

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE GABRIEL

Représentations des algèbres de Lie résolubles

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 347, p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1968-1969__11__1_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATIONS DES ALGÈBRES DE LIE RÉSOLUBLES

(d'après J. DIXMIER)

par Pierre GABRIEL

Le présent texte est une variation sur la première moitié de [5]. Tout anneau A sera supposé associatif et aura un élément unité. Le terme "idéal" désignera un "idéal bilatère".

1. Rappels.

1.1. Soit S une partie multiplicative de A (i.e. $1_A \in S$ et $s, t \in S$ si $s \in S$ et $t \in S$). On dit que S permet un calcul de fractions à droite si l'on a (*) et (**):

(*) $\forall s \in S, \forall a \in A, \exists t \in S, \exists b \in A$ tels que $a.t = s.b$;

(**) si $a \in A$ et $s \in S$ sont tels que $s.a = 0$, il existe $t \in S$ tel que $a.t = 0$.

Si ces conditions sont vérifiées, nous notons A_S l'anneau de fractions à droite défini par S ([7], p. 416, remarque 2). Un élément de A_S sera noté simplement as^{-1} , avec $a \in A$ et $s \in S$.

PROPOSITION.- Soit S une partie multiplicative de A permettant un calcul de fractions. La fraction as^{-1} appartient au centre de A_S si et seulement si,
pour tout $b \in A$, il y a un $t \in S$ tel que $(abs - sba)t = 0$.

La démonstration est "tout droit en avant". Nous utiliserons ce résultat lorsque

les éléments de S ne divisent pas 0 dans A .

1.2. PROPOSITION.→ Si S permet un calcul de fractions à droite de A , toute dérivation de A se prolonge de manière unique en une dérivation $\bar{D}$ de A_S .

En effet, de $ss^{-1} = 1$, on tire qu'on a nécessairement $\bar{D}s^{-1} = -s^{-1}(Ds)s^{-1}$ et $\bar{D}(as^{-1}) = (Da)s^{-1} - as^{-1}(Ds)s^{-1}$ si $s \in S$. On vérifie de suite que ce dernier terme ne dépend que de as^{-1} et non pas de a et de s ([7], p. 416, remarque 2). La formule obtenue définit une dérivation.

1.3. Un idéal $\underline{p}$ de A est dit premier si $\underline{p} \neq A$ et si les relations $\underline{a} \not\subset \underline{p}$ et $\underline{b} \not\subset \underline{p}$ impliquent $\underline{ab} \not\subset \underline{p}$, $\underline{a}$ et $\underline{b}$ désignant des idéaux. Il est équivalent de dire que $\underline{p} \neq A$ et que, si $x, y \in A$, les relations $x \not\subset \underline{p}$ et $y \not\subset \underline{p}$ impliquent l'existence d'un $z \in A$ tel que $xzy \not\subset \underline{p}$. Si $x \not\subset \underline{p}$ et $y \not\subset \underline{p}$ impliquent $x.y \not\subset \underline{p}$, i.e. si $A/\underline{p}$ est intègre, on dit que $\underline{p}$ est complètement premier. L'ensemble des idéaux premiers de A sera noté $\text{Spec } A$.

Un idéal $\underline{s}$ de A est dit semi-premier si $A/\underline{s}$ ne contient pas d'idéal nilpotent non nul. Rappelons l'énoncé du théorème de Goldie : supposons que A est noethérien à droite et que l'idéal 0 est semi-premier ; alors si $s \in A$ et si $s.x = 0$ implique $x = 0$, $y.s = 0$ implique $y = 0$; l'ensemble S de ces s (les non-diviseurs de 0 de A) permet un calcul de fractions à droite, et A_S est un anneau semi-simple ([8], [10], [7]). Cet anneau A_S sera noté $\text{Fract}(A)$ et appelé l'anneau total des fractions de A .

1.4. Revenons au cas général d'une partie multiplicative S de A permettant un calcul de fractions à droite. Soit $\varphi : A \rightarrow A_S$ l'application canonique

que. L'application $d \mapsto \varphi^{-1}(d)$ met en correspondance bijective les idéaux à droite de A_S et les idéaux à droite n de A tels que $s \in S$, $x \in A$ et $x.s \in n$ impliquent $x \in n$; l'application réciproque associe à n l'idéal à droite $n_S = \{xs^{-1} \mid x \in n, s \in S\}$. Cette dernière expression est définie pour tout idéal à droite n . Lorsque n est bilatère, n_S l'est si et seulement si les relations $x \in A$, $s \in S$ et $s.x \in n$ impliquent l'existence d'un $t \in S$ tel que $x.t \in n$. Les applications $d \mapsto \varphi^{-1}(d)$ et $n \mapsto n_S$ mettent en correspondance bijective les idéaux (bilatères) de A_S et les idéaux (bilatères) $\underline{a}$ de A tels que les éléments de S ne divisent pas 0 (à gauche ou à droite) dans $A/\underline{a}$. Dans cette bijection, les idéaux complètement premiers de A_S correspondent aux idéaux complètement premiers de A qui ne rencontrent pas S .

Pour les idéaux premiers, la situation semble être un peu moins simple : en effet, soit $\underline{a}$ un idéal premier de A tel que les éléments de S ne divisent pas 0 dans $A/\underline{a}$; alors $\underline{a}_S$ est un idéal premier de A_S . Par contre, si $\underline{p}$ est un idéal premier de A_S , je n'ai pas l'impression que $\varphi^{-1}(\underline{p})$ soit en général un idéal premier de A ; cela est vrai cependant dans divers cas particuliers, en particulier si S est contenu dans le centre de A ; dans ce dernier cas, l'application $\underline{p} \mapsto \varphi^{-1}(\underline{p})$ est une bijection de $\text{Spec } A_S$ sur la partie de $\text{Spec } A$ formée des idéaux premiers ne rencontrant pas S .

1.5. Si A est noethérien à droite, et si $\underline{a}$ est un idéal de A , nous notons $\sqrt[n]{\underline{a}}$ le plus grand idéal $\underline{b}$ tel qu'on ait $\underline{b}^n \subset \underline{a}$ lorsque n est assez grand.

PROPOSITION.- Si A est noethérien à droite, les idéaux premiers minimaux de A correspondent bijectivement aux composantes simples de $\text{Fract}(A/\sqrt{0})$. Leur nombre

est fini et leur intersection est égale à $\sqrt{0}$.

En effet, quitte à remplacer A par $A/\sqrt{0}$, on peut supposer que 0 est semi-premier. Si 0 n'est pas premier, il y a des idéaux non nuls a et b tels que $a.b = 0$. Alors $a \cap b$ est nilpotent ; donc $a \cap b = 0$ et $\sqrt{a} \cap \sqrt{b} = 0$. Si $\sqrt{a}$ n'est pas premier, on voit de même que $\sqrt{a}$ est l'intersection de 2 idéaux semi-premiers distincts de $\sqrt{a}$. Par récurrence noethérienne, on établit donc l'existence d'une suite irrédondante d'idéaux premiers $p_1, \dots, p_r$ tels que $p_1 \cap \dots \cap p_r = 0$; alors, avec les notations de 1.3, un élément $s \in S$ ne divise pas 0 dans A/p_i (supposons par exemple que $x.t \in p_i$ avec $x \notin p_i$; soit $y \in \bigcap_{j \neq i} p_j$ tel que $y \notin p_i$; il y a alors un $a \in A$ tel que $yax \notin p_i$; comme $x.t \in p_i$, on a $yaxt = 0$ et $t \in S$) ; pour tout i , p_{iS} est donc un idéal premier de A_S (1.4) et l'intersection $0 = p_{1S} \cap \dots \cap p_{rS}$ est irrédondante ; les p_{iS} coïncident donc avec les idéaux premiers de $\text{Fract}(A)$.

Remarque. - Mac Coy et Levitzki ont montré que, dans tout anneau, un idéal semi-premier est une intersection d'idéaux premiers ([9], chap. VIII, théor. 1).

2. Extensions de corps gauches.

2.1. Pour tout anneau K et toute dérivation D de K , nous désignons par $K_D[T]$ l'anneau engendré par K et par une lettre T soumise aux "seules relations"

$$Ta = aT + D(a) \quad \text{si } a \in K.$$

Tout élément non nul de $K_D[T]$ se met d'une manière et d'une seule sous la forme $a_0 + Ta_1 + \dots + T^n a_n$, où $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ et $a_n \neq 0$. Les

anneaux $K_D[T]$ et $K_E[T]$ sont isomorphes lorsque $D - E$ est une dérivation intérieure de K : en effet, si l'on a $D(x) = E(x) + ax - xa$ pour tout $x \in K$, on a un isomorphisme $u : K_D[T] \rightarrow K_E[T]$ tel que $u(y) = y$ si $y \in K$ et $u(T) = T + a$. En particulier, si D est une dérivation intérieure, $K_D[T]$ est isomorphe à $K_0[T] = K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[T]$.

Lorsque K est un anneau noethérien à droite, $K_D[T]$ est noethérien à droite (même démonstration que dans le cas où $D = 0$). Nous nous intéressons plus spécialement au cas où K est un corps gauche. Dans ce cas, tout idéal à gauche de $K_D[T]$ est monogène, ainsi que tout idéal à droite.

2.2. PROPOSITION.— Si K est un corps gauche de caractéristique 0, $K_D[T]$ possède un idéal bilatère distinct de 0 et de $K_D[T]$ si et seulement si la dérivation D est intérieure. Si Z désigne le centre de K , et si $D = 0$, tout idéal bilatère de $K_D[T]$ est engendré par un élément de $Z[T]$.

En effet, soit $\underline{a}$ un idéal bilatère distinct de 0 et de $K_D[T]$. Soit $P = T^n + T^{n-1}p_1 + \dots + p_n$ un élément tel que $\underline{a} = PK_D[T]$. Pour tout $x \in K$, on a

$$\begin{aligned} xP &= xT^n + xT^{n-1}p_1 + \dots + xp_n \\ &= (T^n x - \binom{n}{1} T^{n-1} D(x) + \binom{n}{2} T^{n-2} D^2(x) - \dots) + \\ &\quad (T^{n-1} x - \binom{n-1}{1} T^{n-2} D(x) + \dots)p_1 + \dots + xp_n \\ &= T^n x + T^{n-1}(xp_1 - nDx) + \dots \end{aligned}$$

Comme $Px \in PK_D[T]$, on a nécessairement $Px = xP$, d'où $nDx = xp_1 - p_1x$ et $D = -\frac{1}{n} \text{ad}(p_1)$. Enfin, si $D = 0$, la relation $Px = xP$ équivaut à

$p_i x = x p_i$ pour tout i ; donc $p_i \in Z$.

2.3. THÉOREME.- Soit K un corps gauche de centre Z :

a) Le centre de $\text{Fract}(K[T])$ est le corps des fractions rationnelles $Z(T)$.

b) Si K est de caractéristique 0 , et si D est une dérivation non intérieure de K , le centre de $\text{Fract}(K_D[T])$ est l'ensemble des $z \in Z$ tels que $Dz = 0$.

b) En effet, soient $Q = T^n q_0 + T^{n-1} q_1 + \dots$ et $P = T^m p_0 + T^{m-1} p_1 + \dots$ des éléments de $K_D[T]$ tels que PQ^{-1} soit central ($q_0 \neq 0$, $p_0 \neq 0$) . D'après 1.1, il revient au même de dire qu'on a $PTQ = QTP$ et $PaQ = QaP$ pour tout $a \in K$. Considérons la seconde relation : on a

$$PaQ = T^{m+n} p_0 a q_0 + T^{m+n-1} (p_0 a q_1 + p_1 a q_0 - nD(p_0 a) q_0) + \dots$$

d'où

$$(1) \quad p_0 a q_0 = q_0 a p_0$$

et

$$(2) \quad p_0 a q_1 + p_1 a q_0 - nD(p_0 a) q_0 = q_0 a p_1 + q_1 a p_0 - mD(q_0 a) p_0 .$$

On a de même

$$PTQ = T^{m+n+1} p_0 q_0 + T^{m+n} (p_0 q_1 + p_1 q_0 - (n+1)(Dp_0) q_0) + \dots$$

d'où

$$(3) \quad p_0 q_1 + p_1 q_0 - (n+1)(Dp_0) q_0 = q_1 p_0 + q_0 p_1 - (m+1)(Dq_0) p_0 .$$

Faisons $a = 1$, on en tire de (2) et (3) $(Dp_0) q_0 = (Dq_0) p_0$. De là et de (1), on déduit $q_0 = p_0 z$, avec $z \in Z$ et $Dz = 0$. Quitte à remplacer P par Pp_0^{-1} et Q par $Qq_0^{-1} = Qp_0^{-1} z^{-1}$, on peut donc supposer que $p_0 = q_0 = 1$. De (2) on tire alors $(m-n)Da = [q_1 - p_1, a]$. Comme D n'est pas une dérivation intérieure, on a donc $m = n$.

Nous allons montrer qu'on a nécessairement $P = Q$; supposons donc que

$$P = T^n + T^{n-1}r_1 + \dots + T^{n-s+1}r_{s-1} + T^{n-s}p + T^{n-s-1}p' + \dots \text{ et}$$

$$Q = T^n + T^{n-1}r_1 + \dots + T^{n-s+1}r_{s-1} + T^{n-s}q + T^{n-s-1}q' + \dots . \text{ Posons}$$

$$R = T^n + T^{n-1}r_1 + \dots + T^{n-s+1}r_{s-1} . \text{ On a alors}$$

$$\begin{aligned} PaQ &= RaR + T^{2n-s}(aq + pa) + T^{2n-s-1}(aq' + p'a + r_1aq \\ &\quad + par_1 - (n-s)(Da)q - nD(pa)) + \dots \end{aligned}$$

d'où $aq + pa = ap + qa$, i.e. $q - p = u \in Z$ et

$$[q' - p' - r_1u, a] + (n-s)(Da)u - nD(ua) = 0 . \text{ Faisant } a = 1 , \text{ on voit que}$$

$Du = 0$, donc $s(Da)u = [q' - p' - r_1u, a]$. Comme D n'est pas une dérivation intérieure, on a $u = 0$, donc $q = p$. (*)

a) Reprenons maintenant les notations précédentes dans le cas où $D = 0$. On se ramène comme ci-dessus au cas où $p_0 = q_0 = 1$. La relation (2) s'écrit alors

$aq_1 + p_1a = ap_1 + q_1a$, d'où $[q_1 - p_1, a] = 0$ et $q_1 - p_1 = z_1 \in Z$. Supposons prouvée l'existence d'éléments $z_1, \dots, z_s$ de Z tels qu'on ait

$q_t = p_t + p_{t-1}z_1 + p_{t-2}z_2 + \dots + p_1z_{t-1} + z_t$ pour $t \leq s$. Comparant alors les coefficients de $T^{m+n-s-1}$ dans PaQ et QaP , on trouve sans peine que

$$[q_{s+1} - p_{s+1} - p_s z_1 - \dots - p_1 z_s, a] = 0 , \text{ i.e. que}$$

$q_{s+1} - p_{s+1} - p_s z_1 - \dots - p_1 z_s = z_{s+1} \in Z$ (on pose évidemment $q_i = 0$ si $i > n$ et $p_j = 0$ si $j > m$) . Si l'on suppose que $n \leq m$, ce qui est loisible, on a donc en particulier les relations

(*) On peut donner de a) et b) une démonstration plus simple en prouvant directement que le centre de $\text{Fract}(K_D[T])$ coïncide avec le corps des fractions du centre de $K_D[T]$. Pour cela on associe à tout $a \in \text{Fract}(K_D[T])$ la dérivation intérieure ∂_a de $\text{Fract}(K_D[T])$ telle que $\partial_a(x) = ax - xa$; le centre de $\text{Fract}(K_D[T])$ est alors l'ensemble des x tels que $\partial_a(x) = 0$ dans chacun des cas suivants : $a = T$ ou $a \in K$. On peut donc appliquer [1], chap. I, § 4, prop. 5.

$$\begin{aligned}
 P_{n+1} + P_n z_1 + \dots + P_1 z_n + z_{n+1} &= 0 \\
 P_{n+2} + P_{n+1} z_1 + P_n z_2 + \dots + P_1 z_{n+1} + z_{n+2} &= 0 \\
 \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (R) \quad P_m + P_{m-1} z_1 + \dots + P_1 z_{m-1} + z_m &= 0 \\
 P_m z_1 + P_{m-1} z_2 + \dots + P_1 z_m + z_{m+1} &= 0 \\
 \dots \dots \dots \\
 P_m z_n + P_{m-1} z_{n+1} + \dots + P_1 z_{m+n-1} + z_{m+n} &= 0 .
 \end{aligned}$$

Si $m = n$ et si tous les z_i sont nuls, on a $P = Q$. Sinon, nous allons déduire de ces relations que P est divisible par un polynôme de degré ≥ 1 de $Z[T]$. Divisant P par ce polynôme, et raisonnant par récurrence sur $m + n$, on pourra alors terminer la preuve.

Soit (x_α) une base de l'espace vectoriel $Z + Zp_1 + \dots + Zp_n$ sur Z et posons $p_i = \sum_{\alpha} p_i^{\alpha} x_{\alpha}$ pour $1 \leq i \leq m$. Remplaçant p_i par p_i^{α} dans les relations (R), on obtient des relations (R^{α}) . Soit d'autre part T_{α} l'endomorphisme de Z^m tel que $T_{\alpha}(x_1, \dots, x_m) = (x_2, \dots, x_m, x)$ avec $p_m^{\alpha} x_1 + p_{m-1}^{\alpha} x_2 + \dots + p_1^{\alpha} x_m + x = 0$. Si l'on pose $z = (0, \dots, 0, 1, z_1, \dots, z_n)$, les relations (R^{α}) montrent que, pour $0 \leq i \leq m$, $T_{\alpha}^i(z)$ est indépendant de i . Si V est l'espace vectoriel engendré par ces $T_{\alpha}^i(z)$, il s'ensuit que la restriction de T_{α} à V ne dépend pas de α . Le polynôme unitaire et de degré minimal $M \in Z[T]$ tel que $M(T_{\alpha}|V) = 0$ ne dépend donc pas de α . Or, si l'on pose $P_{\alpha} = p_m^{\alpha} + \dots + p_1^{\alpha} T^{m-1} + T^{m-1}$, on a $P_{\alpha}(T_{\alpha}) = 0$, de sorte que M divise P_{α} . Si l'on pose $P_{\alpha} = MN_{\alpha}$, on a donc $P = \sum_{\alpha} P_{\alpha} x_{\alpha} = M(\sum_{\alpha} N_{\alpha} x_{\alpha})$, C.Q.F.D.

2.4. Soient k un corps commutatif et K une k -algèbre dont l'anneau sous-jacent est un corps. On dit que K est une extension résoluble de k si K contient une suite finie $t_0, t_1, \dots, t_n$ possédant les propriétés suivantes :

l'extension de corps $K|k$ est engendrée par $t_0, \dots, t_n$;

pour tout $i \geq 1$, la sous-extension $k(t_0, \dots, t_i)$ de K , qui est engendrée par $t_0, \dots, t_i$ est stable pour la dérivation intérieure ad $t_{i+1} = t_{i+1} ? - ? t_{i+1}$.

Dans le cas où K n'est pas commutatif, on peut évidemment supposer que la dérivation ad t_n de $k(t_0, \dots, t_{n-1})$ n'est pas intérieure (en effet si l'on avait $[t_n, x] = [a, x]$ pour tout $x \in k(t_0, \dots, t_{n-1})$ et pour un certain $a \in k(t_0, \dots, t_{n-1})$, on pourrait remplacer la suite donnée par $t_n - a, t_0, \dots, t_{n-1}$).

COROLLAIRE.- Si k est de caractéristique 0, si $K|k$ est une extension résoluble de corps, le centre de K est une extension de type fini de k .

En effet, supposons, avec les notations ci-dessus, que la dérivation de $k(t_0, \dots, t_{n-1})$, qui est induite par t_n , n'est pas intérieure. Alors le centre de K est contenu dans celui de $k(t_0, \dots, t_{n-1})$ (2.3).

2.5. COROLLAIRE.- Soient k un corps commutatif, $K|k$ une extension de corps, Z le centre de K , et L une Z -algèbre commutative.

- a) L'application $I \mapsto I \cap L$ est une bijection de $\text{Spec}(K \otimes_Z L)$ sur $\text{Spec } L$.
- b) Si $I \in \text{Spec}(K \otimes_Z L)$, soit S l'ensemble des non diviseurs de 0 de $(K \otimes_Z L)/I$. Alors S permet un calcul de fractions (à gauche et à droite), et le centre de $((K \otimes_Z L)/I)_S$ s'identifie à $\text{Fract}(L/I \cap L)$.
- c) Si l'extension $K|k$ est résoluble, et si k est de caractéristique 0, tout idéal premier I de $K \otimes_Z L$ est complètement premier.

a) En effet, tout idéal bilatère de $K \otimes_Z L$ est de la forme $K \otimes_Z J$, où J est un idéal de L ([2], § 4, n° 5, prop. 7).

b) Il suffit évidemment de considérer le cas où L est une Z -algèbre de type fini et où $I = 0$. Alors $K \otimes_Z L$ est noethérien à gauche et à droite et l'on sait que S permet un calcul de fractions (Goldie). De plus, on peut supposer que L est un module de type fini sur une sous-algèbre de polynômes $L' = Z[T_1, \dots, T_r]$. On a alors manifestement $\text{Fract}(K \otimes_Z L) = \text{Fract}(K \otimes_Z L') \otimes_F (F \otimes_{L'} L)$, avec $F = \text{Fract}(L')$. Quitte à remplacer K par $\text{Fract}(K \otimes_Z L')$, Z par $Z(T_1, \dots, T_r)$ (2.3 a)) et L par $F \otimes_{L'} L$, on peut supposer que $L|Z$ est une extension finie de corps. La dernière assertion de b) est alors triviale.

Si, de plus, $K|k$ est résoluble, nous pouvons reprendre les notations de 2.4, poser $K' = k(t_0, \dots, t_{n-1})$ et supposer que $t = t_n$ n'induit pas une dérivation intérieure dans K' . On a alors $K \otimes_Z L = (\text{Fract } K'[t]) \otimes_Z L = \text{Fract}(K'[t] \otimes_Z L) = \text{Fract}((K' \otimes_Z L)[t])$. Raisonnant par récurrence sur n , on sait que $K' \otimes_Z L$ est intègre, donc que $(K' \otimes_Z L)[t]$ l'est (appliquer 2.2). Ceci prouve c).

3. Idéaux premiers de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble.

Nous désignons désormais par k un corps de caractéristique 0, par g une k -algèbre de Lie résoluble de dimension finie, par $U(g)$ l'algèbre enveloppante de g . Si M est un g -module et si $\lambda \in g^*$, on dit que λ est une valeur propre de g dans M s'il y a un élément non nul $x \in M$ tel que $\gamma x = \lambda(\gamma).x$, $\forall \gamma \in g$. On dit alors que x est un vecteur propre. Si $[M:k] < +\infty$, on dit que M est trigonalisable lorsque les facteurs simples de M sont de dimension 1.

3.1. LEMME.- Soient M et N deux g -modules trigonalisables et P un sous- g -module de $M \otimes_k N$. Si P contient un vecteur décomposable non nul $a \otimes b$ ($a \in M$, $b \in N$), alors P contient un vecteur décomposable $m \otimes n$ tel que m et n soient des vecteurs propres de M et N .

Pour la démonstration, on pourra se reporter à celle du lemme 1.1 de [5].

3.2. THÉOREME.- Tout idéal premier I de $U(g)$ est complètement premier.

En effet, supposons d'abord que la représentation adjointe de g dans g est trigonalisable. Soient alors a et b des éléments non nuls de $U(g)/I$ tels que $a.b = 0$. Soient M et N les g -modules engendrés par a et b , et P le noyau de la multiplication $M \otimes_k N \rightarrow U(g)/I$. Il est clair que M et N sont trigonalisables. D'après 3.1, il y a donc des vecteurs propres $m \in M$ et $n \in N$ tels que $m \otimes n \in P$, i.e. $m.n = 0$. Si λ est la valeur propre associée à m , si $\gamma_1, \dots, \gamma_{r+1}$ sont des éléments de g , et si $\bar{\gamma}_i$ est l'image de γ_i dans $U(g)/I$, on a donc

$$m\bar{\gamma}_{r+1}\bar{\gamma}_r \dots \bar{\gamma}_1 n = \bar{\gamma}_{r+1}m\bar{\gamma}_r \dots \bar{\gamma}_1 n - \lambda(\bar{\gamma}_{r+1})m\bar{\gamma}_r \dots \bar{\gamma}_1 n.$$

Par récurrence sur r , on voit donc que $m\bar{\gamma}_{r+1}\bar{\gamma}_r \dots \bar{\gamma}_1 n = 0$, donc que $m(U(g)/I)n = 0$; ceci est absurde, par définition des idéaux premiers.

Dans le cas général, soit K une extension galoisienne finie de k telle que la représentation adjointe de $g \otimes_k K$ soit trigonalisable. Soit J le plus grand idéal nilpotent de $(U(g)/I) \otimes_k K \cong U(g \otimes_k K)/I \otimes_k K$. Comme J est stable sous l'action du groupe de Galois, J est de la forme $L \otimes_k K$, où L est un idéal nilpotent de $U(g)/I$. On a donc $L = J = 0$; si $q_1 \dots q_s$ sont les idéaux premiers minimaux de $(U(g)/I) \otimes_k K$, on a donc $q_1 \cap \dots \cap q_s = 0$, d'où $\bigcap_i ((U(g)/I) \cap q_i) = 0$, d'où $(U(g)/I) \cap q_i = 0$ pour un i . On voit donc que 0

est l'image réciproque d'un idéal complètement premier, donc est complètement premier.

3.3. PROPOSITION.— Soient A une k -algèbre, D une k -dérivation de A et I un idéal premier de $A_D[T]$. Alors $A \cap I$ est un idéal premier de A si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- a) A est la réunion de ses sous-espaces de dimension finie stables sous D ;
- b) A est noethérien à droite.

a) On peut évidemment supposer que $I \cap A = 0$. Soient alors a, b des éléments non nuls de A tels que $aAb = 0$. Soient M et N les sous-espaces de A engendrés respectivement par les itérés $D^i a$ et $D^i b$. Quitte à remplacer k par une extension galoisienne finie, on peut supposer que les facteurs simples de M et N pour l'opération de D sont de dimension 1 (raisonner comme en 3.2).

Appliquons 3.1 aux représentations de l'algèbre de Lie de dimension 1 définies par D dans M et N . Soit P le sous-espace de $M \otimes_k N$ formé des

$\sum m_j \otimes n_j$ tels qu'on ait $\sum m_j c n_j = 0$ pour tout $c \in A$. Il est clair que P est stable pour l'endomorphisme $m \otimes n \mapsto Dm \otimes n + m \otimes Dn$. D'après 3.1 on peut donc supposer que a et b sont des vecteurs propres pour D , de valeurs propres λ et μ . On a alors $aT^{n+1}Ab = TaT^nAb - \lambda aT^nAb$, ce qui montre par récurrence sur n que $aT^nAb = 0$, donc que $aA_D[T]b = 0 \subset I$, ce qui est absurde.

b) Nous supposons encore que $A \cap I = 0$. D'après le lemme ci-dessous, les idéaux premiers minimaux $p_1 \dots p_r$ de A sont stables sous D . Leur intersection s est donc stable et elle est nilpotente. On en déduit de suite que l'idéal $s_D[T] = \{s_0 + Ts_1 + \dots + T^n s_n \mid s_i \in s\}$ de $A_D[T]$ est nilpotent, donc contenu dans I ; donc $s = 0$, et l'on a

$p_{1D}[T] \cdot p_{2D}[T] \dots p_{rD}[T] \subset (p_1 \cap \dots \cap p_r)_D[T] = 0 \subset I$. On a donc $p_{iD}[T] \subset I$ pour un i , d'où $p_i = 0$.

3.4. LEMME.- Soient A une k -algèbre et D une k -dérivation de A . Alors tout idéal premier minimal de A est stable sous D .

En effet, soit $A[[T]]$ l'anneau des séries formelles en une variable T commutant avec les éléments de A . Pour tout idéal $\underline{a}$ de A , $\underline{a}[[T]] = \{a_0 + a_1T + \dots, a_i \in \underline{a}\}$ est un idéal fermé pour la topologie naturelle de $A[[T]]$; si $\underline{a}$ est premier, $\underline{a}[[T]]$ l'est; réciproquement, si $\underline{p}$ est un idéal premier fermé de $A[[T]]$, alors $\underline{p} \cap A$ est premier et $\underline{p}$ contient $(\underline{p} \cap A)[[T]]$. L'application $\underline{a} \mapsto \underline{a}[[T]]$ met donc en correspondance bijective les idéaux premiers minimaux de A , et les idéaux premiers fermés minimaux de $A[[T]]$.

Soit maintenant $\bar{D}$ le prolongement de D à $A[[T]]$ tel que $\bar{D}(a_0 + a_1T + \dots) = D(a_0) + D(a_1)T + \dots$. On sait que $\exp T\bar{D}$ est un automorphisme de l'anneau topologique $A[[T]]$. Si $\underline{a}$ est un idéal premier minimal de A , il s'ensuit que $(\exp T\bar{D})(\underline{a}[[T]]) = \underline{p}$ est un idéal premier minimal fermé de $A[[T]]$. Comme, de plus, on a $\underline{p} \cap A = \underline{a}$, on voit que $\underline{p} = \underline{a}[[T]]$, donc que $\underline{a}$ est stable sous D (l'idée d'utiliser l'exponentielle m'a été "soufflée" par P. Cartier).

3.5. Pour tout idéal premier I de $U(\mathfrak{g})$, $U(\mathfrak{g})/I$ est un anneau intègre (3.2). Nous notons $k(I)$ son corps des fractions et $C(I)$ le centre de $k(I)$; on dira que $C(I)$ est le coeur de I .

PROPOSITION.- Pour tout idéal premier I de $U(\mathfrak{g})$, $k(I)|k$ est une extension

résoluble de corps, donc $C(I)|_k$ est une extension de type fini (2.4).

En effet, soit $s(g)$ le socle de g , i.e. le plus grand sous- g -module semi-simple de g supposé muni de l'opération adjointe. Si g est trigonalisable, $s(g)$ est le sous-espace engendré par les vecteurs propres ; donc $s(g)$ est toujours un idéal commutatif (remarquer que la construction de $s(g)$ commute avec l'extension du corps de base ; se ramener ainsi au cas trigonalisable).

Définissons $s^i(g)$ par récurrence sur i : $s^{i+1}(g)/s^i(g) = s(g/s^i(g))$. En raffinant la chaîne $0 \subset s(g) \subset s^2(g) \subset \dots$ on obtient une suite de sous-algèbres de Lie $0 = g_{-1} \subset g_0 \subset g_1 \subset \dots \subset g_n = g$ telle que $[g_{i+1}/g_i, k] = 1$ et que g_i soit un idéal de g_{i+1} pour tout i . Si $x_i \in g_i$ et $x_i \notin g_{i-1}$ pour tout $i \geq 0$, et si t_i désigne l'image canonique de x_i dans $k(I)$, la suite $t_0, \dots, t_n$ vérifie les conditions de 2.4.

3.6. Soient $K|k$ une extension de corps commutatifs et

$i : U(g) \rightarrow U(g) \otimes_k K \xrightarrow{\sim} U(g) \otimes_k K$ l'application canonique. Si I est un idéal premier de $U(g) \otimes_k K$, $i^{-1}(I)$ est un idéal premier de $U(g)$ (3.2). On définit ainsi une application $\text{Spec } i : \text{Spec } U(g) \otimes_k K \rightarrow \text{Spec } U(g)$, qui associe $i^{-1}(I)$ à I .

PROPOSITION.- Soit J un idéal premier de $U(g)$. Il y a une bijection canonique de $\text{Spec}(C(J) \otimes_k K)$ sur la fibre de $\text{Spec } i$ au-dessus de J . Si $I \in \text{Spec } U(g) \otimes_k K$ est associé à $p \in \text{Spec } C(J) \otimes_k K$, on a de plus $C(I) \xrightarrow{\sim} \text{Fract}((C(J) \otimes_k K)/p)$.

En effet, posons $A = U(g)/J$. La fibre de $\text{Spec } i$ au-dessus de J s'identifie à la fibre de $\text{Spec } A \otimes_k K \rightarrow \text{Spec } A$ au-dessus de 0 . Soit $S = A - \{0\}$.

Alors S permet un calcul de fractions (à droite et à gauche) dans $A \otimes_k K$, de sorte que la fibre de $\text{Spec } A \otimes_k K \rightarrow \text{Spec } A$ s'identifie d'après 1.4

à l'ensemble des idéaux complètement premiers de

$(A \otimes_k K)_S \cong k(J) \otimes_k K \cong k(J) \otimes_{C(J)} (C(J) \otimes_k K)$. Notre assertion résulte donc de 2.5.

3.7. Nous disons qu'un idéal premier I de $U(g)$ est un idéal rationnel si $C(I) = k$. Pour toute extension de corps commutatifs, et pour tout idéal rationnel I de $U(g)$, il résulte alors de 3.6 qu'il y a exactement un idéal premier J de $U(g \otimes_k K)$ tel que $J \cap U(g) = I$; de plus J est rationnel. Si $\mathcal{R}_g(K)$ désigne l'ensemble des idéaux rationnels de $U(g \otimes_k K)$, on a donc défini un foncteur $\mathcal{R}_g : K \mapsto \mathcal{R}_g(K)$, où K parcourt la catégorie des extensions de corps de k .

COROLLAIRE.- Le foncteur des idéaux rationnels $\mathcal{R}_g$ est isomorphe à la somme directe des foncteurs représentés par les coeurs $C(I)$ des idéaux premiers de $U(g)$.

En effet, si J est un idéal rationnel de $U(g \otimes_k K)$, soit $I = J \cap U(g)$. L'application canonique $U(g) \rightarrow U(g \otimes_k K)$ induit des homomorphismes $k(I) \rightarrow k(J)$ et $\varphi : C(I) \rightarrow C(J) \cong K$. L'isomorphisme cherché applique $J \in \mathcal{R}_g(K)$ sur le couple $(I, \varphi) \in \coprod_I \text{Hom}(C(I), K)$. Le corollaire est trivial modulo 3.6.

On voit ainsi que l'étude des idéaux premiers de $U(g)$ et des coeurs associés équivaut à celle du foncteur des idéaux rationnels.

4. Caractérisation des idéaux primitifs.

4.1. LEMME DE QUILLEN.- Soient h une algèbre de Lie de dimension finie sur k et M un h -module simple. Le commutant de h est une extension algébrique de k .

En effet, sinon le commutant de M contient un élément x transcendant sur k et l'opération donnée de x sur M se prolonge à tout le corps des fractions rationnelles $k(x)$. D'un autre côté, on peut définir sur M une structure de module sur l'anneau $V = k[x] \otimes_k U(h)$ en posant $(p \otimes u).m = p(u.m) = u.p(m)$ si $p \in k[x]$, $u \in U(h)$ et $m \in M$. Si $(U_r(h))_{r \geq 0}$ est la filtration naturelle de $U(h)$, on posera $V_r = k[x] \otimes_k U_r(h)$ et $M_r = V_r.m$, où m est un élément non nul de M que l'on se fixe. On fait ainsi de M un module filtré sur l'anneau filtré V . Le gradué associé $Gr(M)$ est un $Gr(V)$ -module engendré par $m \in M_0$. Par conséquent, $Gr(M)$ est de type fini sur $Gr(V)$, qui est une algèbre de polynômes sur $k[x]$. D'après le théorème de platitude générique ([14], chap. IV, 6.9.2), il y a donc un $f \in k[x]$ tel que $Gr(M)_f = Gr(M_f)$ soit libre sur l'anneau de fractions $k[x]_f$. Alors chaque $(M_{r+1}/M_r)_f$ est libre sur $k[x]_f$, ainsi que M_f . Ceci contredit le fait que M est un $k(x)$ -module.

4.2. Rappelons qu'un idéal I d'un anneau A est dit primitif si I est l'annulateur d'un A -module simple.

LEMME.- Soit g une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur k . Tout idéal semi-premier I de $U(g)$ est une intersection d'idéaux primitifs.

D'après 1.5, on peut supposer que I est premier. Le lemme 4.3 ci-dessous nous permet de nous ramener, par une extension finie de k , au cas où g est trigonalisable pour la représentation adjointe.

Posons alors $A = U(g)/I$; il s'agit de montrer que le radical de Jacobson de A est nul. Supposons le contraire : comme le radical est un idéal bilatère, c'est un sous- g -module de A pour la représentation adjointe de g dans A . Le radical contient donc un vecteur propre a , de valeur propre λ .

Montrons que a est algébrique sur k : en effet, sinon $k[a]$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes en a . Comme $1 - \mu a$ est inversible pour tout $\mu \in k$, A contient donc l'anneau de fractions $k[a]_S$ relativement à la partie multiplicative S engendrée par les polynômes irréductibles $1 - \mu a$, $\mu \neq 0$ (en nombre infini). Considérons d'autre part le produit tensoriel $V = k[T] \otimes_k U(g)$ muni de la structure de k -algèbre telle que $(1 \otimes \gamma)(T \otimes 1) = T \otimes \gamma + \lambda(\gamma)T \otimes 1$ si $\gamma \in g$. Alors A est un V -module à gauche si l'on pose $(p \otimes u)m = p(a)\bar{u}m$ lorsque $p \in k[T]$, $m \in A$, $u \in U(g)$, et que $\bar{u}$ désigne l'image canonique de u dans A . On filtre V à l'aide des sous-espaces $V_r = k[T] \otimes_k U_r(g)$, et M à l'aide des sous-espaces $V_r \cdot 1_A$ (1_A étant l'élément unité de A). La démonstration se termine alors comme en 4.2.

Donc a est algébrique sur k et, pour toute extension finie K de k et tout $\mu \in K$, $1 - \mu a$ est inversible dans $k[a] \otimes_k K \subset A \otimes_k K$. Il s'ensuit que a est nilpotent ; or, si $a^r = 0$, on a aussi $(AaA)^r = 0$ (par exemple si $r = 2$, on a $a\gamma_1 \dots \gamma_n a = a\gamma_1 \dots \gamma_{n-1} a\gamma_n + \lambda(\gamma_n) a\gamma_1 \dots \gamma_{n-1} a$, lorsque $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in g$; ceci montre par récurrence sur n que $a\gamma_1 \dots \gamma_n a = 0$). Ceci contredit le fait que A n'a pas d'idéal nilpotent non nul.

4.3. LEMME.— Soient A une algèbre sur k , I un idéal semi-premier de A , et K une extension galoisienne finie de k . Alors $I \otimes_k K$ est semi-premier ; si $I \otimes_k K$ est une intersection d'idéaux primitifs, I l'est.

La première assertion résulte simplement de ce que $\sqrt{I \otimes_k K}$ est stable sous l'action du groupe de Galois, donc est de la forme $J \otimes_k K$.

La deuxième assertion résulte de ce que, si P est un idéal à gauche maximum de $A \otimes_k K$, alors $A/A \cap P$ est semi-simple (de sorte que $A \cap P$ est une intersection d'idéaux à gauche maximaux de A) : en effet, si δ parcourt le groupe de Galois Γ de $K|k$, $\bigcap_{\delta} \delta(P)$ est stable sous Γ , donc coïncide avec

$(A \cap P) \otimes_k K$; si $A/A \cap P$ n'était pas semi-simple,

$(A/A \cap P) \otimes_k K = (A \otimes_k K) / \bigcap_{\delta} \delta(P)$ ne le serait pas ([2], § 7, n° 3, cor. 2 de la prop. 3).

4.4. LEMME.- Supposons g trigonalisable pour la représentation adjointe, et soit I un idéal premier de $U(g)$. Alors tout élément non nul $z \in C(I)$ s'écrit $z = b^{-1}a$, où b et a sont deux vecteurs propres (de même valeur propre) de $A = U(g)/I$ (muni de l'opération adjointe).

En effet, l'opération adjointe se prolonge à $k(I)$ (1.2) ; soit donc M le sous- g -module de $A \times A$ formé des (x, y) tels que $x = yz$. Comme $(a, b) \in M$, on a $M \neq 0$. Comme $A \times A$ est une réunion de sous- g -modules trigonalisables, M l'est. Donc M contient un vecteur propre.

4.5. LEMME.- Soient g' et g'' des idéaux de g tels que $g'' \subset g'$ et $[g'/g'' : k] = 1$. Soit enfin I' un idéal premier de $U(g')$ qui soit stable pour l'opération adjointe de g et tel que k soit le corps des invariants de g dans $C(I')$. Il y a alors au plus un idéal premier I'_0 de $U(g')$ qui soit stable sous g , et tel que $I' \subset I'_0$, $I' \neq I'_0$ et $I' \cap U(g'') = I'_0 \cap U(g'')$.

En effet, soient $t \in g' - g''$ et D la dérivation induite par t dans

$A'' = U(g'')/I' \cap U(g'')$. Soient $\bar{t}$ l'image de t dans $A' = U(g')/I'$ et $p : A''_{\mathcal{D}}[T] \rightarrow A'$ l'application telle que $p(x) = x$ si $x \in A''$ et $p(T) = \bar{t}$.

Alors $\text{Ker } p$ est un idéal complètement premier de $A''_{\mathcal{D}}[T]$ et l'on a

$\text{Ker } p \cap A'' = 0$; d'après 1.4, $\text{Ker } p$ est donc associé à un idéal complètement premier J de $K_{\mathcal{D}}[T]$, avec $K = \text{Fract}(A'')$. Si $J \neq 0$, J est maximal d'après 2.2, et il n'y a pas de I'_0 . Si $J = 0$, p est un isomorphisme, et I'_0 est associé à un idéal complètement premier J_0 de $K_{\mathcal{D}}[T]$, qui est stable sous g et non nul.

Il suffit de montrer alors qu'il y a au plus un J_0 vérifiant ces conditions : or, d'après 2.2, il y a un $a \in K$ tel que $D(x) = [a, x]$ pour tout $x \in K$. Si l'on pose $S = T - a$, S est central ; de plus, g opère sur $K_{\mathcal{D}}[T] = K_0[S]$ de telle manière que $\gamma(S) = \lambda(\gamma)S + \nu(\gamma)$ pour tout $\gamma \in g$ ($\lambda \in g^*$ et $\nu(\gamma) \in K$) . On est donc ramené au lemme 4.6 :

4.6. LEMME.- Soient K une k -algèbre dont l'anneau sous-jacent est un corps de centre Z . Soit g une algèbre de dérivations de $K_0[T]$ telle que K_0 soit stable sous g , telle que k soit le corps $Z(T)^g$ des invariants de g dans $Z(T)$, et telle qu'on ait $\gamma(T) = \lambda(\gamma)T + \nu(\gamma)$ pour tout $\gamma \in g$ ($\lambda \in g^*$ et $\nu(\gamma) \in K$) . Alors il y a au plus un idéal premier non nul J_0 de $K_0[T]$ qui soit stable sous g .

En effet, d'après 2.2, J_0 est engendré par un polynôme irréductible

$$P = T^n + z_1 T^{n-1} + \dots + z_n \in Z[T] . \text{ Si } \gamma \in g , \text{ on a}$$

$$\gamma(P) = (nT^{n-1} + (n-1)z_1 T^{n-2} + \dots)\gamma(T) + \gamma(z_1)T^{n-1} + \dots + \gamma(z_n) =$$

$$n\lambda(\gamma)T^n + (n\nu(\gamma) + (n-1)z_1\lambda(\gamma) + \gamma(z_1))T^{n-1} + \dots . \text{ D'où, par comparaison des}$$

coefficients de $\gamma(P)$ et de $n\lambda(\gamma)P$, $n\nu(\gamma) + (n-1)z_1\lambda(\gamma) + \gamma(z_1) = nz_1\lambda(\gamma)$; d'où $\gamma(z_1) = \lambda(\gamma)z_1 - n\nu(\gamma)$ et $\gamma(z_1 + nT) = \lambda(\gamma)(z_1 + nT)$. Quitte à remplacer T par $T + \frac{z_1}{n}$, on peut donc supposer que $\nu(\gamma) = 0$ pour tout γ . On a alors $\gamma(T) = \lambda(\gamma)T$, d'où $\gamma(T^n) = n\lambda(\gamma)T^n$ et $\gamma(P) = n\lambda(\gamma)P$; d'où $P^{-1}T^n \in Z(T)^g = k$, $T^n \in J_0$, $T \in J_0$ et finalement $J_0 = (T)$.

4.7. THÉORÈME.- Soit g une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k de caractéristique 0, et soit I un idéal premier de $U(g)$. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

- (i) I est primitif.
- (ii) $C(I)$ est une extension algébrique de k .

(i) $\Rightarrow$ (ii) : en effet, soit $K|k$ une extension galoisienne finie telle que $g \otimes_k K$ soit trigonalisable. Si M est un g -module simple d'annulateur I , $M \otimes_k K$ est un $(g \otimes_k K)$ -module semi-simple d'annulateur $I \otimes_k K$. Si $P_1, \dots, P_r$ sont les annulateurs des composantes isotypiques de $M \otimes_k K$, on a donc

$I \otimes_k K = \bigcap_i P_i$, d'où $I = \bigcap_i (P_i \cap U(g))$, d'où $I = P_i \cap U(g)$ pour un i . Alors $C(I) \subset C(P_i)$, et il suffit de montrer que $C(P_i)|K$ est une extension algébrique.

Ceci nous ramène au cas où g est trigonalisable.

Dans ce cas, soit $z = b^{-1}a \in C(I)$, a et b étant des vecteurs propres de $A = U(g)/I$ de même valeur propre λ (4.4). Soit a_M l'application $m \mapsto am$ de M dans M . La formule $\gamma_M a_M - a_M \gamma_M = \lambda(\gamma) a_M$, où $\gamma \in g$, montre que $\text{Im } a_M$ et $\text{Ker } a_M$ sont des g -sous-modules de M . Il s'ensuit que a_M est bijectif, ainsi que b_M ; par conséquent $b_M^{-1} a_M = f$ est défini et appartient au commutant de M , donc est algébrique sur k (4.1). Si l'on a

$f^n + \alpha_1 f^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$, $\alpha_i \in k$, on a aussi $a_M^n + \alpha_1 a_M^{n-1} b_M + \dots + \alpha_n b_M^n = 0$ (a et b commutent), d'où $(a^n + \alpha_1 a^{n-1} b + \dots + \alpha_n b^n)_M = 0 \dots$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : en effet, d'après 4.2, il suffit de montrer que l'intersection $\hat{I}$ des idéaux premiers J tels que $I \subset J$ et $I \not\subset J$, est distincte de I :

soit $\bar{k}$ une extension galoisienne finie de k contenant $C(I)$. Pour tout idéal premier P de $U(g)$, l'ensemble des $\bar{P} \in \text{Spec } U(g) \otimes_k \bar{k}$ tels que $\bar{P} \cap U(g) = P$ est fini (3.6) ; comme $\cap \bar{P}$ est stable sous l'action du groupe de Galois de $\bar{k}|k$, on a $\cap \bar{P} = P \otimes_k \bar{k}$. Dans le cas particulier où $P = I$, notons

$I_1, \dots, I_r$ les idéaux $\bar{P}$ ainsi obtenus ; les I_i sont rationnels (3.6) ; de plus, si $Q \in \text{Spec } U(g) \otimes_k \bar{k}$, les relations $I_i \subset Q$ et $I_i \not\subset Q$ impliquent

$U(g) \cap Q \neq I$ (3.6) ; enfin, si $Q \cap U(g) = J$, Q contient $I \otimes_k \bar{k} = \cap I_i$, donc contient l'un des I_i . On a donc $\hat{I} \otimes_k \bar{k} = \cap (J \otimes_k \bar{k}) = \bigcap_{Q \rightarrow J} Q = \hat{I}_1 \cap \dots \cap \hat{I}_r$.

Si nous montrons que $I_i \not\subset \hat{I}_i$ pour tout i , on aura $\hat{I}_1 \cap \dots \cap \hat{I}_r \not\subset I_1 \cap \dots \cap I_r$ d'où $\hat{I} \otimes_k \bar{k} \neq I \otimes_k \bar{k}$.

et g trigonalisable

Nous pouvons donc supposer I rationnel : soit g' un idéal de g . Faisons parcourir à J' les idéaux premiers de $U(g')$ qui sont stables pour l'opération adjointe de g et tels que $I' = I \cap U(g') \subsetneq J'$. Nous allons montrer, par récurrence sur $[g':k]$, que $\hat{I}' = \cap J' \neq I'$: en effet, soit g'' un idéal de g tel que $g'' \subset g'$ et $[g'/g'':k] = 1$; posons $I'' = I' \cap U(g'')$. On a alors soit $J' \cap U(g'') \neq I''$ (dans ce cas $J' \supset \hat{I}''$, ce dernier idéal étant défini, mutatis mutandis, comme $\hat{I}'$), soit $J' \cap U(g'') = I''$ (dans ce cas $J' = I'_0$, avec les notations de 4.5). On a donc finalement $\hat{I}' = \cap J' \supset U(g') \hat{I}'' \cap I'_0$; cette intersection n'est pas contenue dans I' .

BIBLIOGRAPHIE
=====

- [1] BERNAT - Sur le corps enveloppant d'une Algèbre de Lie résoluble. Bull. Soc. Math. France, supplément, mémoire 7.
- [2] BOURBAKI - Algèbre, chap. VIII. Hermann.
- [3] BOURBAKI - Algèbre Commutative. Hermann.
- [4] DIXMIER - Représentations irréductibles des algèbres de Lie nilpotentes. Anais Acad. Brasil Ciencias, 1963.
- [5] DIXMIER - Représentations irréductibles des algèbres de Lie résolubles. J. math. pures et appl., 1966.
- [6] DIXMIER - Sur les algèbres de Weyl. A paraître.
- [7] GABRIEL - Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. France, 1962.
- [8] GOLDIE - Semi-prime rings with maximum condition. Proc. London Math. Soc., 1960.
- [9] JACOBSON - Structure of Rings. Amer. Math. Soc. Coll. Publications.
- [10] LESIEUR et CROISOT - Anneaux premiers noethériens à gauche. Ann. Sc. Ecole Norm. Sup., 1959.
- [11] NOUAZÉ et GABRIEL - Idéaux premiers de l'Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente. J. of Algebra, 1967.
- [12] QUILLEN - On the endomorphism ring of a simple module over an enveloping algebra. A paraître.
- [13] RENTSCHLER et GABRIEL - Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, p. 712 (1967).
- [14] DIEUDONNÉ et GROTHENDIECK - Eléments de Géométrie algébrique. Pub. Math., n° 24.