

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-LOUIS KRIVINE

## **Théorèmes de consistance en théorie de la mesure de R. Solovay**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1971, exp. n° 357, p. 187-197

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1968-1969\\_\\_11\\_\\_187\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1968-1969__11__187_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## THÉORÈMES DE CONSISTANCE EN THÉORIE DE LA MESURE DE R. SOLOVAY

par Jean-Louis KRIVINE

- ZF désigne la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (sans axiome du choix).
- AC désigne l'axiome du choix.
- DC désigne l'axiome du choix dépendant : si  $r$  est une relation binaire sur  $a$  ( $r \subset a \times a$ ) telle que  $(\forall x \in a) (\exists y \in a) ((x,y) \in r)$ , alors, quel que soit  $x_0 \in a$ , il existe une suite  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  d'éléments de  $a$  telle que  $(x_i, x_{i+1}) \in r$  pour  $i = 0, 1, 2, \dots$ .

Cet axiome est strictement plus faible que l'axiome du choix, mais strictement plus fort que l'axiome du choix dénombrable (le produit d'une famille dénombrable d'ensembles non vides est non vide).

- CI désigne l'axiome : il existe un cardinal inaccessible (c'est-à-dire un cardinal  $K$  tel que : pour tout cardinal  $\alpha < K$  on a  $2^\alpha < K$ , et pour toute famille  $(\alpha_i)_{i \in I}$  de cardinaux  $< K$ , indexée par un cardinal  $I < K$  on a  $\sup_{i \in I} \alpha_i < K$ ).

Solovay a montré le théorème suivant :

THÉORÈME 1.- Si la théorie ZF + AC + CI est non-contradictoire, alors la théorie suivante est non-contradictoire également :

ZF + DC + "tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  est mesurable pour la mesure de Lebesgue".

Noter que ce dernier axiome implique, comme il est facile de le voir, que tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  est universellement mesurable.

Le théorème 1 est obtenu au moyen du :

THÉORÈME 2.- Si la théorie ZF + AC + CI est non-contradictoire, alors la théorie suivante est non-contradictoire :

ZF + AC + "tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  définissable en termes d'ordinaux et de réels est mesurable pour la mesure de Lebesgue".

On dit qu'un ensemble  $a$  est définissable en termes d'ordinaux et de réels, si on a un énoncé  $\mathcal{E}(x, \alpha, r)$  à une variable libre  $x$ , écrit avec les symboles  $\exists$ ,  $\forall$ , ou, non,  $\in$ ,  $=$ , des variables  $x, y, z, \dots$ , un ordinal  $\alpha$ , un réel  $r$ , qui caractérise l'ensemble  $a$  (c'est-à-dire tel que l'énoncé  $\forall x [\mathcal{E}(x, \alpha, r) \Leftrightarrow x = a]$  soit vrai).

Le théorème 2 montre, en particulier, qu'on peut admettre sans contradiction, avec l'axiome du choix, l'axiome : "tout sous-ensemble projectif de  $\mathbb{R}$  est universellement mesurable" (car un ensemble projectif est défini en termes de réels). K. Gödel a montré inversement dans [1] qu'on peut aussi admettre sans contradiction, avec l'axiome du choix, l'axiome : "il existe un sous-ensemble non mesurable de  $\mathbb{R}$  qui est PCA (projection de complémentaire d'analytique)".

On passe du théorème 2 au théorème 1 au moyen du lemme suivant (dont la démonstration est simple et n'utilise pas la notion de forcing) :

LEMME 1.- Si  $\mathfrak{M}$  est un modèle de ZF + DC, la classe des objets de  $\mathfrak{M}$  héréditairement définissables en termes d'ordinaux et de réels est encore un modèle de ZF + DC.

La démonstration du théorème 2 est basée sur la théorie de Cohen dont nous allons rappeler les résultats essentiels (voir [2]).

La théorie de Cohen.

Un ensemble ordonné  $C$  est appelé ensemble de conditions de forcing s'il a la propriété suivante : quels que soient  $p, q \in C$ , si  $p \not\leq q$  il existe  $r \in C$ ,  $r \leq p$  tel que  $q$  et  $r$  n'aient pas de minorant commun dans  $C$ .

Les éléments de  $C$  sont appelés conditions de forcing (ou simplement conditions) ; si  $p \leq q$ , on dit que la condition  $p$  est plus forte que  $q$  ; deux conditions  $p, q$  sont dites compatibles si elles ont un minorant commun.

Une partie  $D$  de  $C$  est dite dense si, pour toute condition  $p$ , il existe une condition  $r \in D$  plus forte que  $p$ .

Considérons un ensemble  $M$  qui est un modèle de ZF (quand on le munit de la restriction à  $M$  de la relation  $\in$ ) et qui est transitif ( $a \in M$  et  $b \in a \Rightarrow b \in M$ ).

Soit  $C$  un ensemble de  $M$  qui est un ensemble de conditions de forcing ; désignons par  $\mathcal{P}_M(C)$  l'ensemble des parties de  $C$  qui sont dans  $M$  ( $\mathcal{P}_M(C) \subset \mathcal{P}(C)$ ).

Une partie  $G$  de  $C$  est dite  $M$ -générique sur  $C$  si elle satisfait les conditions :

- 1)  $p \in G, q \geq p \Rightarrow q \in G$ .
- 2) si  $p, q \in G$ , les conditions  $p, q$  sont compatibles.
- 3) si  $D \in \mathcal{P}_M(C)$  et si  $D$  est dense dans  $C$  alors  $G \cap D \neq \emptyset$ .

- Si  $G$  est  $M$ -générique sur  $C$  et est dans le modèle  $M$  ( $G \in \mathcal{P}_M(C)$ ), on montre aisément qu'il existe un élément minimal  $p$  de  $C$  tel que  $G = \{q \in C ; q \geq p\}$ . Donc, si  $C$  n'a pas d'élément minimal (ce qui est le

cas usuel), une partie  $G$  de  $C$  qui est  $M$ -générique, ne peut être dans le modèle  $M$ .

- Le lemme ci-dessous donne une condition suffisante pour l'existence de parties  $M$ -génériques de  $C$ .

LEMME 2.- Si l'ensemble des parties  $D$  denses de  $C$  qui sont dans  $M$  est dénombrable (en particulier si  $\mathcal{P}_M(C)$  est dénombrable), pour toute condition  $p$  il existe une partie  $G$  de  $C$  qui est  $M$ -générique et telle que  $p \in G$ .

Soit  $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$  la suite des parties denses de  $C$  qui sont dans  $M$ ; on définit par récurrence une suite décroissante  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $C$ :  $p_0 = p$ ;  $p_{n+1}$  est un élément de  $D_{n+1}$  qui minore  $p_n$  (il en existe car  $D_{n+1}$  est dense). On définit alors  $G = \{q \in C; \text{il existe un entier } n \geq 0 \text{ tel que } q \geq p_n\}$ .

Alors la condition 1 ci-dessus est évidemment satisfaite. Si  $q, q' \in G$ , on a  $q \geq p_n, q' \geq p_n$ , et, par exemple  $n \geq n'$ ; alors  $p_n$  est un minorant commun de  $q$  et  $q'$ . Enfin si  $D_n$  est une partie dense de  $C$  qui est dans  $M$  on a  $p_n \in D_n \cap G$ , donc  $D_n \cap G \neq \emptyset$ . C.Q.F.D.

La propriété essentielle des parties  $M$ -génériques de  $C$  s'exprime par le

THÉORÈME 3.- Si  $G$  est une partie  $M$ -générique de  $C$ , il existe un plus petit modèle transitif  $N$  de ZF qui contient  $M \cup \{G\}$ . Ce modèle, noté  $M[G]$ , a les mêmes ordinaux que  $M$ .

Notons de plus que  $M[G]$  satisfait l'axiome du choix, si  $M$  le satisfait.

- Etant donné un énoncé clos  $\mathcal{Z}(\Gamma)$  de théorie des ensembles, écrit avec un symbole de constante  $\Gamma$ , on dit que la condition  $p$  force  $\mathcal{Z}(\Gamma)$  (ce qu'on note  $p \Vdash \mathcal{Z}(\Gamma)$ ) si  $\mathcal{Z}(G)$  est vrai dans le modèle  $M[G]$  pour toute partie  $G$   $M$ -générique de  $C$  telle que  $p \in G$ .

Supposons, à partir de maintenant que l'hypothèse du lemme 2 est satisfaite (ce qui est le cas, par exemple, si le modèle  $M$  est dénombrable). On montre alors qu'on a les propriétés suivantes :

- Pour chaque énoncé clos  $\mathcal{Z}(\Gamma)$  écrit avec le symbole de constante  $\Gamma$ , l'ensemble des conditions  $p$  qui forcent  $\mathcal{Z}(\Gamma)$  est une partie de  $C$  qui est dans le modèle  $M$ .

- Si  $G$  est  $M$ -générique sur  $C$ , et si  $\mathcal{Z}(G)$  est vrai dans le modèle  $M[G]$ , il existe  $p \in G$  tel que  $p \Vdash \mathcal{Z}(\Gamma)$  (autrement dit  $\mathcal{Z}(G')$  est vrai dans  $M[G']$  pour toute partie  $G'$   $M$ -générique de  $C$  telle que  $p \in G'$ ).

### Destruction des cardinaux.

Considérons un modèle transitif dénombrable  $M$  de  $ZF + AC$ . Soit  $K$  un cardinal de  $M$ ,  $K \neq \aleph_0$ ; on prend comme conditions de forcing les applications définies sur une partie finie de  $\mathbb{N}$ , à valeurs dans  $K$ . Si  $p, q$  sont deux telles applications, on pose  $p \leq q$  si et seulement si  $p$  est un prolongement de  $q$ .

Soit  $G$  une partie de cet ensemble  $C$  de conditions de forcing qui est  $M$ -générique. On lui associe une application  $g : \mathbb{N} \rightarrow K$  en posant  $g(n) = \alpha$  si et seulement s'il existe  $p \in G$  telle que  $p(n)$  soit définie et égale à  $\alpha$ ;

en effet : si  $p, q \in G$  et si  $p(n)$  et  $q(n)$  sont définies, alors  $p(n) = q(n)$  puisque (condition 2 de définition des génériques)  $p$  et  $q$  sont compatibles, c'est-à-dire ont un prolongement commun. De plus pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $p \in G$  tel que  $p(n)$  soit définie ; car  $\{p \in C ; p(n) \text{ est définie}\}$  est une partie dense de  $C$  puisque toute condition possède évidemment un prolongement défini en  $n$  ; d'après la condition 3 de définition des génériques, il y a une telle condition dans  $G$ .

- Notons que cette application  $g$  détermine  $G$  : car on voit aisément que  $G$  est l'ensemble des restrictions de  $g$  aux parties finies de  $\mathbb{N}$ . On dira que  $g$  est une application  $M$ -générique de  $\mathbb{N}$  dans  $K$ .

- Or une telle application est surjective : en effet si  $\alpha \in K$ , l'ensemble  $\{p \in C ; p \text{ prend la valeur } \alpha\}$  est dense dans  $C$  : pour toute condition  $p$ , il y a évidemment un prolongement de  $p$  qui prend la valeur  $\alpha$ . Donc (condition 3 de définition des génériques) l'un des éléments  $p$  de  $G$  prend la valeur  $\alpha$ , donc aussi  $g$ .

Par suite l'ordinal  $K$ , qui est un cardinal non dénombrable dans  $M$  est dénombrable dans le modèle  $M[g]$  (et n'est donc plus un cardinal dans ce modèle).

On peut, de même, au moyen d'ensembles génériques "détruire" tous les cardinaux d'une famille  $(K_i)_{i \in I}$  de cardinaux de  $M$ . On prend comme ensemble  $C$  de conditions l'ensemble des familles finies  $(f_i)_{i \in J}$ , chaque  $f_i$  étant une application définie sur une partie finie de  $\mathbb{N}$  à valeurs dans  $K_i$ .

Une partie  $G$  de  $C$  qui est  $M$ -générique est alors donnée par une famille  $(g_i)_{i \in I}$ , chaque  $g_i$  étant une application de  $\mathbb{N}$  sur  $K_i$  (condition nécessaire mais non suffisante pour que la famille  $(g_i)_{i \in I}$  soit  $M$ -générique).

Si on cherche par cette méthode à détruire tous les cardinaux de  $M$  qui sont  $< \aleph_\alpha$  ( $\alpha$  étant un ordinal limite) sans pour cela détruire  $\aleph_\alpha$ , il faut que  $\aleph_\alpha$  ne soit cofinal à aucun ordinal  $< \aleph_\alpha$  : car si

$\aleph_\alpha = \sup_{\lambda < \mu} K_\lambda$  avec  $K_\lambda < \aleph_\alpha$  et  $\mu < \aleph_\alpha$ , dans  $M[G]$ ,  $\mu$  devient dénombrable, donc la famille  $(K_\lambda)_{\lambda < \mu}$  devient une suite d'ordinaux dénombrable, et donc  $\aleph_\alpha$  devient aussi dénombrable. Donc  $\aleph_\alpha$  doit être faiblement inaccessible (c'est-à-dire  $\alpha$  est un ordinal limite et  $\aleph_\alpha$  n'est cofinal à aucun ordinal strictement inférieur) ; si  $M$  satisfait l'hypothèse généralisée du continu, cela revient à dire que  $\aleph_\alpha$  est inaccessible.

#### Le modèle de Solovay.

On suppose la théorie  $ZF + AC + CI$  non-contradictoire. Alors, au moyen d'une technique classique (schéma de réflexion et théorème de Löwenheim-Skolem) on en déduit que la théorie suivante (écrite à l'aide des symboles  $\in$ ,  $=$ , et d'un symbole de constante  $M$ ) est aussi non-contradictoire :

$ZF + AC + CI + ZF^M + AC^M + CI^M + "M \text{ est un ensemble transitif dénombrable}"$ .  
 (Pour chaque axiome  $A$ ,  $A^M$  désigne l'axiome " $M$  satisfait  $A$ ".)  $M$  est donc un modèle transitif dénombrable de  $ZF + AC + CI$ . Désignons par  $\pi (= \aleph_\pi)$  le premier cardinal inaccessible de  $M$ . Soit  $C$  l'ensemble de conditions de forcing formé des familles  $\underbrace{(f_\alpha)}_{\text{finies}}$  ( $\alpha < \pi$ ),  $f_\alpha$  étant une application d'une partie finie de  $\mathbb{N}$  dans  $\aleph_\alpha$ . Soit  $G$  un ensemble  $M$ -générique sur  $C$  ;  $G$  est donné par une famille  $(g_\alpha)_{\alpha < \pi}$ , chaque  $g_\alpha$  étant une surjection de  $\mathbb{N}$  sur  $\aleph_\alpha$ .

On montre que  $M[G]$  est le modèle cherché, c'est-à-dire qu'il satisfait l'axiome "tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  définissable en termes d'ordinaux et de

réels est mesurable pour la mesure de Lebesgue". Donnons brièvement les étapes de la démonstration.

- Le fait que  $\pi$  est inaccessible permet de montrer le

LEMME 3.- Tout ensemble de conditions deux à deux incompatibles est de cardinal  $< \pi$ .

Notons que le lemme 3 implique que le cardinal  $\pi$  de  $M$  reste un cardinal dans  $M[G]$  (comme c'est le premier cardinal de  $M$  qui n'est pas détruit, c'est le cardinal  $\aleph_1$  de  $M[G]$ ).

- Pour chaque  $\alpha < \pi$  on a  $C = C_\alpha \times C^\alpha$ , où  $C_\alpha$  est l'ensemble des familles  $(f_\beta) (\beta < \alpha)$  et  $C^\alpha$  l'ensemble des familles  $(f_\beta) (\beta \geq \alpha)$  ( $f_\beta$  étant une application définie sur une partie finie de  $\mathbb{N}$  à valeurs dans  $\aleph_\beta$ ).  $C_\alpha$  et  $C^\alpha$  sont des ensembles de conditions de forcing. On a alors, pour chaque  $\alpha < \pi$ ,  $M[G] = M[G_\alpha][G^\alpha]$ , où  $G_\alpha = (g_\beta)_{\beta < \alpha}$  est  $M$ -générique sur  $C_\alpha$ , et  $G^\alpha = (g_\gamma)_{\gamma \geq \alpha}$  est  $M[G_\alpha]$ -générique sur  $C^\alpha$ .

- On considère dans  $M[G]$  un sous-ensemble  $X$  de  $[0,1]$  définissable en termes d'ordinaux et de réels ; d'où un énoncé  $\mathcal{Z}(x, \delta, t)$  à une variable libre  $x$ , écrit avec  $\in, =$ , un ordinal  $\delta$  et un réel  $t$  de  $M[G]$ , tel que dans  $M[G]$  on ait  $\forall x [x \in X \Leftrightarrow \mathcal{Z}(x, \delta, t)]$ .

Le lemme 2 permet de montrer qu'il existe un ordinal  $\alpha < \pi$  tel que  $t \in M[G_\alpha]$ . Donc si on pose  $M' = M[G_\alpha]$ ,  $C' = C^\alpha$ ,  $G' = G^\alpha$ , on a  $M[G] = M'[G']$  et l'ensemble  $X$  est défini dans  $M'[G']$  par un énoncé  $\mathcal{Z}(x)$  à une variable libre  $x$ , écrit avec  $\in, =$ , et des éléments  $\delta, t$  de  $M'$ . De plus  $\pi$  est encore inaccessible dans  $M'$ , et  $G'$  détruit tous les cardi-

naux de  $M'$  qui sont  $< \pi$ .

- L'outil essentiel pour la suite de la démonstration est la notion de réel aléatoire : un réel  $r$  de  $M[G]$ ,  $0 \leq r \leq 1$  est dit aléatoire sur  $M'$  s'il appartient à tous les boréliens de  $[0,1]$  de mesure 1 définissables dans  $M'$ . Comme dans  $M'$  il y a  $\aleph_1$  boréliens, et que le cardinal  $\aleph_1$  de  $M'$  est détruit dans  $M[G]$ , l'ensemble des réels aléatoires sur  $M'$  est un borélien de mesure 1 dans  $M[G]$  : car c'est l'intersection d'une famille dénombrable de boréliens de mesure 1.

Soit  $\mathcal{B}_M$ , l'algèbre de Boole des boréliens de  $[0,1]$  dans  $M'$  (modulo les boréliens de mesure nulle), et soit  $\mathcal{B}_M^* = \mathcal{B}_M - \{0\}$ . Alors  $\mathcal{B}_M^*$  est un ensemble de conditions de forcing, et on montre que les  $M'$ -génériques sur  $\mathcal{B}_M^*$  sont canoniquement associés aux réels aléatoires sur  $M'$ . La correspondance se fait de la façon suivante : si  $H$  est  $M'$ -générique sur  $\mathcal{B}_M^*$ , il lui est associé le réel aléatoire  $r$  tel que, pour tout borélien  $B$  de  $M[G]$  défini dans  $M'$ , on ait  $B \in H \Leftrightarrow r \in B$ .

On montre alors qu'on peut construire un énoncé  $\mathcal{E}'(x)$  à une variable libre, à paramètres dans  $M'$  qui a la propriété suivante : pour tout réel  $r$  de  $M[G]$  aléatoire sur  $M'$ ,  $\mathcal{E}'(r)$  est vrai dans  $M[G]$  si et seulement si  $\mathcal{E}'(r)$  est vrai dans le modèle  $M'[r]$  (c'est le point le plus technique, mais essentiel dans la démonstration).

Il en résulte que, si  $r$  est un réel aléatoire sur  $M'$  on a :

$$r \in X \Leftrightarrow \mathcal{E}'(r) \text{ est vrai dans } M'[r].$$

Or, pour que  $\mathcal{E}'(r)$  soit vrai dans  $M'[r]$ , il faut et il suffit qu'il existe une condition  $B$  de  $\mathcal{B}_M^*$ , appartenant au  $M'$ -générique associé à  $r$

(c'est-à-dire telle que  $r \in B$ ) qui force l'énoncé  $\mathcal{E}'(\rho)$  (écrit avec un symbole de constante  $\rho$ ).

Or  $\{B \in \mathcal{B}_M^* ; B \Vdash \mathcal{E}'(\rho)\}$  est un ensemble de  $M'$ . Donc la réunion  $\Delta$  des boréliens  $B$  de  $M[G]$  définis dans  $M'$  tels que  $B$  force  $\mathcal{E}'(\rho)$  est un ensemble de  $M[G]$ . Comme c'est la réunion d'une famille dénombrable de boréliens (dans  $M'$  il y a  $\aleph_1$  boréliens, donc dans  $M[G]$  il y a  $\aleph_0$  boréliens définis dans  $M'$ ),  $\Delta$  est lui-même un borélien de  $M[G]$ .

Or pour tout réel  $r$  de  $M[G]$  aléatoire sur  $M'$  on a  $r \in X \Leftrightarrow r \in \Delta$ . Comme l'ensemble des réels aléatoires sur  $M'$  est un borélien de mesure 1, on voit que  $|X - \Delta|$  est de mesure nulle, ce qui montre que  $X$  est mesurable pour la mesure de Lebesgue.

Remarque.

Le problème suivant reste ouvert : la non-contradiction de ZF implique-t-elle celle de ZF + DC + "tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  est mesurable" (ou, ce qui revient au même, celle de ZF + AC + "tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ , définissable en termes d'ordinaux et de réels, est mesurable"). Dans cette direction, Solovay a montré le théorème suivant : la non-contradiction de ZF implique celle de ZF + DC + "il existe une mesure dénombrablement additive sur la  $\sigma$ -algèbre de toutes les parties de  $\mathbb{R}$ , qui est invariante par translation et prolonge la mesure de Lebesgue".

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. GÖDEL - The consistency of the continuum hypothesis, Annals of Math. Studies n° 3.
- [2] P. J. COHEN - Set theory and the continuum hypothesis, (Benjamin).