

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ARMAND BOREL

## **Sous-groupes discrets de groupes semi-simples**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1971, exp. n° 358, p. 199-215

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1968-1969\\_\\_11\\_\\_199\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1968-1969__11__199_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SOUS-GROUPES DISCRETS DE GROUPES SEMI-SIMPLES

(d'après D. A. KAJDAN et G. A. MARGOULIS)

par Armand BOREL

§ 1. Enoncé des résultats.

$G$  désignera toujours un groupe de Lie connexe, semi-simple. Pour abrégé on appellera facteur compact de  $G$  tout sous-groupe compact connexe distingué, et on dira que  $G$  est sans facteur compact s'il ne possède pas de facteur compact  $\neq \{e\}$ .

Dans ce paragraphe, on énonce les résultats obtenus dans [6] (à cela près que [6] suppose  $G$  linéaire, sans facteur compact, mais le passage de là au cas un peu plus général considéré ici est immédiat).

**THÉORÈME 1.-** Il existe un voisinage  $W$  de l'élément neutre  $e$  de  $G$  tel que si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $G$  dont l'intersection avec tout facteur compact de  $G$  est dans le centre de  $G$ , alors il existe  $g \in G$  tel que

$$g \cdot \Gamma \cdot g^{-1} \cap W = \{e\} .$$

Soit  $m$  une mesure de Haar sur  $G$ . Elle est bi-invariante, et définit canoniquement une mesure invariante sur  $G/\Gamma$  pour tout sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $G$ . On notera  $m(A)$  la mesure d'une partie mesurable de  $G/\Gamma$  par rapport à cette mesure.

COROLLAIRE.- Il existe une constante  $d_G > 0$  telle que si  $\Gamma$  est comme dans le théorème, alors  $m(G/\Gamma) \geq d_G$ .

En effet, si  $W_0$  est un voisinage symétrique de  $e$  tel que  $W_0 \cdot W_0 \subset W$ , alors la restriction de la projection canonique  $\pi : G \rightarrow G/(g \cdot \Gamma \cdot g^{-1})$  à  $W_0$  est injective donc  $m(G/\Gamma) = m(G/(g \Gamma g^{-1})) \geq m(W_0)$ .

On voit en particulier que si  $G$  n'a pas de facteur compact, alors les conclusions du Théor. 1 et de son corollaire valent pour tout sous-groupe discret de  $G$ . Cela est évidemment faux si  $G$  est compact.

Ce corollaire était connu auparavant pour  $G = \underline{\underline{SL}}(2, \underline{\underline{R}})$ . En effet, Siegel [7] a montré que si  $X$  est le disque unité  $\{|z| < 1\}$  du plan complexe, muni de l'élément de volume  $dx \wedge dy \cdot (1 - |z|^2)^{-1}$ , et si  $\Gamma$  est un groupe d'automorphismes proprement discontinu de  $X$ , alors  $m(X/\Gamma) \geq \pi/21$  (la borne inférieure étant atteinte). Récemment, H. C. Wang [8] a donné une autre démonstration du Théor. 1, qui fournit aussi des renseignements quantitatifs sur  $W$ .

THÉORÈME 2.- Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G$ . Supposons  $G/\Gamma$  non compact et  $m(G/\Gamma) < \infty$ . Alors il existe  $x \in \Gamma$  dont la classe de conjugaison  $C(x) = \{y \cdot x \cdot g^{-1}, g \in G\}$  n'est pas fermée. Si  $G$  n'a pas de facteur compact, on peut trouver  $x \in \Gamma - \{e\}$  tel que  $e$  soit contenu dans l'adhérence  $\overline{C(x)}$  de  $C(x)$ .

Il est élémentaire que si  $L$  est un groupe localement compact et  $H$  un sous-groupe discret tel que  $L/H$  soit compact, alors les classes de conjugaison dans  $L$  des éléments de  $H$  sont fermées (voir p. ex. [2, § 11.2]). Le théorème 2 fournit donc une réciproque (lorsque  $m(G/\Gamma) < \infty$ ).

Supposons  $G$  linéaire. Il est alors d'indice fini dans le groupe des points réels d'un groupe algébrique sur  $\underline{\mathbb{R}}$ . On sait que  $C(g)$  est fermée (resp. admet  $e$  comme point d'accumulation) si et seulement si  $g$  est semi-simple (resp. unipotent, i.e.  $g^{-1}$  est nilpotent). Le théorème 2 entraîne donc le :

COROLLAIRE.- Soit  $\Gamma$  comme dans le Théor. 2 et supposons  $G$  linéaire. Alors  $\Gamma$  possède un élément  $x \neq e$  non semi-simple (resp. unipotent si  $G$  est sans facteur compact).

Ce corollaire, classique pour les groupes fuchsien, avait été conjecturé en général par A. Selberg. Il était connu dans plusieurs cas particuliers, notamment si  $\Gamma$  est arithmétique (conjecture de Godement, cf. [2, § 11]), si  $G$  est produit de groupes  $\underline{\underline{SL}}(2, \underline{\mathbb{R}})$  et  $\underline{\underline{SL}}(2, \underline{\mathbb{C}})$  (Selberg). On savait aussi que si  $G$  est simple, de rang réel 1, alors  $\Gamma$  a un élément non semi-simple (Garland, Selberg).

Fixons un  $ds^2$  riemannien invariant à droite sur  $G$ , et soit  $d(, )$  la distance associée. Elle est invariante à droite, et fait de  $G$  un espace métrique complet (puisque le  $ds^2$  est complet,  $G$  étant riemannien homogène). On posera

$$|x| = d(e, x) \quad , \quad D_r = \{g \in G \mid |g| < r\} \quad , \quad (x \in G ; r > 0) .$$

Comme la métrique  $d$  est complète,  $D_r$  est relativement compact.  $d$  étant symétrique, invariante à droite, on a

$$(1) \quad |x| = |x^{-1}| \quad , \quad d(x, y) = |x \cdot y^{-1}| \quad (x, y \in G) .$$

De  $|x| = d(xy^{-1}, y^{-1})$ , on tire aussi

$$(2) \quad |x| \leq |y| + d(x, y) \quad , \quad |x| \leq |y| + |y \cdot x| \quad , \quad (x, y \in G) .$$

THÉORÈME A.— Supposons  $G$  sans facteur compact. Il existe un voisinage  $V$  de  $e$  dans  $G$  , et des constantes  $b > 0$  ,  $c > 1$  . (dépendant de  $G$  ) ayant la propriété suivante : si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $G$  , alors on peut trouver  $g \in D_b$  tel que

$$|g \cdot x \cdot g^{-1}| \geq c|x| , \quad (x \in \Gamma \cap V) .$$

Les théor. 1 et 2 se déduisent par des raisonnements essentiellement élémentaires, mais extrêmement ingénieux, du Théor. A, qui est donc en fait le résultat central de [6]. Ce dernier sera établi au § 4, les §§ 2, 3 étant consacrés à la démonstration des Théor. 1 et 2 à partir du Théorème A. Bien qu'il s'agisse d'un rapport sur un article publié, on a donné des démonstrations complètes. Suivant l'exemple de [3], on renvoie au Mémoire original le lecteur qui préfère un exposé plus bref, non alourdi de détails techniques.

Notations. Outre celles introduites plus haut, on utilisera les suivantes :

Si  $g \in G$  et  $A \subset G$  , on écrira quelquefois  ${}^g A$  pour  $g \cdot A \cdot g^{-1}$  .

Si  $G$  est sans facteur compact, et  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $G$  , un élément  $g \in D_b$  qui vérifie la condition du Théor. A pour  $\Gamma$  sera dit être adapté à  $\Gamma$  .

Enfin, l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie  $G$  ,  $H$  ,  $P$  , ... est notée par la minuscule soulignée correspondante  $\underline{g}$  ,  $\underline{h}$  ,  $\underline{p}$  , ... .

§ 2. Démonstration du Théorème 1.

Dans ce paragraphe et le suivant, on admet le Théor. A. Si  $G$  est sans facteur compact, on choisit  $a$  ( $0 < a \leq 1$ ) tel que

$$(1) \quad g^{-1} \cdot D_a \cdot g \subset V, \quad (g \in D_b).$$

Pour la commodité des références, on met en lemme le point essentiel de la démonstration du Théor. 1.

2.1. LEMME.— Supposons  $G$  sans facteur compact, et soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G$ . Soient  $n$  un entier  $\geq 1$  et  $g_i \in D_b$  ( $1 \leq i \leq n$ ) tels que  $g_1$  soit adapté à  $\Gamma = \Gamma_1$ , et  $g_i$  à  $\Gamma_i = g_{i-1} \cdot \Gamma_{i-1} \cdot g_{i-1}^{-1}$  ( $2 \leq i \leq n$ ). Soient  $x \in \Gamma$ ,  $h_i = g_i \cdot \dots \cdot g_1$  et  $x_i = h_i \cdot x \cdot h_i^{-1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Supposons  $x_n \in D_a$ . Alors  $x_i \in D_a$  et  $|x_i| \geq c|x_{i-1}|$ , ( $1 \leq i \leq n$ ;  $x_0 = x$ ). En particulier  $|x| \leq c^{-n} \cdot a$ .

Supposons  $x_i \in D_a$ . Alors, vu (1),

$$x_{i-1} = g_{i-1}^{-1} \cdot x_i \cdot g_{i-1} \in V \cap \Gamma_{i-1},$$

donc, puisque  $g_{i-1}$  est adapté à  $\Gamma_{i-1}$ ,  $|x_i| \geq c|x_{i-1}|$  et  $x_{i-1} \in D_a$ , ce qui établit notre assertion par récurrence descendante sur  $i$ .

2.2. Démonstration du Théor. 1. Supposons tout d'abord  $G$  sans facteur compact, et montrons que  $W = D_a$  vérifie le théorème. Soit  $q$  le minimum de  $|x|$  sur  $\Gamma - \{e\}$ , et soit  $n \geq 1$  tel que  $c^n \cdot q > a$ . D'après le Théor. A, on peut trouver une suite d'éléments  $g_i \in D_b$  ( $1 \leq i \leq n$ ) tels que  $g_1$  soit adapté à  $\Gamma = \Gamma_1$  et  $g_i$  à  $\Gamma_i = g_{i-1} \cdot \Gamma_{i-1} \cdot g_{i-1}^{-1}$  ( $i \geq 2$ ). Posons  $h_n = g_n \cdot \dots \cdot g_1$ . Soit  $x \in \Gamma$ . Alors, si  $h_n \cdot x \cdot h_n^{-1} \in W$ , le lemme 2.1 montre que

$$|x| \leq c^{-n} \cdot a < q,$$

donc  $x = e$ , et ainsi  $\Gamma$  possède un conjugué,  $\Gamma_n$ , dont l'intersection avec  $W$  est réduite à  $\{e\}$ .

Dans le cas général, soient  $Z$  le centre de  $G$ ,  $N$  le plus grand facteur compact de  $G$  et  $\pi : G \rightarrow G/N = G'$  la projection canonique. Alors  $G'$  est sans facteur compact. Soit  $W$  un voisinage de  $e$  dans  $G$  tel que  $W \cap Z = \{e\}$  et que  $\pi(W)$  vérifie le Théor. 1 pour  $G'$ . Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G$  tel que  $\Gamma \cap N \subset Z$ . Comme  $N$  est compact  $\Gamma' = \pi(\Gamma)$  est discret et il existe donc  $g \in G$  tel que  $\pi(g)\Gamma' \cap \pi(W) = \{e\}$ . On a alors  ${}^g\Gamma \cap W \subset N$ ; mais, comme  $\Gamma \cap N \subset Z$ , et  $N$  est distingué dans  $G$ , on a  ${}^g\Gamma \cap N = {}^g(\Gamma \cap N) \subset Z$ , donc  ${}^g\Gamma \cap W \subset Z \cap W = \{e\}$ .

### § 3. Démonstration du Théorème 2.

3.1. LEMME.- Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G$  tel que  $G/\Gamma$  soit non compact, de mesure  $m(G/\Gamma)$  finie, et soit  $\epsilon > 0$ . Alors il existe  $x \in \Gamma$ ,  $x \neq e$ , et  $g \in G$  tels que  $|{}^g x| \leq \epsilon$ .

Soit  $\pi : G \rightarrow G/\Gamma$  la projection canonique. La métrique  $d$  définit sur  $G/\Gamma$  une métrique  $\bar{d}$  caractérisée par

$$\bar{d}(\pi(u), \pi(v)) = \min_{x \in \Gamma} d(u, v \cdot x) \quad (u, v \in G).$$

L'espace  $G/\Gamma$  étant non compact, de mesure finie, on peut trouver  $r > 0$  et

$g_0 \in G$  tels que

$$(1) \quad m(G/\Gamma - \pi(D_r)) < m(D_{\epsilon/2}), \quad \bar{d}(\pi(e), \pi(g_0)) > r + \epsilon.$$

Vu (2) du § 1, on a alors

$$(2) \quad \pi(D_{\epsilon/2} \cdot g_0) \cap \pi(D_r) = \emptyset,$$

d'où

$$m(\pi(D_{\epsilon/2} \cdot g_0)) < m(G/\Gamma - \pi(D_r)) < m(D_{\epsilon/2}) = m(D_{\epsilon/2} \cdot g_0) ,$$

ce qui prouve que  $\pi$  n'est pas injective sur  $D_{\epsilon/2} \cdot g_0$ . Soient donc  $u \in D_{\epsilon/2}$  et  $x \in \Gamma - \{e\}$  tels que  $u \cdot g_0 \cdot x \in D_{\epsilon/2} \cdot g_0$ . On a alors  $d(u \cdot g_0, u \cdot g_0 \cdot x) \leq \epsilon$ , donc  $|u \cdot g_0 \cdot x \cdot (u \cdot g_0)^{-1}| \leq \epsilon$ .

3.2. Dans la suite de ce paragraphe,  $C$  désigne une constante  $\geq c$  telle que

$$(3) \quad |g_x| \leq C \cdot |x| , \quad (g \in D_b ; x \in D_a) .$$

[L'existence de  $C$  résulte du fait que  $|\cdot|$  est associée à une métrique riemannienne, cf. 4.1.]

Supposons  $G$  sans facteur compact. On fixe un voisinage symétrique  $W_0$  de  $e$  tel que  $W_0 \cdot W_0 \subset D_a$ , et  $r > 0$  tel que

$$(4) \quad m(G/\Gamma - \pi(D_r)) < m(W_0) .$$

Soit

$$S = \{x \in \Gamma \mid D_{r+a+C} \cdot x \cap D_{r+a+C} \neq \emptyset\} .$$

Nous voulons montrer que  $S$  contient un élément  $s \neq e$  tel que  $e \in \overline{C(s)}$ , ce qui établira le Théor. 2 lorsque  $G$  est sans facteur compact. Comme  $S$  est fini (car  $D_{r+a+C}$  est relativement compact), il suffira pour cela de prouver :

(\*) Soit  $\epsilon > 0$ . Alors il existe  $s \in S - \{e\}$  et  $g \in G$  tels que  $|g_s| \leq \epsilon$ .

On suppose  $\epsilon \leq a$ . On fixe un entier  $n \geq 1$  et un nombre réel  $d$  tels que

$$(5) \quad c^n \cdot \epsilon \geq a , \quad 0 < d < (c/C)^n \cdot C^{-1} \cdot \epsilon \leq \epsilon .$$

(Rappelons que  $C \geq c > 1$ .) D'après 3.1, il existe  $g_0 \in G$  et  $x_0 \in \Gamma - \{e\}$

tels que

$$(6) \quad |g_0 \cdot x_0 \cdot g_0^{-1}| < d .$$



A l'aide du Théor. A, on peut trouver  $g_1 \in D_b$  adapté à  $\Gamma_1 = g_0 \cdot \Gamma \cdot g_0^{-1}$ , puis  $g_i$  adapté à  $\Gamma_i = g_{i-1} \cdot \Gamma_{i-1} \cdot g_{i-1}^{-1}$ , ( $i = 2, 3, \dots$ ). Vu (5), (6) on a  $\Gamma_1 \cap D_a \neq \{e\}$ . Comme on l'a vu en démontrant le Théor. 1, 2.1 entraîne alors l'existence de  $m \geq 1$  tel que

$$(7) \quad \Gamma_m \cap D_a \neq \{e\}, \quad \Gamma_{m+1} \cap D_a = \{e\}.$$

Posons encore  $h_i = g_i \cdot \dots \cdot g_0$  ( $0 \leq i \leq m+1$ ).

LEMME.- On conserve les notations et hypothèses précédentes. Alors

$\pi(D_a \cdot h_{m+1}) \cap \pi(D_r) \neq \emptyset$ . Si  $y \in \Gamma - \{e\}$  est tel que  $h_m \cdot y \cdot h_m^{-1} \in D_a$ , alors  $|g_0 \cdot y \cdot g_0^{-1}| \leq \epsilon$ .

Admettons provisoirement ce lemme. Il existe alors  $x \in \Gamma - \{e\}$  et  $u \in D_a$  tels que  $u \cdot h_{m+1} \cdot x \in D_r$ . Vu (2) du § 1, on a

$$(8) \quad \begin{aligned} |h_{m+1} \cdot x| &\leq |u \cdot h_{m+1} \cdot x| + |u|, \\ |h_{m+1} \cdot x| &\leq r + a. \end{aligned}$$

Soit  $y \in \Gamma - \{e\}$  tel que  $h_m \cdot y \cdot h_m^{-1} \in D_a$ . On a, vu (3),

$$d(h_{m+1} \cdot y \cdot x, h_{m+1} \cdot x) = d(h_{m+1} \cdot y, h_{m+1}) = |h_{m+1} \cdot y \cdot h_{m+1}^{-1}| \leq C \cdot |h_m \cdot y \cdot h_m^{-1}|.$$

Comme  $h_m \cdot y \cdot h_m^{-1} \in D_a$  et  $a \leq 1$ , le dernier terme est  $\leq C$ . Vu (8), et (2) du § 1, cela donne

$$(9) \quad |h_{m+1} \cdot y \cdot x| \leq C + r + a.$$

On a par suite

$$h_{m+1} \cdot y \cdot x = h_{m+1} \cdot x \cdot x^{-1} \cdot y \cdot x \in D_{r+a+C} \cap D_{r+a} \cdot x^{-1} \cdot y \cdot x,$$

d'où  $x^{-1} \cdot y \cdot x \in S - \{e\}$ . Mais  $C(x^{-1} \cdot y \cdot x) = C(y)$ , donc (\*) résulte de la deuxième assertion du lemme.

3.3. Démontrons maintenant le lemme de 3.2. Comme  $h_{m+1} \cdot \Gamma \cdot h_{m+1}^{-1} \cap D_a = \{e\}$  (cf. (7)), la projection  $\pi$  est injective sur  $W_0 \cdot h_{m+1}$ . On a alors, vu (4)

$$m(\pi(W_0 \cdot h_{m+1})) = m(W_0 \cdot h_{m+1}) = m(W_0) > m(G/\Gamma - \pi(D_r)) ,$$

d'où  $\pi(W_0 \cdot h_{m+1}) \cap \pi(D_r) \neq \emptyset$ , et la première assertion du lemme, puisque  $W_0 \subset D_a$ .

Soit  $y \in \Gamma - \{e\}$  tel que  $|h_m \cdot y \cdot h_m^{-1}| < a$ . D'après 2.1, on a

$$|g_0 \cdot y \cdot g_0^{-1}| < c^{-m} \cdot a ,$$

donc, si  $m \geq n$ , on a, vu (5) et  $c > 1$  :

$$|g_0 \cdot y \cdot g_0^{-1}| < c^{-n} \leq \epsilon .$$

Il reste à considérer le cas où  $n > m$ . Soit  $m'$  le plus grand entier  $\leq m$  tel que

$$h_{m'+1} \cdot x_0 \cdot h_{m'+1}^{-1} \notin D_a , \quad h_j \cdot x_0 \cdot h_j^{-1} \in D_a , \quad (0 \leq j \leq m') .$$

On a alors, vu (3),

$$a \leq |h_{m'+1} \cdot x_0 \cdot h_{m'+1}^{-1}| \leq c^{m'+1} \cdot |g_0 \cdot x_0 \cdot g_0^{-1}| .$$

D'autre part, 2.1 donne

$$|g_0 \cdot y \cdot g_0^{-1}| \leq c^{-m'} |h_{m'} \cdot y \cdot h_{m'}^{-1}| \leq c^{-m'} \cdot a .$$

Par conséquent, vu (5), (6)

$$|g_0 \cdot y \cdot g_0^{-1}| \leq c^{-m'} \cdot c^{m'+1} |g_0 \cdot x_0 \cdot g_0^{-1}| \leq (c/C)^{-m'+n} \cdot \epsilon .$$

Comme  $m' \leq m < n$  et  $c/C \leq 1$ , cela entraîne  $|g_0 \cdot y \cdot g_0^{-1}| \leq \epsilon$ , et termine la démonstration du lemme, et par conséquent du Théor. 2, lorsque  $G$  est sans facteur compact.

3.4. Soient  $N$  le plus grand facteur compact de  $G$  et  $\pi : G \rightarrow G' = G/N$  la projection canonique. Comme  $N$  est compact, le groupe  $N \cdot \Gamma$  est fermé dans  $G$ , l'application  $\pi$  est propre, et  $\pi(\Gamma) = \Gamma'$  est discret dans  $G'$ . Le quotient  $G/\Gamma$  est fibré, de fibre type  $N/N \cap \Gamma$  compacte, base  $G/N \cdot \Gamma$ , donc  $G/N \cdot \Gamma$  est

non-compact, de mesure invariante finie. Comme  $G'/\Gamma' \cong G/N.\Gamma$ , il en est de même pour  $G'/\Gamma'$ . Le groupe  $G'$  étant sans facteur compact, il existe d'après ce qui précède  $x \in \Gamma - \{e\}$  tel que  $C(\pi(x))$  ne soit pas fermée dans  $G'$ . Comme  $C(\pi(x)) = \pi(C(x))$  et que  $\pi$  est propre, il s'ensuit que  $C(x)$  n'est pas fermée dans  $G$ .

#### § 4. Démonstration du Théorème A.

4.1. Soit  $U$  un voisinage ouvert relativement compact de  $e$  dans  $G$  admettant des coordonnées canoniques  $(x_i)$ . Cela signifie qu'il existe un voisinage  $U_0$  de  $0$  dans  $\underline{g}$  tel que l'application exponentielle  $\exp : \underline{g} \rightarrow G$  soit un difféomorphisme de  $U_0$  sur  $U$ , et que  $(x_i)$  est transporté par l'exponentielle d'un système de coordonnées sur  $\underline{g}$ .

On fixe une norme euclidienne  $|\cdot|$  sur  $\underline{g}$ , et on note de la même manière le transporté de  $|\cdot|$  à  $U$  par l'exponentielle. Comme  $|\cdot|$  est associée à une métrique riemannienne, on voit facilement qu'il existe des constantes  $d, d' > 0$  telles que

$$(1) \quad d \cdot |x|_0 \leq |x| \leq d' \cdot |x|_0, \quad (x \in U).$$

L'existence de la constante  $C$  de 3.2 (3) s'en déduit immédiatement. En effet, soit  $a'$  tel que  $\mathfrak{g}_{D_a'} \subset U$  pour  $g \in D_b$  ( $0 < a' \leq a$ ). Alors, si  $a' \leq |x| \leq |a|$ , l'existence de  $C$  est évidente par compacité et continuité, et si  $|x| \leq a'$ , elle résulte de (1) et du fait que  $x \mapsto \mathfrak{g}_x$  est linéaire en coordonnées canoniques.

4.2. On sait que si  $U$  est suffisamment petit, alors  $\Gamma \cap U$  est contenu dans un sous-groupe analytique nilpotent de  $G$  quel que soit le sous-groupe discret  $\Gamma$

de  $G$  (cf. [9], et, pour des résultats plus précis, [8]). Rappelons-en brièvement une démonstration : d'après la formule de Campbell-Hausdorff, on a, pour  $t \in \underline{\mathbb{R}}$  suffisamment petit

$\log(\exp t.x, \exp t.y) = t^2.[x,y] + \text{termes d'ordre } \geq 3$ , ( $x, y \in \underline{\mathfrak{g}}$ ),  
où  $(u,v) = u.v.u^{-1}.v^{-1}$ , ( $u, v \in G$ ). Il s'ensuit que, pour  $U$  convenable, on a

$$|(u,v)|_0 < \min(|u|_0, |v|_0) \quad (u, v \in U - \{e\}).$$

Si maintenant  $\Gamma$  est un sous-groupe discret, on peut écrire

$$\Gamma \cap U = \{e, a_1, \dots, a_m\}, \quad (|a_1|_0 \leq |a_2|_0 \leq \dots \leq |a_m|_0),$$

et l'on déduit de l'inégalité précédente que les groupes à un paramètre  $\exp(\underline{\mathbb{R}} \log a_i)$ , ( $1 \leq i \leq m$ ) engendrent un groupe analytique nilpotent.

Cela montre que le Théorème A est conséquence du

**THÉORÈME B.-** Supposons  $G$  sans facteur compact. Il existe un voisinage  $V$  de  $e$  dans  $U$ , et des constantes  $b > 0$ ,  $c > 1$  (dépendant de  $G$ ) ayant la propriété suivante : si  $N$  est un sous-groupe analytique nilpotent de  $G$ , alors il existe  $g \in D_b$  tel que  $|g^x| \geq c|x|$  quel que soit  $x \in N \cap V$ .

**4.3.** Soient  $R_p$  l'ensemble des sous-groupes analytiques nilpotents de dimension  $p$  de  $G$  et  $LR_p$  celui de leurs algèbres de Lie. Il est immédiat que  $LR_p$  est fermé dans la grassmannienne des  $p$ -plans de  $\underline{\mathfrak{g}}$ , donc  $LR_p$ , muni de la topologie induite, est compact.

Pour tout sous-groupe analytique  $H$  de  $G$ , posons  $H_0 = \exp(\underline{h} \cap U_0)$ , où  $U_0 = \log U$ . C'est un voisinage de  $e$  dans  $H$  pour sa topologie de groupe de Lie. (Rappelons que si  $H$  est fermé, cette dernière est la topologie induite par celle de  $G$ .)

Soit  $N$  un sous-groupe analytique nilpotent. Soient  $U' \subset U$  un voisinage de  $e$ , et  $r > 0$  assez petit pour que la boule fermée  $\{|x| \leq r\}$  soit contenue dans  $U'$ . Notons  $S_r$  la sphère  $\{|x| = r\}$  de rayon  $r$ ,  $A$  un voisinage ouvert de  $N_0 \cap S_r$  dans  $S_r$ , et  $A'$  le cône de sommet  $e$ , et base  $A$ . Il est clair qu'il existe un voisinage  $C$  de  $\underline{n}$  dans  $LR_p$  tel que si  $\underline{m} \in C$ , et si  $M$  est le groupe analytique correspondant, alors  $M_0 \cap A$  est un voisinage de  $e$  dans  $M_0$ . Comme l'adhérence d'un sous-groupe analytique nilpotent est un groupe nilpotent, on voit, par compacité, que, étant donné  $N$ , il suffit d'exhiber  $U'$ ,  $A'$ ,  $c_N > 1$  et  $g \in G$  tels que

$$(1) \quad |{}^g x| \geq c_N \cdot |x|, \quad (x \in A').$$

4.4. LEMME.— Soit  $\underline{n}$  une sous-algèbre de Lie nilpotente de  $\underline{g}$  et soit  $c'$  une constante  $> 0$ . Alors il existe  $g \in G$  tel que

$$|\text{Ad } g(x)|_0 \geq c' |x|_0, \quad (x \in \underline{n}).$$

Montrons tout d'abord que si  $c' > 2 \cdot d'/d$  (où  $d, d'$  sont comme dans 4.1 (1)), alors 4.4 entraîne la dernière assertion de 4.3. Soit  $r > 0$  tel que

$\text{Ad } g(x) \in U_0$  si  $|x| \leq r$ . Il existe alors, par continuité, un voisinage  $A$  de  $N_0 \cap S_r$  dans  $S_r$  tel que

$$(2) \quad {}^g x \in U, \quad |{}^g x|_0 \geq (c'/2) \cdot |x|_0, \quad (x \in A).$$

Comme  $|\cdot|_0$  provient d'une métrique euclidienne en coordonnées canoniques, (2) reste vraie, par homogénéité, si  $x$  parcourt le cône  $A'$  de sommet  $e$  et base  $A$ . Mais, d'après 4.1 (1), on a alors

$$|{}^g x| \geq d \cdot |{}^g x|_0 \geq (c' \cdot d/2) \cdot |x|_0 \geq (c' \cdot d/2 \cdot d') \cdot |x|, \quad (x \in A'),$$

ce qui donne bien 4.3 (1) si  $c' > 2 \cdot d' \cdot d^{-1}$ .

4.5. Il reste à démontrer 4.4. Il est clair que l'on peut remplacer  $G$  par un groupe localement isomorphe, par exemple par son groupe adjoint  $\text{Ad}G$ , ce qui permet de supposer que  $G$  est la composante connexe de  $e$  dans le groupe des points réels d'un groupe algébrique  $G_{\mathbb{C}}$  défini sur  $\mathbb{R}$ , et a un centre réduit à  $\{e\}$ . Une partie (resp. un sous-groupe) de  $G$  sera dite (resp. dit) algébrique si c'est l'intersection de  $G$  avec une partie (resp. un sous-groupe) algébrique de  $G_{\mathbb{C}}$ . Pour les propriétés des groupes algébriques (resp. semi-simples réels) utilisées ci-dessous, voir par exemple [1] (resp. [5]).

La plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\mathfrak{n}$  est aussi nilpotente, donc, quitte à agrandir  $\mathfrak{n}$ , on peut supposer  $\mathfrak{n}$  algébrique. Soit  $N$  le sous-groupe algébrique correspondant de  $G$ . On a  $N = S \times N_u$ , où  $S$  est un tore algébrique (ou, plus précisément, l'intersection de  $G$  avec un tore algébrique de  $G_{\mathbb{C}}$ ) et  $N_u$  est unipotent.

Soit  $G = K.A.U$  une décomposition d'Iwasawa de  $G$  ( $K$  sous-groupe compact maximal,  $U$  sous-groupe unipotent maximal,  $A$  sous-groupe diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  connexe maximal normalisant  $U$ ). Soient  $P = M.A.U$  le normalisateur de  $U$  ( $M = P \cap K$ ). C'est donc un  $\mathbb{R}$ -sous-groupe parabolique minimal, et  $M.A$  est le centralisateur  $Z(A)$  de  $A$ . Soit  $P^- = Z(A).U^-$  le sous-groupe parabolique opposé à  $P$  contenant  $Z(A)$ . ( $U^- \cap U = \{e\}$ .) Nous voulons montrer tout d'abord

(\*) Il existe  $h \in G$  tel que  $\text{Ad}h(\underline{p}) \cap \mathfrak{n} = 0$ .

Si  $h \in G$ ,  ${}^hP \cap N$  est un sous-groupe algébrique de  $N$ , donc sa composante neutre est produit de ses intersections avec  $S$  et  $N_u$ , la première étant un tore. Il suffit donc d'exhiber  $h \in G$  tel que

$$\text{Ad}h(\underline{p}) \cap \mathfrak{s} = \text{Ad}h(\underline{p}) \cap \mathfrak{n}_u = 0.$$

Comme un ensemble algébrique propre de  $G$  est sans point intérieur, l'existence de  $h$  résulte (par Baire) des trois faits suivants :

- (i) l'ensemble  $L$  des  $h \in G$  tels que  ${}^h P \cap N_u = \{e\}$  contient un ouvert dense ;
- (ii) si  $S'$  est un sous-tore de  $S$ , l'ensemble  $Q(S')$  des  $h \in G$  tels que  $\text{Ad } h(\underline{p}) \supset \underline{s}'$  est contenu dans un sous-ensemble algébrique propre.;
- (iii) l'ensemble des sous-tores de  $S$  est dénombrable.

Démontrons ces trois assertions :

(i) il existe  $a \in G$  tel que  ${}^a U \supset N_u$ , donc  $L$  contient les éléments  $x.a$ , où  $x$  est tel que  ${}^{xa} P$  soit opposé à  ${}^a P$ , donc contient un ouvert de Zariski non vide de  $G$ .

(ii) l'ensemble  $Q'$  des sous-espaces de dimension  $p = \dim P$  de  $\underline{g}_C = \underline{g} \otimes_{\underline{R}} \underline{C}$  qui contiennent  $\underline{s}'$  est algébrique dans la grassmannienne  $G_p(\underline{g}_C)$  des sous-espaces vectoriels de dimension  $p$  de  $\underline{g}_C$ . L'application  $s : h \mapsto \text{Ad } h(\underline{p})$  est un morphisme de variétés algébriques de  $G_C$  dans  $G_p(\underline{g}_C)$ , donc  $Q(S')$  est contenu dans  $s^{-1}(Q') \cap G$ , qui est algébrique. D'autre part, l'intersection des sous-groupes  ${}^h P$  ( $h \in G$ ) est contenue dans  $M.A$ . Sa composante connexe de  $e$  est un sous-groupe distingué, donc semi-simple, donc contenu dans  $M$ , donc réduit à  $\{e\}$  puisque  $G$  est sans facteur compact, d'où  $s^{-1}(Q') \cap G \neq G$ .

(iii) les sous-tores de  $S$  correspondent biunivoquement aux sous-groupes facteurs directs d'un groupe abélien libre de rang égal à  $\dim S$  (le groupe des caractères rationnels de  $S$ ).

On peut donc supposer que  $\underline{p} \cap \underline{n} = (0)$ . On munit le système  $\{\alpha\}$  des racines

de  $G$  par rapport à  $A$  d'un ordre associé à  $P$ . On a donc

$$\underline{g} = \underline{u}^- \oplus \underline{p}, \quad \underline{u}^- = \bigoplus_{\alpha < 0} \underline{g}_\alpha, \quad \underline{g}_\alpha = \{x \in \underline{g} \mid \text{Ad } a(x) = \alpha(a).x, (a \in A)\}.$$

Soit  $x \in \underline{n}$ . Il s'écrit de manière unique

$$x = \sum_{\alpha < 0} x_\alpha + z_x \quad (x_\alpha \in \underline{g}_\alpha; z_x \in \underline{p}).$$

Comme  $\underline{n} \cap \underline{p} = (0)$ , il existe une constante  $r > 0$  telle que

$$\left| \sum_{\alpha < 0} x_\alpha \right|_0 \geq r \cdot |x|_0, \quad (x \in \underline{n}).$$

Soit  $h \in A$ . On a

$$\text{Adh}(x) = \sum_{\alpha < 0} \alpha(h).x_\alpha + \text{Adh}(z_x), \quad \text{Adh}(z_x) \in \underline{p}, \quad (x \in \underline{n}).$$

Soit  $q > 0$ . On peut trouver  $h \in A$  tel que  $\alpha(h) > q$  pour tout  $\alpha < 0$ . En supposant, ce qui est loisible, les  $\underline{g}_\alpha$  ( $\alpha < 0$ ) et  $\underline{p}$  mutuellement orthogonaux, on obtient

$$|\text{Adh}(x)|_0^2 \geq q^2 \cdot \sum_{\alpha < 0} |x_\alpha|_0^2 = q^2 \cdot \left| \sum_{\alpha < 0} x_\alpha \right|_0^2 \geq q^2 \cdot r^2 \cdot |x|_0^2,$$

ce qui démontre le lemme, si l'on choisit  $q > r^{-1}.c'$ .

### § 5. Groupes de rang réel un.

Dans ce paragraphe, on décrit brièvement des résultats de H. Garland et M. S. Raghunathan [4], qui ont leur point de départ dans le cor. au Théor. 2, et, entre autres choses, le renforcent considérablement dans un cas particulier. Dans ce paragraphe,  $G$  est simple, linéaire, de rang réel égal à un (i.e. le  $A$  de la décomposition d'Iwasawa  $G = K.A.U$  de 4.5 est de dimension un), et  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $G$  tel que  $m(G/\Gamma) < \infty$ . Bien que  $\Gamma$  ne soit pas nécessairement définissable arithmétiquement (Makarov, Vinberg), [4] montre que  $\Gamma$  a plusieurs propriétés importantes en commun avec les sous-groupes de ce type de  $G$ . On suppose  $G/\Gamma$  non compact (sinon ce qui suit est évident, ou connu ou



trivialement faux).

Soit  $\alpha$  la racine simple de  $G$  par rapport à  $A$ , positive pour l'ordre associé à  $U$ , et, pour  $t > 0$ , soit  $A_t = \{a \in A \mid \alpha(a) \leq t\}$ . Un ensemble de Siegel  $\underline{S}_{t,\eta}$  de  $G$  (par rapport à  $K, A, U$ ) est un ensemble de la forme

$$\underline{S}_{t,\eta} = K.A_t.\eta, \quad (\eta \text{ voisinage relativement compact de } e \text{ dans } U).$$

Le résultat principal de [4] affirme que l'on peut trouver  $\underline{S} = \underline{S}_{t,\eta}$  et une partie finie non vide  $C$  de  $G$  ayant les propriétés suivantes :

(i)  ${}^cU / ({}^cU \cap \Gamma)$  est compact pour tout  $c \in C^{-1}$  ;

(ii)  $G = \underline{S}.C.\Gamma$  ;

(iii)  $\{x \in \Gamma \mid \underline{S}.C.x \cap \underline{S}.C \neq \emptyset\}$  est fini ;

(iv) pour  $t'$  suffisamment grand :

$$\underline{S}_{t',\eta}.c.x \cap \underline{S}_{t,\eta}.c' \neq \emptyset, \quad (c, c' \in C ; x \in \Gamma),$$

entraîne  $c = c'$  et  $c.x.c^{-1} \in Z(A).U$ .

De plus,  $\Gamma$  est de présentation finie,  $G/\Gamma$  est difféomorphe à l'intérieur d'une variété à bord compacte et, si  $G$  n'est pas localement isomorphe à  $\underline{\underline{SL}}(2, \underline{\underline{R}})$  ou  $\underline{\underline{SL}}(2, \underline{\underline{C}})$ , alors  $\Gamma$  est rigide (i.e.  $H^1(\Gamma, \text{Ad}) = 0$ ).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BOREL - Linear algebraic groups, Mathematical Lecture Notes Series, Benjamin, New York (1969).
- [2] A. BOREL and HARISH-CHANDRA - Arithmetic subgroups of algebraic groups, Annals of Math. (2) 75 (1962), 485-535.
- [3] C. DELAROCHE et A. KIRILLOV - Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés (d'après D. A. Kajdan), Sémin. Bourbaki, 20e année, 1967/68, Exp. 343.
- [4] H. GARLAND and M. S. RAGHUNATHAN - Fundamental domains for lattices in rank one semi-simple Lie groups (à paraître).
- [5] S. HELGASON - Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press, New York (1962).
- [6] D. A. KAJDAN et G. A. MARGOULIS - Démonstration d'une conjecture de Selberg, Math. Sbornik N. S. 75 (1968), 163-168 (en russe).
- [7] C. L. SIEGEL - Some remarks on discontinuous groups, Annals of Math. (2) 46 (1945), 124-132. Gesammelte Abhandlungen, Bd III, 67-77.
- [8] H. C. WANG - On discrete nilpotent subgroups of Lie groups (à paraître).
- [9] H. ZASSENHAUS - Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen, Abh. math. Sem. Hamburg 19 (1938), 289-312.