

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

CLAIRE DELAROCHE

ALEXANDRE KIRILLOV

Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 343, p. 507-528

http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__507_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES RELATIONS ENTRE L'ESPACE DUAL D'UN GROUPE
ET LA STRUCTURE DE SES SOUS-GROUPES FERMÉS

(d'après D. A. KAJDAN [7])

par Claire DELAROCHE et Alexandre KIRILLOV

Cet article est un exposé détaillé des résultats brièvement démontrés par D. A. Kajdan dans [7]. Par rapport à [7], nous avons un peu modifié le plan de l'exposé, corrigé la formulation d'un théorème auxiliaire et ajouté l'étude du groupe $\mathrm{Sp}(4, K)$, ce qui permet d'étendre le théorème principal au cas des groupes de rang 2. Nous renvoyons le lecteur désireux de se dispenser des démonstrations techniques qui alourdissent le texte à l'élégant exposé de Kajdan.

§ 0.- Introduction.

Dans cet article on étudie la structure de certains sous-groupes discrets Γ de groupes de Lie G (réels ou p -adiques). On démontre en particulier que si Γ est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie simple de rang déployé (*) ≥ 2 tel que le volume de G/Γ soit fini, alors Γ a un nombre fini de générateurs et $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ est fini. Dans le cas réel le premier résultat donne une réponse positive à une partie de la conjecture de Selberg sur la finitude du nombre de faces du polyèdre fondamental. Pour démontrer ces résultats on utilise la structure topologique de l'espace dual $\hat{\Gamma}$ de Γ , c'est-à-dire de l'espace des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles de Γ . L'article se compose de

(*) On appelle rang déployé d'un tel groupe la dimension de ses tores déployés maximaux.

trois paragraphes. Dans le paragraphe 1, on montre comment la structure topologique de $\hat{\Gamma}$ est liée à certaines propriétés algébriques de Γ . Dans le paragraphe 2, on montre comment on peut obtenir des renseignements sur la structure topologique de $\hat{\Gamma}$ à partir de celle de $\hat{G}$. Enfin, dans le paragraphe 3, on étudie $\hat{G}$ dans le cas où G est un groupe de Lie semi-simple dont toutes les composantes simples sont de rang déployé ≥ 2 .

§ 1.- Définition de la propriété (T) et ses conséquences.

Tous les groupes que nous considérons dans cet article sont supposés localement compacts et séparables. G étant un tel groupe, nous noterons $\tilde{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires de G de dimension inférieure ou égale à χ_0 et $\hat{G} \subset \tilde{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles de G . Pour $T \in \tilde{G}$, $\epsilon > 0$, K sous-ensemble compact de G et $\xi_1, \dots, \xi_n$ vecteurs unitaires de l'espace d'une représentation de la classe T , soit $V(\epsilon, K, \xi_1, \dots, \xi_n, T)$ l'ensemble des éléments $T' \in \tilde{G}$ tels qu'il existe des vecteurs unitaires $\eta_1, \dots, \eta_n$ dans l'espace d'une représentation de la classe T' satisfaisant

$$|\langle T'(g)\eta_i | \eta_j \rangle - \langle T(g)\xi_i | \xi_j \rangle| \leq \epsilon$$

pour $i, j = 1, \dots, n$ et $g \in K$. Nous munirons $\tilde{G}$ de la topologie pour laquelle les ensembles $V(\epsilon, K, \xi_1, \dots, \xi_n, T)$ forment un système fondamental de voisinages de T . On peut donner une autre définition de cette topologie sur $\tilde{G}$. Soit $C^*(G)$ la C^* -algèbre du groupe G . On sait que $\tilde{G}$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des classes d'équivalence des représentations non dégénérées de $C^*(G)$ de dimension inférieure ou égale à χ_0 .

Pour $T \in \tilde{G}$, $\epsilon > 0$, $a_1, \dots, a_p \in C^*(G)$ et $\xi_1, \dots, \xi_n$ vecteurs unitaires de l'espace d'une représentation de la classe T soit $V(\epsilon, a_1, \dots, a_p, \xi_1, \dots, \xi_n, T)$ l'ensemble des éléments $T' \in \tilde{G}$ tels qu'il existe des vecteurs unitaires

$\eta_1, \dots, \eta_n$ dans l'espace d'une représentation de la classe T' satisfaisant

$$|\langle T'(a_k)\eta_i | \eta_j \rangle - \langle T(a_k)\xi_i | \xi_j \rangle| \leq \epsilon$$

pour $k = 1, \dots, p$ et $i, j = 1, \dots, n$. On démontre comme dans [4] lemme 1.1, que la topologie pour laquelle les ensembles $V(\epsilon, a_1, \dots, a_p, \xi_1, \dots, \xi_n, T)$ forment un système fondamental de voisinages de T est la même que celle précédemment définie.

Remarquons que dans cette topologie, chaque point possède un système fondamental dénombrable de voisinages. Restreinte à $\hat{G}$, cette topologie est la topologie habituelle définie par exemple comme topologie de Jacobson lorsqu'on identifie $\hat{G}$ au spectre de $C^*(G)$. Pour cette topologie, un point T est adhérent à une partie S de $\hat{G}$ ou faiblement contenu dans S si et seulement si le noyau de T contient l'intersection des noyaux des éléments de S .

Quel que soit le groupe considéré, nous noterons toujours dans la suite T_0 la classe d'équivalence de sa représentation irréductible triviale.

LEMME 1.- Etant donné un groupe G , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) T_0 est isolé dans $\hat{G}$;
- (ii) si une suite T_n d'éléments de $\tilde{G}$ tend vers T_0 dans $\tilde{G}$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ la représentation T_n contienne T_0 ;
- (iii) si T_0 est adhérent, dans $\tilde{G}$, à un élément T de $\tilde{G}$, alors T_0 est contenu dans T .

(i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que T_0 soit isolé dans $\hat{G}$. Ce point possède un voisi-

nage $V(\epsilon, f_1, \dots, f_p, T_0)$ dans $\tilde{G}$ dont l'intersection avec $\hat{G}$ est réduite à T_0 . On peut supposer que les éléments $f_1, \dots, f_p$ de $C^*(G)$ sont des fonctions positives intégrables sur G d'intégrale 1. Soit T_n une suite d'éléments de $\tilde{G}$ qui converge vers T_0 dans $\tilde{G}$, et soit n_0 un entier tel que pour tout $n \geq n_0$ il existe un vecteur unitaire ξ_n dans H_n , espace d'une représentation de la classe T_n , satisfaisant $|\langle T_n(f_i)\xi_n | \xi_n \rangle - 1| \leq \frac{\epsilon^2}{4p}$ pour $i = 1, \dots, p$. Fixons-nous $n \geq n_0$ et décomposons T_n en composantes irréductibles. Il existe ([3], th. 8.3.2) un espace borélien Z , une mesure μ positive bornée sur Z , un champ mesurable $z \mapsto \pi(z)$ de représentations irréductibles de $C^*(G)$ dans $H(z)$ et un isomorphisme de H_n sur $\int^{\oplus} H(z) d\mu(z)$ qui transforme T_n en $\int^{\oplus} \pi(z) d\mu(z)$. Dans cet isomorphisme, ξ_n se transforme en $\int^{\oplus} v(z) d\mu(z)$ et on a

$$\left| \int_{Z_1} \langle \pi(z)(f_i)v(z) | v(z) \rangle d\mu(z) - 1 \right| \leq \frac{\epsilon^2}{4p} \quad \text{pour } i = 1, \dots, p,$$

où Z_1 désigne l'ensemble mesurable des points z tels que $v(z) \neq 0$. On peut, en prenant une mesure équivalente à μ , supposer que $\|v(z)\| = 1$ sur Z_1 et 0 ailleurs. On a alors

$$\left| \int_{Z_1} (1 - \langle \pi(z)(f_i)v(z) | v(z) \rangle) d\mu(z) \right| \leq \frac{\epsilon^2}{4p} \quad \text{pour } i = 1, \dots, p.$$

Puisqu'on a $1 - \operatorname{Re} \langle \pi(z)(f_i)v(z) | v(z) \rangle \geq 0$, il existe pour tout i un ensemble mesurable M_i dans Z_1 tel que $1 - \operatorname{Re} \langle \pi(z)(f_i)v(z) | v(z) \rangle \leq \frac{\epsilon^2}{2}$ sur M_i . L'ensemble $M = \bigcap M_i$ n'est pas négligeable car la mesure de Z_1 vaut 1 et celle de chaque ensemble $Z_1 - M_i$ est majorée par $1/2p$. Pour $z \in M$ et $i = 1, \dots, p$, on a

$$|1 - \langle \pi(z)(f_i)v(z) | v(z) \rangle| \leq \epsilon.$$

Il en résulte que pour tout $z \in M$ la représentation $\pi(z)$ appartient à la classe T_0 et donc que la sous-représentation $\int_M \pi(z) d\mu(z)$ de T_n est équivalente à la représentation $T_0 \otimes 1$, où 1 désigne la représentation identique dans $L^2(M, \mu)$. Donc pour tout $n \geq n_0$, la représentation T_0 est contenue dans T_n .

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Evident.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que G possède la propriété énoncée dans (iii), et soit T_n une suite de points de $\hat{G}$ distincts de T_0 qui tend vers T_0 . Alors T_0 est adhérent à l'élément $\sum_{n \in \mathbb{N}} T_n$ de $\tilde{G}$; il est donc contenu dans $\sum_{n \in \mathbb{N}} T_n$ et par conséquent coïncide avec au moins l'un des éléments T_n , ce qui contredit l'hypothèse faite sur ces éléments.

DÉFINITION.- On dit qu'un groupe possède la propriété (T) s'il possède l'une des propriétés équivalentes du lemme 1.

Les groupes compacts, par exemple, possèdent la propriété (T), puisque la topologie de $\hat{G}$ est discrète dans ce cas.

Etant donné un groupe G , on notera $[G, G]$ le plus petit sous-groupe fermé de G contenant tous les éléments de G qui s'écrivent sous la forme $xyx^{-1}y^{-1}$.

THÉORÈME 1.- Si un groupe G possède la propriété (T), alors le groupe $G/[G, G]$ est compact.

En effet, le groupe $G/[G, G]$ est commutatif et son groupe dual est discret.

COROLLAIRE.- Si un groupe G possède la propriété (T), il est unimodulaire.

En effet, la fonction modulaire de G devient par passage au quotient un homomorphisme continu du groupe compact $G/[G, G]$ dans $\mathbb{R}^+$ et un tel homomorphisme est nécessairement trivial.

THÉORÈME 2.- Soit Γ un groupe discret dénombrable qui possède la propriété (T).

Alors Γ a un nombre fini de générateurs et $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ est fini.

Supposons que Γ n'ait pas un nombre fini de générateurs. Soient $a_1, \dots, a_n, \dots$ une famille de générateurs de Γ et pour tout n entier soit Γ_n le sous-groupe de Γ engendré par les éléments $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$. On a $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \dots \subset \Gamma_n$ et $\bigcup_n \Gamma_n = \Gamma$. Par ailleurs, l'indice de Γ_n par rapport à Γ , soit $(\Gamma : \Gamma_n)$ est infini. Sinon, on voit immédiatement que Γ aurait un nombre fini de générateurs. Munissons l'ensemble Γ/Γ_n des Γ_n -classes à droite de la mesure définie au moyen des masses 1 placées en chaque point, et considérons la représentation T_n de Γ dans $L^2(\Gamma/\Gamma_n)$ définie par $T_n(g)f(x) = f(xg)$. Montrons que T_0 est limite de la suite T_n dans $\tilde{\Gamma}$. Fixons $\epsilon > 0$ et $g_1, \dots, g_p \in \Gamma$. Il existe n_0 tel que $g_1, \dots, g_p \in \Gamma_{n_0}$. Soit f_n la fonction de $L^2(\Gamma/\Gamma_n)$ qui vaut 1 sur $\{\Gamma_n\} \in \Gamma/\Gamma_n$ et 0 ailleurs. On a alors $T_n(g_i)f_n = f_n$ pour $i = 1, \dots, p$ dès que $n \geq n_0$, d'où $T_n \in V(\epsilon, \{g_1, \dots, g_p\}, T_0)$ pour $n \geq n_0$. Par ailleurs, T_n ne contient pas la représentation triviale T_0 , sinon il existerait dans $L^2(\Gamma/\Gamma_n)$ une fonction constante, ce qui est impossible puisque $(\Gamma : \Gamma_n) = +\infty$. Ceci contredit le fait que Γ possède la propriété (T).

D'autre part, le groupe $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ est fini, car il est discret et compact d'après le théorème 1.

§ 2.- Hérédité de la propriété (T).

Nous montrerons dans ce paragraphe que, sous certaines conditions, les sous-groupes d'un groupe qui possède la propriété (T) la possèdent aussi ; d'autre part, si un groupe est "uniformément engendré" par deux sous-groupes qui possèdent la propriété (T), il la possède aussi.

THÉOREME 3.- Soient G un groupe qui possède la propriété (T) et Γ un sous-groupe fermé unimodulaire de G tel que le volume de G/Γ soit fini. Alors Γ possède la propriété (T).

Soit T_n une suite d'éléments de $\tilde{\Gamma}$ qui tend vers T_0 dans $\tilde{\Gamma}$. Considérons l'application φ de $\tilde{\Gamma}$ dans $\tilde{G}$ définie par l'induction au sens de Mackey [9]. Elle est définie comme suit. Soit T une représentation de Γ dans l'espace de Hilbert H . L'espace de la représentation $\varphi(T)$ est l'espace des applications mesurables f de G dans H telles que

$$1) \quad f(\gamma g) = T(\gamma)f(g) \quad \text{pour } \gamma \in \Gamma, \quad g \in G ;$$

$$2) \quad \int_{G/\Gamma} \|f(g)\|^2 d\rho(g) < +\infty ;$$

où ρ désigne une mesure invariante sur l'espace des Γ -classes à droite G/Γ .

La représentation $\varphi(T)$ est définie par $\varphi(T)(g_1)f(g) = f(gg_1)$. Il est démontré dans [4], th. 4.1, que cette application φ est continue. Par ailleurs, le volume de G/Γ étant fini, $\varphi(T_0)$ contient T_0 . On en déduit que $\varphi(T_n)$ tend vers T_0 dans $\tilde{G}$. Puisque G possède la propriété (T), il existe n_0 tel que $\varphi(T_n)$ contienne T_0 pour $n \geq n_0$, et ceci entraîne que T_n contient T_0 pour $n \geq n_0$.

DÉFINITION.- Etant donné un groupe G et deux sous-groupes G' et G'' de G , on dit que G est uniformément engendré par les sous-groupes G' et G'' s'il existe un entier N tel que tout élément g de G s'écrive sous la forme

$$g'_1 g''_1 g'_2 g''_2 \dots g'_N g''_N \quad \text{avec } g'_i \in G' \quad \text{et } g''_i \in G'' .$$

THÉORÈME 4.- Soit G un groupe uniformément engendré par deux sous-groupes G' et G'' qui possèdent la propriété (T). Alors G possède la propriété (T).

Montrons que si T_0 est adhérent à un élément T de $\tilde{G}$, alors T_0 est contenu dans T . Puisque G' possède la propriété (T), il existe une partie compacte K' de G' et un réel $\epsilon' > 0$ tels que toute représentation U de G' satisfaisant $\operatorname{Re}\langle U(g)\xi|\xi\rangle \geq 1 - \epsilon'$ sur K' pour un vecteur unitaire ξ , possède un vecteur invariant. Soit H l'espace d'une représentation de la classe T ,

H'_1 le sous-espace de H des vecteurs invariants par G' et H'_2 le supplémentaire orthogonal de H'_1 dans H . Puisque H'_2 ne possède pas de vecteur invariant par G' , pour tout vecteur unitaire ξ de H'_2 il existe $g' \in K'$ tel que

$$\operatorname{Re}\langle T(g')\xi|\xi\rangle < 1 - \epsilon'.$$

Par ailleurs, il existe une suite de vecteurs unitaires ξ_n tels que $\langle T(g)\xi_n|\xi_n\rangle$ tende vers 1 uniformément sur K' quand n tend vers ∞ . Si P' désigne le projecteur de H sur H'_1 , montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P'\xi_n - \xi_n\| = 0$. Posons

$$P'\xi_n = \xi_n^1 \text{ et } \xi_n - P'\xi_n = \xi_n^2. \text{ On a}$$

$$\langle T(g)\xi_n|\xi_n\rangle = \|\xi_n^1\|^2 + \langle T(g)\xi_n^2|\xi_n^2\rangle.$$

Etant donné ϵ réel > 0 , il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$\|\xi_n^1\|^2 + \operatorname{Re}\langle T(g)\xi_n^2|\xi_n^2\rangle \geq 1 - \epsilon\epsilon'$$

sur K' . En choisissant $g \in K'$ de façon que $\operatorname{Re}\langle T(g)\xi_n^2|\xi_n^2\rangle < (1 - \epsilon')\|\xi_n^2\|^2$, on trouve $1 - \epsilon'\|\xi_n^2\|^2 \geq 1 - \epsilon\epsilon'$, d'où $\|\xi_n^2\|^2 \leq \epsilon$, dès que $n \geq n_0$.

De même, on démontre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P''\xi_n - \xi_n\| = 0$, où P'' désigne le projecteur de H sur le sous-espace des vecteurs invariants par G'' . Il en résulte, puisque tout élément g de G s'écrit sous la forme $g'_1 g''_2 \dots g'_N g''_N$, avec $g'_i \in G'$, $g''_i \in G''$ et N indépendant de g , que $\langle T(g)\xi_n|\xi_n\rangle$ tend vers 1 lorsque n

tend vers $+\infty$, uniformément sur G . Le théorème se déduit maintenant du lemme suivant.

LEMME 2.- Soit T une représentation unitaire d'un groupe G dans un espace hilbertien H . On suppose qu'il existe $\epsilon > 0$ et un vecteur $\xi_1 \in H$ tel que pour tout $g \in G$ on ait $\operatorname{Re}\langle T(g)\xi_1 | \xi_1 \rangle \geq \epsilon$. Alors il existe dans H un vecteur non nul invariant par G .

Démonstration. Soit B l'intersection de la boule unité fermée de H avec l'ensemble $\{\xi, \operatorname{Re}\langle \xi | \xi_1 \rangle \geq \epsilon\}$. C'est un ensemble faiblement compact dans H . Pour tout $A \subset G$ soit B^A l'ensemble des vecteurs de B invariants par A . Pour démontrer que B^G n'est pas vide, il suffit de démontrer que, pour toute partie finie $F = \{g_1, \dots, g_k\}$ de G , B^F n'est pas vide. Pour $i = 1, \dots, k$, soit P_i le projecteur de H sur le sous-espace de Hilbert des vecteurs invariants par rapport à l'opérateur $T(g_i)$. L'opérateur $T(g_i) + T(g_i)^{-1}$ est hermitien, et son spectre est contenu dans $[-2, 2]$. La suite

$$A_i^n = \left[\frac{E + T(g_i) + T(g_i)^{-1}}{3} \right]^n \quad \text{tend donc fortement vers } P_i. \text{ Montrons maintenant}$$

que la suite $D^n = (P_1 P_2 \dots P_{k-1} P_k P_{k-1} \dots P_2 P_1)^n$ tend fortement vers le projecteur P sur le sous-espace de H des vecteurs invariants par les opérateurs $T(g_i)$, $i = 1, \dots, k$. En effet, D est un opérateur hermitien positif et on a $\|D\| \leq 1$, donc D^n tend fortement vers le projecteur sur l'espace des vecteurs invariants par D . Mais on voit facilement que l'égalité $D\xi = \xi$ est équivalente au système des égalités $P_i \xi = \xi$ pour $i = 1, \dots, k$. On déduit de tout ce qu'on vient de démontrer que la suite $\{(A_1^m A_2^m \dots A_{k-1}^m A_k^m A_{k-1}^m \dots A_2^m A_1^m)^n \xi_1\}$, $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tend vers $P\xi_1$ dans H . D'autre part, l'opérateur $(A_1^m \dots A_{k-1}^m A_k^m A_{k-1}^m \dots A_1^m)^n$ s'écrit

$\sum_{\alpha} c_{\alpha} T(g_{\alpha})$ avec $\sum_{\alpha} c_{\alpha} = 1$ et $c_{\alpha} \geq 0$. On a donc

$$\operatorname{Re} \langle (A_1^m \dots A_{k-1}^m A_k^m A_{k-1}^m \dots A_1^m)^n \xi_1 | \xi_1 \rangle \geq \epsilon, \text{ d'où } \operatorname{Re} \langle P \xi_1 | \xi_1 \rangle \geq \epsilon.$$

Il en résulte que $P \xi_1$ appartient à B^F .

Nous terminerons ce paragraphe par le théorème facile suivant qui nous sera utile par la suite.

THÉORÈME 5.- Soit une suite exacte $1 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 1$ de groupes topologiques. Si G' et G'' possèdent la propriété (T), alors G possède aussi la propriété (T). Si G possède la propriété (T), alors G'' possède la propriété (T).

La deuxième assertion est évidente. Démontrons la première. Supposons que T_0 soit adhérent à un point T de $\tilde{G}$. Alors dans $\tilde{G}'$, T_0 est adhérent à la restriction T/G' de T à G' . Il en résulte que T/G' contient T_0 et que T contient une représentation T_1 triviale sur G' . Dans $\tilde{G}''$ le point T_0 est adhérent à la représentation T_1'' déduit de T_1 par passage au quotient. Il en résulte que T_1'' contient T_0 et donc que T contient T_0 .

§ 3.- La propriété (T) pour les groupes semi-simples.

Le but de ce paragraphe est la démonstration du théorème suivant.

THÉOREME 6.- Un groupe de Lie algébrique semi-simple G sur un corps K localement compact non discret, dont toutes les composantes simples sont de rang déployé ≥ 2 , possède la propriété (T).

Pour la démonstration, nous avons besoin d'un certain nombre de préliminaires.

1. Définition de la classe (R).

DÉFINITION.- On dit qu'un groupe G appartient à la classe (R) si l'adhérence dans $\tilde{G}$ de la représentation régulière de G contient sa représentation triviale.

Cette notion a été introduite par Godement dans [5], p. 77, où il remarque que si un groupe G appartient à la classe (R), l'adhérence dans $\tilde{G}$ de la représentation régulière de G contient toutes les représentations unitaires irréductibles de G .

Parmi les exemples de groupes appartenant à la classe (R), on trouve les groupes commutatifs et les groupes compacts.

LEMME 3.- Soit $1 \rightarrow G' \xrightarrow{\psi} G \xrightarrow{\varphi} G'' \rightarrow 1$ une suite exacte de groupes topologiques telle que G' et G'' appartiennent à la classe (R). Alors G appartient à la classe (R).

La représentation régulière R_G de G est induite par la représentation régulière $R_{G'}$ de G' , et comme T_0 est adhérent à $R_{G'}$ dans $\tilde{G}'$, la représentation $\text{Ind } T_0$ induite à G par T_0 appartient dans $\tilde{G}$ à l'adhérence de R_G . La repré-

sensation $\text{Ind } T_0$ n'est autre que la composée avec φ de la représentation régulière de G'' . Le point T_0 est donc adhérent à $\text{Ind } T_0$ dans $\tilde{\mathcal{G}}$, et par conséquent à R_G .

LEMME 4.- Si un groupe G appartient à la classe (R), et si H est un sous-groupe fermé de G , alors H appartient à la classe (R).

Il suffit de montrer que la restriction à H de la représentation régulière de G est multiple de la représentation régulière de H et cette décomposition se déduit de la formule

$$\int_G f(g) dg = \int_{G/H} dv(g) \rho(g) \int_H f(hg) dh,$$

où dg et dh sont les mesures de Haar à gauche sur G et H respectivement, ρ une fonction définie sur G telle que $\rho(hg) = \delta(h)\rho(g)$ pour $h \in H$ et $g \in G$ si δ désigne la fonction modulaire sur H , et v une mesure sur l'espace G/H des H -classes à droite.

2. Des groupes n'appartenant pas à la classe (R).

LEMME 5.- Un groupe libre discret dont le nombre de générateurs est ≥ 2 n'appartient pas à la classe (R).

D'après le lemme 4, il suffit de considérer le cas où G a deux générateurs a et b . Le résultat est connu et la démonstration qui suit est empruntée à [11].

Montrons qu'on peut trouver $\epsilon > 0$ tel qu'il n'existe pas de fonction f de $L^2(G)$ vérifiant simultanément

- 1) $\|f\|_2 = 1$;
- 2) $|\langle R_a f | f \rangle - 1| \leq \epsilon^2/2$;
- 3) $|\langle R_b f | f \rangle - 1| \leq \epsilon^2/2$;

où R désigne ici la représentation régulière gauche de G . Remarquons que ces conditions entraînent $\|R_a f - f\|^2 \leq \epsilon^2$ et $\|R_b f - f\|^2 \leq \epsilon^2$. Supposons qu'il existe une fonction $f \in L^2(G)$ et $\epsilon > 0$ vérifiant 1), 2), 3) et considérons sur G la mesure μ définie par

$$\mu(E) = \int_E |f(g)|^2 dg .$$

On a

$$|\mu(aE) - \mu(E)| = \left| \int_E |f(a^{-1}g)|^2 - |f(g)|^2 dg \right| \leq 2 \sqrt{\int_G |f(a^{-1}g) - f(g)|^2 dg} \leq 2\epsilon ,$$

d'où

$$\mu(aE) \geq \mu(E) - 2\epsilon .$$

Soient P l'ensemble des mots réduits de G qui commencent par une puissance de a , et N le complémentaire de P dans G . On a

$$1 \geq \mu(N) + \mu(aN) + \mu(a^2N) \geq 3\mu(N) - 6\epsilon ,$$

d'où

$$\mu(N) \leq \frac{1}{3} + 2\epsilon .$$

De même, on montre que $\mu(P) \leq \frac{1}{3} + 2\epsilon$. Il en résulte que

$$1 = \mu(N) + \mu(P) \leq \frac{2}{3} + 4\epsilon .$$

Il suffit donc de prendre $\epsilon = 1/13$ pour qu'il n'existe pas de fonction f de $L^2(G)$ vérifiant 1), 2), 3).

COROLLAIRE.- Le groupe $SL(2, K)$, où K est un corps localement compact non discret, n'appartient pas à la classe (R).

On sait que $SL(2, K)$ contient un sous-groupe discret libre à deux générateurs. Dans le cas réel c'est bien connu (par exemple les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

engendrent un tel sous-groupe), et dans le cas p -adique, cela a été démontré par Ihara dans [6]. (Voir aussi l'exposé de Serre à paraître.)

3. Les groupes $SL(3, K)$ et $Sp(4, K)$ possèdent la propriété (T).

THÉOREME 7.- Si K est un corps localement compact non discret, le groupe $SL(3, K)$ possède la propriété (T).

Introduisons les sous-groupes suivants de $SL(3, K)$:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad G' = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} \right\}, \quad G'' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \right\}, \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{et le sous-groupe } S' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } SL(2, K).$$

La démonstration du théorème 7 résultera des lemmes qui suivent.

LEMME 6.- Si une représentation de $SL(3, K)$ possède un vecteur invariant par S , alors ce vecteur est invariant par $SL(3, K)$ tout entier.

Démontrons d'abord l'affirmation correspondante relative au groupe $SL(2, K)$ et à son sous-groupe S' . Soient T une représentation unitaire de $SL(2, K)$ et ξ un vecteur invariant par la restriction de T à S' . La fonction

$$\varphi : g \mapsto \langle T(g)\xi | \xi \rangle,$$

définie sur $SL(2, K)$ est continue et biinvariante par S' . On en déduit par pas-

sage au quotient une fonction $\dot{\varphi}$ continue sur l'ensemble des doubles classes

$S' \backslash SL(2, K) / S'$, lequel est constitué des éléments $S' \begin{pmatrix} 0 & -c^{-1} \\ c & 0 \end{pmatrix} S'$, et

$S' \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} S'$ avec c et $a \in K^*$. Lorsque c tend vers 0, $S' \begin{pmatrix} 0 & -c^{-1} \\ c & 0 \end{pmatrix} S'$

tend vers $S' \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} S'$ quel que soit $a \in K^*$. Il en résulte que $\dot{\varphi}$ est cons-

tante sur la droite pointée $\{S' \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} S'\}$, $a \in K^*$, et donc que

$\varphi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$. Le vecteur ξ est donc invariant par la restric-

tion de T au sous-groupe diagonal D . Par conséquent la fonction φ est aussi

biinvariante par rapport au sous-groupe DS' . On en déduit par passage au quo-

tient une fonction continue sur l'ensemble des doubles classes $DS' \backslash SL(2, K) / DS'$,

lequel est constitué des deux points

$$DS' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} DS' \quad \text{et} \quad DS' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} DS',$$

le premier étant adhérent au deuxième.

Il en résulte que φ est constante sur $SL(2, K)$ et donc que le vecteur ξ est invariant par $SL(2, K)$.

Supposons maintenant que T soit une représentation unitaire de $SL(3, K)$ et ξ un vecteur invariant par S . D'après ce qu'on a précédemment démontré ξ est invariant par G' et G'' et donc par $SL(3, K)$ puisque ces deux sous-groupes engendrent $SL(3, K)$.

COROLLAIRE.- Si T est une représentation unitaire irréductible non triviale de $SL(3, K)$ les composantes irréductibles de sa restriction à H ne sont pas triviales sur S .

LEMME 7.- L'adhérence dans $\tilde{H}$ de la représentation régulière de H contient toutes les représentations irréductibles de H non triviales sur S .

Etudions sommairement les représentations irréductibles de H . Soit T une telle représentation et soit T_S sa restriction au sous-groupe commutatif S . A une telle représentation correspond canoniquement une représentation que nous noterons aussi T_S de la C^* -algèbre commutative $C^*(S)$ du groupe S . A cette représentation, comme à toute représentation d'une C^* -algèbre commutative, est associée canoniquement une mesure $P : \Delta \rightarrow P(\Delta)$ définie sur le spectre de $C^*(S)$ à savoir K^2 et à valeurs dans l'ensemble des projecteurs du bicommutant de $T(S)$. Pour tout $A \in SL(2, K)$, soit T_S^A la représentation de S définie par

$$T_S^A \begin{pmatrix} E & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} E & A\xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} E & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

La mesure associée à cette représentation est

$$P^A : \Delta \rightarrow P(\Delta) = T \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P(\Delta) T \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Par ailleurs, la représentation T_S^A de $C^*(S)$ n'est autre que la composée de l'isomorphisme $f((\xi, \eta)) \mapsto f((\xi, \eta)A)$ de $C^*(S)$ avec la représentation T_S . On en déduit que la mesure P^A est aussi définie par $P^A(\Delta) = P(\Delta A^{-1})$ où ΔA^{-1} désigne l'image de Δ par l'application $(\xi, \eta) \mapsto (\xi, \eta)A^{-1}$.

Les projecteurs $P(\{0, 0\})$ et $P(K^2 - \{0, 0\})$ sont deux projecteurs orthogo-

naux de somme 1 . Ils commutent avec $T(S)$ et $T\begin{pmatrix} \text{SL}(2,K) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc avec $T(H)$.

La représentation T étant irréductible, deux cas peuvent se présenter.

1) $P(\{0,0\}) = 1$; ceci entraîne que T est trivial sur S .

2) $P(K^2 - \{0,0\}) = 1$. La mesure P est concentrée sur $K^2 - \{0,0\}$. Cet espace s'identifie à l'espace homogène H/N par l'application

$$N \cdot \begin{pmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (c,d) ,$$

et le groupe H opère dans $K^2 - \{0,0\}$ par l'application

$$\left[(\xi, \eta) \begin{pmatrix} A & x \\ y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \mapsto (\xi, \eta)A .$$

Il résulte de l'égalité

$$T \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P(\Delta) T \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = P(\Delta A^{-1})$$

que l'espace homogène H/N et la mesure P forment un système d'imprimitivité pour T . Cette représentation est donc induite par une représentation irréductible du groupe spécial nilpotent N [10]. Les représentations irréductibles de N sont bien connues ; elles sont toutes induites par une représentation, de dimension 1 d'un sous-groupe de N [8]. On a ainsi démontré que les représentations irréductibles de H non triviales sur S sont induites par une représentation de dimension 1 d'un sous-groupe nilpotent de H . Comme dans un groupe nilpotent, les représentations de dimension 1 appartiennent à l'adhérence de la représentation régulière, il résulte de la continuité de l'application induction que toute représentation irréductible de H non triviale sur S appartient à l'adhérence dans $\tilde{H}$ de la représentation régulière de H .

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème 7. Soit T un élément de $SL(3, K)^{\sim}$ tel que T_0 soit adhérent à T dans $SL(3, K)^{\sim}$. Deux cas peuvent se présenter. Ou bien la représentation T possède un vecteur invariant par S et alors T contient T_0 d'après le lemme 6 ; ou bien la représentation T ne possède pas de vecteur invariant par S et alors la restriction de T à H est adhérente dans $\tilde{H}$ à la représentation régulière de H d'après le lemme 7. Si ce deuxième cas se présentait, le point T_0 , dans $\tilde{H}$, appartiendrait à l'adhérence de la représentation régulière de H et donc H appartiendrait à la classe (R) . Ceci est absurde, car H contient le sous-groupe fermé $SL(2, K)$ qui n'appartient pas à la classe (R) . Il en résulte que $SL(3, K)$ possède la propriété (T) .

THÉOREME 8.- Si K est un corps localement compact non discret, le groupe $Sp(4, K)$ possède la propriété (T) .

La démonstration de ce théorème est proche de celle du théorème 7. Nous indiquerons donc seulement les détails différents.

Le groupe $Sp(4, K)$ se réalise comme le groupe des matrices d'ordre 4 conservant la forme bilinéaire alternée définie par la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. C'est donc le groupe des matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, où A, B, C, D sont des matrices d'ordre 2 vérifiant les conditions $A^t B = B^t A$, $C^t D = D^t C$, $A^t D - B^t C = E$. Soient H le sous-groupe de $Sp(4, K)$ formé des matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & {}^t A^{-1} \end{pmatrix}$ avec $A^t B = B^t A$, et S le sous-groupe commutatif de $Sp(4, K)$ formé des matrices $\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix}$ avec $B = {}^t B$.

On commence par démontrer comme dans le lemme 6, que si une représentation de $Sp(4, K)$ possède un vecteur invariant par S , alors ce vecteur est invariant par $Sp(4, K)$ tout entier, puis on démontre l'analogie suivant du lemme 7.

LEMME 8.- L'adhérence dans $\tilde{H}$ de la représentation régulière de H contient toutes les représentations irréductibles de H non triviales sur S .

Soit T une représentation irréductible de H non triviale sur S . On lui associe canoniquement une mesure $P : \Delta \rightarrow P(\Delta)$ définie sur le spectre de $C^*(S)$ à valeurs dans l'ensemble des projecteurs du bicommutant de $T(S)$. Le spectre de $C^*(S)$ s'identifie au groupe dual de S , donc à S . On démontre comme dans le lemme 7 que

$$T \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t A^{-1} \end{pmatrix} P(\Delta) T \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t A^{-1} \end{pmatrix}^{-1} = P(A \Delta {}^t A)$$

pour toute matrice A inversible d'ordre 2. Puisque la représentation irréductible T n'est pas triviale sur S , on a $P(\{0\}) = 0$. Le groupe H n'opère pas transitivement sur $S - \{0\}$ par l'application

$$\left[\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & {}^t A^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix} \right] \mapsto \begin{pmatrix} E & A B {}^t A \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

mais l'ensemble des classes d'équivalence des formes quadratiques d'ordre 2 sur

K est toujours dénombrablement séparé pour la structure borélienne induite (cet ensemble est d'ailleurs fini lorsque $\text{car. } K \neq 2$). On en déduit, puisque la représentation T est irréductible, que la mesure P est concentrée sur une seule orbite. Le sous-groupe stabilisateur d'un point B de cette orbite est le sous-

groupe $\left\{ \begin{pmatrix} \theta & C \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \right\}$, où θ appartient au groupe des matrices qui vérifient

$\theta B {}^t \theta = B$, c'est-à-dire le groupe orthogonal correspondant à la forme quadrati-

que B . Il est bien connu que ce sous-groupe s'identifie à K , à K^* , ou au sous-groupe des éléments de norme 1 d'une extension quadratique de K . Dans tous les cas, la représentation T est induite par un groupe produit semi-direct de deux groupes commutatifs, c'est-à-dire par un groupe appartenant à la classe (R) , d'après le lemme 3. On en déduit grâce à la continuité de l'application induction, que T appartient à l'adhérence dans $\tilde{H}$ de la représentation régulière de H .

On termine alors la démonstration du théorème 8 exactement comme celle du théorème 7.

4. Fin de la démonstration du théorème 6.

Le groupe G étant quotient d'un groupe de Lie semi-simple simplement connexe G' , (simplement connexe au sens de la théorie des groupes algébriques ; c'est-à-dire que toute représentation projective de G' de dimension finie provient d'une représentation au sens ordinaire de G'), il suffit, d'après le théorème 5, de démontrer le théorème 6 pour un groupe de Lie semi-simple simplement connexe dont toutes les composantes simples sont de rang déployé ≥ 2 . D'après [2], prop. 5, il existe un sous-groupe compact maximal U et un tore déployé maximal A tel que $G = UAU$, (décomposition de Cartan). Le tore déployé A est contenu dans un sous-groupe déployé simple de même rang ([1], 7). Chaque groupe déployé simple de rang ≥ 2 contient un sous-groupe H localement isomorphe à $SL(3, K)$ ou $Sp(4, K)$; cela résulte de la classification des groupes déployés simples. Grâce aux propriétés d'hérédité du théorème 5 et parce que les groupes $SL(3, K)$ et $Sp(4, K)$ possèdent la propriété (T), le groupe H possède aussi la propriété (T). Par construction $A_0 = A \cap H$ est un tore déployé maximal de H . Chaque transformation du

groupe de Weyl s'identifiant à un automorphisme intérieur de G induit par un élément de U , soient $\omega_1, \dots, \omega_n$ des éléments de U qui induisent les transformations du groupe de Weyl. Celui-ci opère de façon irréductible sur l'algèbre de Lie associée à A , puisque G est simple. Il en résulte que A s'écrit sous la forme $\prod_i \omega_i A_o \omega_i^{-1}$. Le groupe G est donc uniformément engendré par les sous-groupes U et H , lesquels possèdent la propriété (T). D'après le théorème 4, le groupe G possède aussi la propriété (T).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BOREL et J. TITS - Groupes réductifs, I.H.E.S., Publications mathématiques n° 27, 1965, p. 55-150.
- [2] F. BRUHAT et J. TITS - Groupes algébriques sur un corps local : cohomologie galoisienne, décompositions d'Iwasawa et de Cartan, C. R. Acad. Sc., t. 263, 1966, p. 867-869.
- [3] J. DIXMIER - Les C^* algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
- [4] J. M. G. FELL - Weak containment and induced representations of groups, Can. J. Math., t. 14, 1962, p. 237-268.
- [5] R. GODEMENT - Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, Trans. Amer. Math. Soc., t. 63, 1948, p. 1-84.
- [6] Y. IHARA - On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields, J. Math. Soc. Japan, t. 18, n° 3, 1966.
- [7] D. A. KAJDAN - Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés, Funkcional nyj Analiz, t. 1, n° 1, 1967, p. 71-74 (en russe).

- [8] A. A. KIRILLOV - Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents,
Uspekhi Mat. Nauk, t. 17, 1962, p. 57-110. (En russe, traduit en anglais
dans Russian Math. Surveys, t. 17, 1962, p. 53-103.)
- [9] G. W. MACKEY - Induced representations of locally compact groups I, Ann.
Math., t. 55, 1952, p. 101-139.
- [10] G. W. MACKEY - Imprimitivity for representations of locally compact groups I,
Proc. Nat. Acad. Sc., t. 35, 1949, p. 537-545.
- [11] H. YOSHIKAWA - Some remarks on unitary representations of the free groups,
Osaka Math. J., t. 3, 1951, p. 55-63.