ENRICO BOMBIERI

Régularité des hypersurfaces minimales

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 353, p. 111-121
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1968-1969__11__111_0>

Séminaire BOURBAKI
21e année, 1968/69, n° 353 Février 1969

RÉGULARITÉ DES HYPERSURFACES MINIMALES

par Enrico BOMBIERI

I. Soit $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien réel de dimension n, avec coordonnées $x = (x_1,\dots,x_n)$ et soit A un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^n$. On note $BV_{loc}(A)$ l'espace des fonctions $f : A \to \mathbb{R}$ de variation localement bornée dans A (fonctions dont les dérivées au sens des distributions sont dans l'espace des mesures, dual de $C(A)$).

Si $f \in BV_{loc}(A)$, on désigne par Df la mesure vectorielle dérivée de f, $Df = (D_1 f,\dots,D_n f)$; donc

$$\int_A f\varphi_{x_i}\,dx = -\int_A \varphi D_i f$$

où $\varphi_{x_i} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, pour tout $\varphi \in C_o^1(A)$.

Soit maintenant E un sous-ensemble de A et soit f_E sa fonction caractéristique. On dit que l'ensemble E a un bord orienté minimal (au sens de De Giorgi et Miranda) si

i) on a $f_E \in BV_{loc}(A)$,

ii) pour tout $g \in BV_{loc}(A)$ à support compact dans A, on a

$$\int_K |D(f_E + g)| \geq \int_K |Df_E|$$

où K est le support de g et pour tout $f \in BV_{loc}(A)$ l'intégrale $\int_K |Df|$ est la variation totale de f dans K.

On doit encore définir le bord orienté de E ; c'est l'ensemble des points $x_o \in E$ tels que

(1) $$0 < \liminf_{r \to o} r^{-n} \int_{B_r(x_o)} f_E \, dx \leq \limsup_{r \to o} r^{-n} \int_{B_r(x_o)} f_E \, dx < \omega_n$$

où $B_r(x_o)$ est la boule $|x - x_o| < r$ et ω_n est la mesure n-dimensionnelle de la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Dans la suite, on supposera toujours que le bord orienté de E est égal au bord de E au sens usuel.

On appellera hypersurface minimale un bord orienté minimal.

On sait (De Giorgi [3], M. Miranda [5]) que, si S est une hypersurface minimale dans A, alors S est une hypersurface analytique en dehors d'un ensemble singulier N qui est fermé dans A et tel que

$$H_{n-1}(N) = 0 ,$$

où H_{n-1} est la mesure $(n - 1)$-dimensionnelle de Hausdorff dans $\mathbb{R}^n$. On sait aussi (F. J. Almgren Jr. [1], J. Simons [10]) que l'ensemble singulier N est vide si $n \leq 7$; on a donc un théorème de régularité à l'intérieur pour les hypersurfaces minimales de dimension au plus 6.

Mon but est d'exposer les idées qui ont conduit aux deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1.- Soit $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un graphe minimal, c'est-à-dire une hypersurface minimale graphe d'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$, où Ω est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

Alors S est analytique dans $\Omega \times \mathbb{R}$.

THÉORÈME 2.- Si $n \geq 8$, il existe des hypersurfaces minimales singulières dans $\mathbb{R}^n$.

Le théorème 2 montre qu'il n'est pas possible d'améliorer les résultats de régularité à l'intérieur de Almgren et Simons.

II. La preuve du théorème 1 s'appuie sur une majoration *a priori* pour l'équation différentielle elliptique non linéaire des graphes minimaux, démontrée par De Giorgi, Miranda et moi-même dans un travail maintenant sous presse [2].

Pour le théorème 2, obtenu il y a deux semaines par De Giorgi, Giusti et moi-même, on démontre l'existence de cônes minimaux dans $\mathbb{R}^n$, pour $n \geq 8$. En effet, Simons avait déjà démontré qu'il existe des cônes de dimension 7 localement stables par petites déformations laissant fixe le bord du cône ; avec une méthode différente de celle de Simons, nous avons démontré que ces cônes sont globalement stables.

III. Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^n$, et soit $S \subset \Omega \times \mathbb{R}$ un graphe minimal de classe $C^2(\Omega)$, c'est-à-dire une hypersurface $y = u(x)$ où u est une fonction de $C^2(\Omega)$ telle que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\sqrt{1+|\mathrm{grad}\, u|^2}}\right) = 0 \tag{2}$$

dans Ω.

On a la majoration *a priori* suivante :

THÉORÈME 3.- *Soit* B_R *la boule* $|x| < R$ *et soit* $u \in C^2(B_R)$ *une solution positive de l'équation* (2). *Alors*

$$|(\mathrm{grad}\, u)(0)| \leq c_1 \exp(c_2\, u(0)/R) \tag{3}$$

où c_1, c_2 *dépendent uniquement de* n.

Remarque.- Si $n = 2$ l'inégalité (3) a été trouvée par Finn ; elle a été améliorée par Serrin [9] sous la forme

$$(1 + |(\text{grad } u)(0)|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \exp(\tfrac{\pi}{2}\, u(0)/R)$$

et cette inégalité est la meilleure possible ; la démonstration de Serrin s'appuie sur la théorie des fonctions d'une variable complexe et on ne peut pas la généraliser au cas $n \geq 3$.

La démonstration du théorème 3 est assez technique et il n'est pas possible d'en donner les détails. On remarquera ici la différence entre la majoration (3) et les majorations analogues pour les équations elliptiques quasi-linéaires, dont l'équation (2) est un cas limite. Pour le cas quasi-linéaire, ces majorations sont toujours homogènes et il n'est pas possible de majorer les dérivées en un point au moyen de la valeur de la solution en ce point.

Pour obtenir le théorème 1 à partir du théorème 3, on emploie la méthode suivante :

Soit $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un graphe minimal ; par un théorème de Miranda [6], S est minimal et on sait par le théorème de De Giorgi et Miranda que l'ensemble singulier de S est localement fermé et de mesure n-dimensionnelle nulle, donc pour presque tout R la trace de S sur le bord de $B(R) \times \mathbb{R}$ est un graphe analytique à l'exception d'un ensemble fermé N_R de mesure $(n-1)$-dimensionnelle nulle. On sait aussi que S est localement borné, donc on peut approcher la trace de S sur le bord de $B(R) \times \mathbb{R} - N_R$ par des fonctions de classe C^2.

On obtient ainsi une suite de solutions de l'équation (2), soit $\{u_n\}$, telle que

(i) u_n est analytique

(ii) la trace de u_n sur $\partial B(R)$ est uniformément bornée et approche la trace de S sur $\partial B(R) \times \mathbb{R} - N_R$ (on fait usage des résultats de Jenkins et Serrin [8] sur le problème de Dirichlet pour l'équation (2)).

Maintenant on peut appliquer le théorème 3 aux fonctions u_n et on obtient aisément

(iii) les fonctions u_n sont uniformément lipschitziennes sur tout compact de $B(R)$.

De (iii) et du théorème de Miranda [7] sur les suites de graphes minimaux on déduit qu'il existe une suite partielle $\{u_{n'}\}$ extraite de la suite u_n qui converge vers une limite v , analytique dans $B(R)$, et (encore par le théorème de Jenkins et Serrin) la trace de v sur $B(R)$ est égale à la trace de S sur $\partial B(R) \times \mathbb{R}$ en dehors d'un ensemble fermé de mesure $(n-1)$-dimensionnelle nulle. Il est possible maintenant de démontrer que le graphe de v coïncide avec S dans $B(R)$ et on obtient ainsi le résultat du théorème 1.

IV. La conjecture suivante est bien connue :

CONJECTURE.- <u>Soit</u> S <u>un graphe minimal sur tout l'espace</u> $\mathbb{R}^n$, $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$. <u>Alors</u> S <u>est un hyperplan</u>.

Comme Bernstein a démontré la conjecture pour le cas $n = 2$, on appelle problème de Bernstein le problème de vérifier la validité de la conjecture dans $\mathbb{R}^n$.

Cette conjecture a été démontrée par De Giorgi pour $n = 3$, par Almgren [1] dans le cas $n = 4$, et tout récemment par J. Simons dans le cas $n \leq 7$. La méthode de démonstration du théorème 2 donne aussi le résultat suivant :

THÉORÈME 4.- Si $n \geq 10$ il existe des graphes minimaux S de dimension n, sur tout $\mathbb{R}^n$, qui ne sont pas des hyperplans.

Il est presque certain que la réponse au problème de Bernstein est négative pour $n \geq 8$, et, en tout cas, elle est négative si n est ≥ 10.

V. Soient

$$x = (x_1, \ldots, x_{2m}) ,$$
$$u = (x_1^2 + \ldots + x_m^2)^{\frac{1}{2}} ,$$
$$v = (x_{m+1}^2 + \ldots + x_{2m}^2)^{\frac{1}{2}}$$

et soit $S_p(r)$ la sphère $x_1^2 + \ldots + x_p^2 = r^2$. On sait (Hsiang [4]) que, si V est une variété compacte et G un groupe de Lie d'automorphismes de V, toute orbite de G d'aire extrémale est une variété minimale dans V.

Si on prend, avec des notations évidentes, $V = S_{2m}(1)$, $G = O(m) \times O(m)$, alors $S_m(1/\sqrt{2}) \times S_m(1/\sqrt{2})$ est minimale dans $S_{2m}(1)$ par le théorème de Hsiang.

Soit C_m le cône de sommet l'origine et bord $S_m(1/\sqrt{2}) \times S_m(1/\sqrt{2})$; comme son bord est minimal dans $S_{2m}(1)$ on vérifie sans peine que sa courbure moyenne est nulle en tout point en dehors de l'origine, et Simons a démontré que ce cône est localement stable par petites déformations laissant fixe le bord, pour tout $m \geq 4$.

Je vais indiquer comment on peut démontrer que ce cône est une hypersurface minimale.

Soit g une fonction analytique de u, v et considérons le problème variationnel (P)

$$(P)\qquad \begin{cases} \int_{B(1)} |Df|dx = \text{minimum} \\ f \in \mathrm{Lip}(B(1)) \\ f = g(u,v) \quad \text{sur} \quad \partial B(1) \end{cases} .$$

On peut démontrer que ce problème a une solution au moins et que l'ensemble des solutions est convexe et fermé dans $\mathrm{Lip}(B(1))$. Comme toute translatée par G de f est encore solution du problème (P), il en découle aisément qu'il existe une solution invariante par G .

Par un important théorème de Miranda [5], on sait aussi que presque toutes les hypersurfaces de niveau $f(x) = $ constante de f sont des hypersurfaces minimales.

Il est facile d'étudier les solutions invariantes du problème (P). On écrit $f(x) = F(u,v)$ et, en utilisant l'équation d'Euler pour le problème (P), on est ramené à l'étude des solutions analytiques de l'équation

$$(4)\qquad F_v^2 F_{uu} - 2F_u F_v F_{uv} + F_u^2 F_{vv} + p(F_u/u + F_v/v)(F_u^2 + F_v^2) = 0$$

où $p = m - 1$, $u , v > 0$ et $\partial F/\partial n = 0$ sur $u = 0$ et $v = 0$, et plus précisément on doit étudier les courbes de niveau $F = $ constante.

En éliminant F à l'aide de l'équation $dF = 0$, on obtient l'équation

$$v'u'' - u'v'' + p(u'^2 + v'^2)(u'/v - v'/u) = 0$$

pour les équations paramétriques $u = u(s)$, $v = v(s)$ des courbes de niveau.
On introduit maintenant les deux nouvelles variables

$$\varphi = \mathrm{arctg}(v/u)$$
$$\theta = \mathrm{arctg}(v'/u') ,$$

et on obtient

$$2p \cos(\varphi + \theta)d\varphi + \sin(2\varphi)\sin(\theta - \varphi)d\theta = 0 .$$

Maintenant, si $\sigma = \theta - 3\varphi + \frac{\pi}{2}$, $\psi = \theta + \varphi - \frac{\pi}{2}$, on obtient en fonction d'un paramètre t convenable le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{d\sigma}{dt} = -\dfrac{3}{2}\sin\sigma - (2p + \dfrac{3}{2})\sin\psi \\ \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -\dfrac{1}{2}\sin\sigma - (2p - \dfrac{1}{2})\sin\psi \end{cases}$$

qu'on peut étudier aisément dans l'espace des phases (σ,ψ) avec les méthodes de Bendixon et Poincaré. En effet, on s'intéresse à l'unique caractéristique Γ allant du point $(\pi,0)$ au point $(0,0)$. Le résultat de cette étude est que, si $p > 3/2 + \sqrt{2}$, Γ et la droite $\sigma = \psi$ n'ont pas de point en commun à l'exception de $(0,0)$. Donc $\varphi \neq \pi/4$ et on a démontré que si $p > 3/2 + \sqrt{2}$ les courbes de niveau de F , à l'exception de la droite $u = v$, n'ont pas de point en commun avec cette droite. Donc, si $p > 3/2 + \sqrt{2}$, il y a une seule courbe de niveau qui passe par le point $(u,v) = (1/\sqrt{2}\ ,\ 1/\sqrt{2})$: c'est la droite $u = v$.

Ce résultat est faux si $p < 3/2 + \sqrt{2}$; par exemple, il y a une infinité de telles courbes de niveau si $3/2 - \sqrt{2} < p < 3/2 + \sqrt{2}$.

Géométriquement, ce résultat implique qu'il y a une seule hypersurface minimale invariante par le groupe G , ayant $S_m(1/\sqrt{2}) \times S_m(1/\sqrt{2})$ comme bord, si $p = m - 1 > 3/2 + \sqrt{2} = 2.914 \ldots$ donc si $m \geq 4$. Cette hypersurface correspond dans le plan (u,v) à la droite $u = v$; c'est exactement le cône de Simons, qui est donc minimal si $m \geq 4$.

VI. La même idée conduit à un contre-exemple à la conjecture de Bernstein.

On cherche maintenant des solutions de l'équation (2) invariantes par le groupe G . On démontre que ce problème est équivalent à l'existence d'une solution (analytique sur tout l'espace $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ et continue sur $\mathbb{R}^2$) de l'équation

$$(5) \qquad (1 + F_v^2)F_{uu} - 2F_uF_vF_{uv} + (1 + F_u^2)F_{vv} + p(F_u/u + F_v/v)(1 + F_u^2 + F_v^2) = 0 \quad ;$$

pour cela il est suffisant d'avoir deux fonctions F_1 , F_2 continues dans $\mathbb{R}^2$, analytiques sur tout l'espace $\mathbb{R}^2 - (u^2 = v^2)$ telles que, si E est l'opérateur différentiel non linéaire du premier membre de l'équation (5), EF_i soit analytique dans $\mathbb{R}^2 - (u^2 = v^2)$ et de plus

$$|F_1| \leq |F_2|$$
$$\text{sign } EF_1 = \text{sign}(u^2 - v^2) ,$$
$$\text{sign } EF_2 = - \text{sign}(u^2 - v^2) ,$$
$$\text{sign } F_1 = \text{sign } F_2 = \text{sign}(u^2 - v^2) ,$$

et F_1 et F_2 soient nulles seulement sur $u^2 - v^2 = 0$.

Il existera alors une solution F de l'équation (5), analytique sur tout $\mathbb{R}^2-(0,0)$ par le théorème 1, et telle que

$$F_1 \leq F \leq F_2 \qquad \text{dans } u^2 - v^2 > 0 ,$$
$$F_2 \leq F \leq F_1 \qquad \text{dans } u^2 - v^2 < 0 ,$$
$$F = 0 \qquad \text{sur } u^2 - v^2 = 0 .$$

Il est clair que les courbes de niveau d'une telle fonction F approcheront de plus en plus les courbes de niveau des solutions de l'équation (4) si $|\text{grad } F|$ est assez grand. Mais on connait déjà l'allure asymptotique des courbes de niveau pour l'équation (4), ce qui permet de conjecturer l'allure asymptotique de F .

Après quelques tentatives, on voit qu'on peut prendre

$$F_1 = (u^2 - v^2)(u^2 + v^2)^{\theta}$$
$$F_2 = g[(u^2 - v^2) + (u^2 + v^2)^{\theta+1}(\xi + c_o\xi^3)]$$

où $c_o > 0$ est assez grand, $\xi = \dfrac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}$,

$$g(x) = \int_o^x (1 + e^{-c_1|t|^\theta})dt , \qquad c_1 > 0$$

et

$$(6) \qquad \theta = (2p - 3 - \sqrt{4p^2 - 12p + 1})/4 > 0 ,$$

pour tout $p \geq 5$. Si $p = 4$ on doit modifier légèrement la définition de F_2 .

La fonction F_1 marche bien pour $p > \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ mais la construction de F_2 est beaucoup moins aisée.

Cela implique que, si $n = 2p + 2$, il existe une solution de l'équation (2) analytique sur tout $\mathbb{R}^n$ et telle que

$$\limsup_{|x| \to +\infty} |u(x)|/|x|^{2+2\theta} = 1$$

où θ est donné par la formule (6).

<u>Note ajoutée après le séminaire</u>.

En modifiant la construction de la fonction F_2 on a démontré que le Théorème 4 reste vrai si $n \geq 8$, ce qui résout complètement le problème de Bernstein.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. J. ALMGREN Jr. - Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein theorem, Annals of Math. 85 (1966), 277-292.

[2] E. BOMBIERI, E. DE GIORGI, M. MIRANDA - Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche, Archive for Rat. Mech. and Analysis, (1968).

[3] E. DE GIORGI - Frontiere orientate di misura minima, Sem. Mat. Sc. Norm. Sup. di Pisa, A.A. 1960/61.

[4] W. Y. HSIANG - On the compact homogeneous minimal submanifolds, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 56 (1966), 5-6.

[5] M. MIRANDA - Sul minimo dell'integrale del gradiente di una funzione, Annali Sc. Norm. Sup. di Pisa, 19 (1965), 627-665.

[6] M. MIRANDA - Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell'area minima in n variabili, Annali Sc. Norm. Sup. di Pisa, 19 (1965), 233-250.

[7] M. MIRANDA - Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali, Rend. Sem. Mat. Padova, 38 (1967), 238-257.

[8] H. JENKINS and J. SERRIN - The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimensions, J. reine angew. math., 229 (1968),170-187.

[9] J. SERRIN - Addendum to "A priori estimates for solutions of the minimal surface equation", Archive for Rat. Mech. and Analysis, 28 (1968).

[10] J. SIMONS - Minimal varieties in riemannian manifolds, Annals of Math. 88 (1968), 62-105.