points périodiques $x\in\Omega_i$ et $y\in\Omega_j$ tels que les variétés $W^s(x)$ et $W^u(y)$ possèdent un point d'intersection transversale.

($W^u(\Omega_i)$ désigne ici l'analogue de $W^s(\Omega_i)$ pour $n \to -\infty$.)

THÉORÈME 7 ([14]). L'ensemble des difféomorphismes de M vérifiant les conditions a), b), c) est un ouvert non vide de $D(M)$.

THÉORÈME 8 ([14]). Soit f un difféomorphisme de M vérifiant les conditions a), b), c). On peut trouver un voisinage U de f dans $D(M)$ tel que pour tout $f'\in U$ il existe un homéomorphisme $h : \Omega(f) \to \Omega(f')$ avec $h \circ f = f' \circ h$.

Remarques.

i) Le théorème 8 explicite une nouvelle notion, appelée par S. Smale " Ω-stabilité", qui est un affaiblissement de celle de stabilité structurelle.

ii) C. Pugh a déduit de son "closing lemma" la généricité de la propriété b) pour la topologie C^1 [8]. Mais on ignore si cette propriété est aussi générique pour la topologie C^r avec $r > 1$.

On ignore aussi si les propriétés a) et c) sont génériques. Une réponse affirmative montrerait que les difféomorphismes Ω-stables forment un ouvert dense de $D(M)$.

RÉFÉRENCES

[1] A. ANDRONOV et L. PONTRJAGIN - Systèmes grossiers. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 14 (1937), p. 247-251.

[2] D.V. ANOSOV - Geodesic flows on compact manifolds of negative curvature. A paraître dans Proc. Steklov Math. Inst. (en russe : Trudy Mat. Inst. Steklov, 90 (1967)).

[3] D.V. ANOSOV et Y. SINAI - Systèmes différentiels ergodiques. Uspehi Mat. Nauk., 22 (1967), p. 107-172.

[4] A. AVEZ - Anosov diffeomorphisms. A paraître.

[5] E. CODDINGTON et N. LEVINSON - Theory of ordinary differential equations. Mac Graw Hill, New-York, 1955.

[6] I. KUPKA - Contribution à la théorie des champs génériques. Cont. to diff. equ., 2 (1963), p. 457-484.

[7] M. PEIXOTO - Structural stability on two dimensional manifolds. Topology, 1 (1962), p. 101-120.

[8] C. PUGH - An improved closing lemma and a general density theorem. Amer. J. Math., 89 (1967), p. 1010-1021.

[9] H. ROSENBERG - Foliations by planes. Topology, 6 (1967).

[10] S. SMALE - Morse inequalities for a dynamical system. Bull. Amer. Math. Soc., 66 (1960), p. 43-49.

[11] S. SMALE - Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 17 (1963), p. 97-116.

[12] S. SMALE - Diffeomorphisms with many periodic points. Differential and combinatorial topology. Princeton University Press, 1965.

[13] S. SMALE - Structurally stable systems are not dense. Amer. J. Math., 88 (1966), p. 491-496.

[14] S. SMALE - Differential dynamical systems. Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), p. 747-817.

[15] R. THOM - Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété. C. R. Acad. Sc. Paris, 228 (1949), p. 973-975.

ADDITIF

Depuis la rédaction de cet exposé des résultats importants ont été annoncés. En particulier :

- les difféomorphismes du théorème 3 (difféomorphismes de Morse-Smale) sont structurellement stables (J. PALIS et S. SMALE) ;

- la propriété de Ω-stabilité n'est pas générique (R. ABRAHAM et S. SMALE).