

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MICHEL RAYNAUD

Familles de fibrés vectoriels sur une surface de Riemann

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 316, p. 45-60

http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__45_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FAMILLES de FIBRÉS VECTORIELS sur une SURFACE de RIEMANN

(D'après C. S. SESHADRI, M. S. NARASIMHAN et D. MUMFORD)

par Michel RAYNAUD

1. Fibrés stables.

Soient $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et X une courbe algébrique sur $\mathbb{C}$, lisse, propre et connexe, de genre g . À un fibré vectoriel algébrique V sur X , ou ce qui revient au même, à un faisceau algébrique cohérent sur X , localement libre, on associe son rang $r(V)$ et son degré $d(V)$, égal au degré du fibré de rang 1 $\det V = \bigwedge^{r(V)} V$. Notons $F^{r,d}$ l'ensemble des classes, à isomorphisme près, de fibrés vectoriels sur X , de rang r et de degré d . Nous aurons aussi à considérer des familles algébriques de fibrés, paramétrées par des $\mathbb{C}$ -préschémas S . Plus précisément, procédant comme dans [4], on définit un foncteur contravariant $\underline{F}^{r,d} : (\text{Sch}/\mathbb{C})^{\circ} \longrightarrow \text{Ens}$ en prenant le faisceau associé (pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte) au préfaisceau suivant :

$$S \longmapsto \text{Classes, à isomorphisme près, de fibrés vectoriels sur}$$

$$X_S = X \times_{\mathbb{C}} S, \text{ de rang } r, \text{ dont les fibres, au-dessus des points}$$

$$\text{de } S, \text{ sont de degré } d.$$

On a alors $\underline{F}^{r,d}(\mathbb{C}) = F^{r,d}$.

À la courbe X on associe, de la manière habituelle, une surface de Riemann compacte X_{an} et les notions introduites plus haut se transposent en géométrie analytique. D'ailleurs, le foncteur naturel, qui à un fibré algébrique sur X , fait correspondre un fibré analytique sur X_{an} est une équivalence de catégories.

Lorsque $r = 1$, on sait que $\underline{F}^{1,d}$ est représentable par un espace principal homogène sous la jacobienne de X . Par contre, pour $r > 1$, une étude infinitésimale facile ([6] Exp. III 7.1) montre que $\underline{F}^{r,d}$ n'est pas en général représentable. Dans la suite, nous allons porter notre attention sur un sous-foncteur particulièrement intéressant de $\underline{F}^{r,d}$, le foncteur des familles de fibres stables.

DÉFINITION 1.- Un fibré vectoriel V sur X est dit semi-stable (resp. stable) si pour tout sous-fibré (resp. pour tout sous-fibré propre non nul) W de V on a :

$$r(V)d(W) \leq d(V)r(W) \quad (\text{resp. } d(W)/r(W) < d(V)/r(V)).$$

Nous notons $\underline{F}_{s,s}^{r,d}$ (resp. $\underline{F}_s^{r,d}$) le sous-foncteur de $\underline{F}^{r,d}$ défini par les familles algébriques de fibrés à fibres géométriques semi-stables (resp. stables) et on pose

$$\underline{F}_{s,s}^{r,d} = \underline{F}_{s,s}^{r,d}(\mathbb{C}) \quad (\text{resp. } \underline{F}_s^{r,d} = \underline{F}_s^{r,d}(\mathbb{C})).$$

Exemples.- a) Si $g = 0$, il y a identité entre fibrés indécomposables, fibrés stables et fibrés de rang 1.

b) Si $g = 1$, tout fibré indécomposable est semi-stable ([1]) et par suite est stable si $(r,d) = 1$. Par contre si $d = 0$, tout fibré indécomposable contient un sous-fibré de rang 1, de degré 0 (loc. cit.) et par suite n'est pas stable si $r > 1$.

c) Soient V un fibré vectoriel sur X , V^* son dual, L un fibré de rang 1, alors : V stable $\iff V^*$ stable $\iff V \otimes L$ stable et itou pour la semi-stabilité.

PROPOSITION 1.- Soient a un nombre rationnel, $\underline{F}_{s,s}^a$ (resp. $\underline{F}_s^a$) la sous-catégorie pleine, de la catégorie des fibrés vectoriels sur X , formée des fibrés semi-stables (resp. stables) tels que $d = ra$. Alors $\underline{F}_{s,s}^a$ est une catégorie abélienne, dont les objets simples sont les éléments de $\underline{F}_s^a$. Tout élément $V \in \underline{F}_{s,s}^a$ possède une

suite de Jordan-Hölder dont les quotients successifs sont stables ; on note $\text{Gr}(V)$
l'image de V dans le groupe de Grothendieck de $F_{s,s}^a$.

Démonstration.

Soient V et $V' \in F_{s,s}^a$, $u \in \text{Hom}(V, V')$, $N = \text{Ker } u$, $Q = V/N$, I le sous-fibré de V' engendré par l'image de V , $i : Q \rightarrow I$ le monomorphisme canonique. Les hypothèses faites entraînent les inégalités : $d(N) \leq a.r(N)$ (donc $d(Q) \geq a.r(Q)$) et $d(I) \leq a.r(I)$. Par ailleurs, Q et I ont même rang r et la puissance extérieure $r^{\text{ième}}$ de i est non nulle, d'où $d(Q) \leq d(I)$. Il en résulte que i est un isomorphisme, puis que N , Q , I et V'/I sont dans $F_{s,s}^a$, d'où la proposition.

2. Caractérisation transcendante des fibrés stables.

Soient $\tilde{X}$ un revêtement universel de X_{an} , $p : \tilde{X} \rightarrow X_{\text{an}}$ le morphisme canonique, Γ le groupe fondamental de X_{an} . Rappelons qu'à tout faisceau E sur $\tilde{X}$, sur lequel Γ opère de façon compatible avec son action sur $\tilde{X}$, on associe un faisceau sur X_{an} : $p_*^{\Gamma}(E)$, en prenant le sous-faisceau de l'image directe $p_*(E)$, formé des sections invariantes sous Γ . En particulier, à toute représentation ρ de Γ , dans un espace vectoriel V sur $\mathbb{C}$, de rang fini, on fait correspondre le fibré vectoriel trivial $\tilde{V}$ sur $\tilde{X}$, sur lequel Γ opère par $(x, v) \rightarrow (\gamma x, \rho(\gamma)v)$ ($\forall \gamma \in \Gamma$, $x \in \tilde{X}$ et $v \in V$), puis le fibré vectoriel sur X_{an} : $p_*^{\Gamma}(\tilde{V})$, noté $V(\rho)$ et dit associé à ρ . Si ρ est unitaire, on dit que $V(\rho)$ est unitaire.

THÉOREME 1.- Soient X , $\tilde{X}$ et Γ comme ci-dessus. Alors :

(i) Si (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) sont deux représentations unitaires de Γ dans des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ de rang fini et si $\text{Hom}_{\Gamma}(V_1, V_2)$ désigne le sous-

espace de $\text{Hom}(V_1, V_2)$ formé des endomorphismes u tels que $\rho_2(\gamma)u = u \cdot \rho_1(\gamma)$
pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'application naturelle :

$$\text{Hom}_{\Gamma}(V_1, V_2) \longrightarrow \text{Hom}[V_1(\rho_1), V_2(\rho_2)]$$

est un isomorphisme.

(ii) Un fibré vectoriel sur X_{an} est stable de degré 0, si et seulement si, il
est isomorphe à un fibré associé à une représentation unitaire irréductible de Γ .

(iii) Un fibré vectoriel V sur X est isomorphe à un fibré unitaire, si et seule-
ment si, V est somme directe de fibrés stables de degré 0, en particulier, V
est semi-stable de degré 0.

Remarques.— i) Nous laissons au lecteur, le soin de reformuler le théorème 1 en termes
d'équivalence entre des catégories convenables.

ii) Seshadri obtient des résultats analogues pour les fibrés semi-stables de degré
 < 0 . On doit remplacer le revêtement universel $\tilde{X}$ par un espace simplement con-
nex, convenablement ramifié au-dessus de X_{an} .

Démonstration partielle du théorème 1.

a) Démonstration de i). Soient ρ la représentation (unitaire) de Γ dans
 $V = \text{Hom}(V_1, V_2)$ déduite de ρ_1 et ρ_2 . Le fibré $V(\rho)$ s'identifie au fibré
vectoriel des homomorphismes de $V_1(\rho_1)$ dans $V_2(\rho_2)$. Il suffit donc de prouver
le lemme :

LEMME 1.— Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (resp. sur $\mathbb{R}$), de rang fini, ρ
une représentation unitaire (resp. orthogonale) de Γ dans E , $E(\rho)$ le fibré
vectoriel sur X_{an} analytique complexe (resp. réel) associé à ρ . Alors l'appli-
cation naturelle $u : H^0(\Gamma, E) \longrightarrow H^0(X_{\text{an}}, E(\rho))$ est bijective.

Démonstration. Etudions le cas complexe, le cas réel se traitant de manière analogue

L'application u est clairement injective, montrons qu'elle est surjective. Une section de $E(\rho)$ correspond à une fonction analytique sur $\hat{X}$, à valeurs dans E , soit f , telle que $f(\gamma x) = \rho(\gamma)f(x) \quad \forall x \in X$ et $\gamma \in \Gamma$. Si H est une forme hermitienne définie positive sur E , invariante par ρ , la fonction $x \mapsto H(f(x), f(x))$ est donc invariante par Γ et par suite provient d'une fonction h sur X_{an} . Comme h est pluri-sous-harmonique et X_{an} compact connexe, h est constante, donc f est constante et le lemme en résulte.

b) Démonstration de ii) dans le cas des fibrés vectoriels de rang 1.

Soient U le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 et $O_{X_{\text{an}}}^*$ le faisceau des unités de $O_{X_{\text{an}}}$, de sorte que l'on a le diagramme commutatif suivant, où les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & U \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow v & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & O_{X_{\text{an}}} & \xrightarrow{u} & O_{X_{\text{an}}}^* \longrightarrow 0 \end{array}$$

(u est l'application exponentielle et v la multiplication par le nombre complexe i). On en déduit facilement que l'on a le diagramme exact suivant :

$$\begin{array}{ccccc} H^1(X, \mathbb{R}) & \longrightarrow & H^1(X, U) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \\ H^1(X, O_{X_{\text{an}}}) & \longrightarrow & H^1(X, O_{X_{\text{an}}}^*) & \longrightarrow & H^2(X, \mathbb{Z}) \end{array} .$$

Il suffit alors de remarquer que les classes de fibrés de rang 1, de degré 0 correspondent à l'image de $H^1(X, O_{X_{\text{an}}})$ dans $H^1(X, O_{X_{\text{an}}}^*)$ tandis que les classes de fibrés unitaires correspondent à l'image de $H^1(X, U)$ dans $H^1(X, O_{X_{\text{an}}}^*)$.

c) Si ρ est une représentation unitaire de Γ dans V , $V(\rho)$ est semi-stable.

D'après b) appliqué à $\det(V)$, V est de degré 0. Soit W un sous-fibré non

nul de V ; montrons que l'on a $d(W) \leq 0$. Quitte à remplacer V par $\bigwedge^{r(W)} V$, on peut supposer W de rang 1 . Supposons $d(W) > 0$. Il existe alors $L \in F^{1,0}$, tel que $H^0(X, L \otimes W)$ soit non nul . Comme L est unitaire d'après b), quitte à remplacer V par $V \otimes L$, on peut supposer $H^0(X, W) \neq 0$. Soit $\rho = \bigoplus \rho_i$ une décomposition de ρ en facteurs irréductibles, $V = \bigoplus V_i$ la décomposition correspondante de V , p_i la projection de V sur V_i . Comme W est de rang 1 , il existe un indice i tel que le composé $W \rightarrow V \xrightarrow{p_i} V_i$ soit injectif, de sorte que $H^0(X, V_i) \neq 0$. D'après le lemme 1, V_i est nécessairement le fibré trivial de rang 1 : Comme $d(W) \leq d(V_i)$, on a $d(W) \leq 0$, d'où une contradiction.

Pour achever la démonstration du théorème 1, il est clair qu'il suffit de montrer que tout fibré stable V , de degré 0 , est associé à une représentation unitaire (nécessairement irréductible puisque V est indécomposable (cf. prop. 1)). Ce point délicat sera établi plus loin.

3. Le théorème principal.

Rappelons que le groupe fondamental Γ est engendré par $2g$ générateurs $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$, liés par la seule relation : $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$. Par suite, l'espace des représentations de Γ dans le groupe linéaire $GL_r(\mathbb{C})$ (resp. dans le groupe unitaire $U(r)$), muni de la topologie de la convergence simple, est homéomorphe à l'espace sous-jacent à un certain sous-espace analytique fermé R^c (resp. R^u) du produit $GL_r(\mathbb{C})^{2g}$ (resp. $U(r)^{2g}$). En particulier, R^u est compact, et il en est de même de l'espace R^u des classes de représentations unitaires de rang r de Γ .

D'autre part, soit Q le quotient de l'ensemble $F_{s,s}^{r,0}$ obtenu en identifiant deux fibrés semi-stables V et V' tels que $\text{Gr}(V) = \text{Gr}(V')$ (prop. 1) et soit Q_s

l'image de $F_{\underline{s}}^{r,0}$ dans Q . Il résulte du n° 2 c), qu'il existe une application canonique de R^u dans $F_{\underline{s},\underline{s}}^{r,0}$ qui, à la classe de la représentation unitaire ρ , fait correspondre la classe du fibré associé $V(\rho)$. Le théorème 1 nous dit alors que l'application composée $j : R^u \rightarrow F_{\underline{s},\underline{s}}^{r,0} \rightarrow Q$ est bijective, donc Q est muni d'une topologie d'espace compact. Le théorème suivant nous dit que l'espace compact Q est sous-jacent à une variété projective qui apparaît comme une compactification naturelle de l'ouvert $Q_{\underline{s}}$ des points stables.

THÉOREME 2.- Supposons que la courbe X soit de genre $g \geq 2$. Alors il existe un schéma Q et un morphisme $q : F_{\underline{s},\underline{s}}^{r,0} \rightarrow Q$, tel que, pour tout préschéma Z et pour tout morphisme $u : F_{\underline{s},\underline{s}}^{r,0} \rightarrow Z$, il existe un unique morphisme $v : Q \rightarrow Z$ tel que $v \cdot q = u$. De plus :

- a) Le schéma Q est une variété projective, normale, de dimension $r^2(g-1) + 1$.
- b) Deux points V et V' de $F_{\underline{s},\underline{s}}^{r,0}$ sont tels que $q(V) = q(V')$ si et seulement si $\text{Gr}(V) = \text{Gr}(V')$, de sorte que $Q(\mathbb{C})$ s'identifie à Q .
- c) Le sous-ensemble $Q_{\underline{s}}$ de Q , formé des points stables est l'ensemble des points rationnels d'une sous-variété ouverte $Q_{\underline{s}}$ de Q . De plus $Q_{\underline{s}}$ est lisse et représente le foncteur $F_{\underline{s}}^{r,0}$.
- d) L'application canonique $R^u \rightarrow R^u \xrightarrow{j} Q = Q(\mathbb{C})$ est sous-jacente à un morphisme d'espaces analytiques réels et induit un homéomorphisme de R^u sur $Q(\mathbb{C})$.

Pour établir le théorème 2, nous utiliserons la théorie du passage au quotient de Mumford [7], que nous allons brièvement rappeler.

4. Action d'un groupe réductif sur un schéma. Passage au quotient.

Soit G un groupe réductif qui opère sur un schéma X de type fini sur $\mathbb{C}$.

a) Cas où X est affine d'anneau A . Comme toute représentation, de dimension finie sur $\mathbb{C}$, d'un groupe réductif, est complètement réductible, un raisonnement classique montre que l'anneau A^G des invariants de A sous G est de type fini sur $\mathbb{C}$ et sépare deux fermés saturés de X qui sont disjoints. On en déduit que $Y = \text{Spec}(A^G)$ est un quotient catégorique de X (c.à.d. tout morphisme de X dans un préschéma Z , invariant par G , se factorise de manière unique à travers Y). Si de plus G opère régulièrement sur X , c.à.d. si la dimension du stabilisateur des points de X est localement constante, alors les orbites des points fermés de X sont fermées et Y est un quotient géométrique de X (c.à.d., Y est le quotient de X par G dans la catégorie des espaces annelés).

b) Cas général.

DÉFINITION 2.- Soit L un faisceau inversible sur X . Une G -linéarisation de L est la donnée d'une action de G sur le fibré vectoriel de rang 1 défini par L , compatible avec l'action de G sur X .

Exemple 1.- Si E est un espace vectoriel de rang fini sur $\mathbb{C}$, les actions de G sur l'espace projectif $P(E)$, pour lesquelles le faisceau ample canonique $\mathcal{O}_P(1)$ est G -linéarisé, sont exactement les actions de G qui proviennent d'une représentation de G dans E .

Notons qu'une G -linéarisation de L définit une G -linéarisation de $L^n = L^{\otimes n}$, ($n \in \mathbb{Z}$) et que G opère sur $H^0(X, L^n)$. Si $f \in H^0(X, L^n)$ on note X_f le plus grand ouvert de X au-dessus duquel f engendre L^n . Nous pouvons alors formuler

le résultat principal :

PROPOSITION 2.- Soit X un schéma propre sur $\mathbb{C}$, sur lequel opère un groupe réductif G et qui est muni d'un faisceau ample G -linéarisé L . Le schéma X s'identifie donc au spectre homogène de l'algèbre graduée $S = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, L^n)$ ([5] II 2.3.4.1).
soit S^G la sous-algèbre graduée de S des invariants sous G , et soit Y le schéma projectif, égal au spectre homogène de S^G . Alors :

- (i) L'injection $S^G \rightarrow S$ définit une application rationnelle de X dans Y , dont le domaine de définition $X_{s,s}$ est l'ensemble des points semi-stables de X (relativement à la G -linéarisation considérée). C'est l'ensemble des points x de X tels qu'il existe $n > 0$ et $f \in H^0(X, L^n)$, invariante sous G , tel que $x \in X_f$.
De plus Y est un quotient catégorique de $X_{s,s}$.
- (ii) Soit X_s l'ouvert de $X_{s,s}$ formé des points stables, c.à.d. l'ensemble des $x \in X$, pour lesquels il existe f comme dans (i), tel que G opère régulièrement sur X_f . Alors il existe un ouvert U de Y qui est un quotient géométrique de X_s .

Par ailleurs, Mumford donne un critère commode pour reconnaître si un point de X est stable (resp. semi-stable). Nous allons l'utiliser pour traiter l'exemple suivant qui nous sera utile plus loin :

Exemple 2.- Soit $G_{h,r}$ la variété grassmannienne des espaces vectoriels quotients de dimension r d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ de dimension h . Le groupe linéaire $G = GL(E)$ opère de façon naturelle sur $G_{h,r}$ et le plongement canonique de $G_{h,r}$ dans $P(\bigwedge^r(E))$ montre qu'il existe une G -linéarisation naturelle du faisceau ample canonique L sur $G_{h,r}$. Plus généralement, pour tout entier $N > 0$, il existe une G -linéarisation naturelle du faisceau ample sur $(G_{h,r})^N$ égal au produit tensoriel des faisceaux L sur chacun des facteurs.

PROPOSITION 3.- Un point $(V_1, \dots, V_N)$ de $G_{h,r}^N(\mathbb{C})$ est semi-stable (resp. stable avec pour stabilisateur le centre de G) si et seulement si, pour tout sous-espace W de E (resp. pour tout sous-espace propre non nul) on a :

$$\frac{\sum_i r(W_i)}{N r} \geq \frac{r(W)}{h} \quad (\text{resp. } \frac{\sum_i r(W_i)}{N r} > \frac{r(W)}{h})$$

où W_i est l'image de W dans V_i et $r(V)$ est le rang de l'espace V .

5. Démonstration du théorème 2.

a) Construction d'une "jolie famille" algébrique de fibrés.

Soit $\mathcal{O}_p(1)$ un faisceau inversible ample sur X , de degré 1. Pour tout faisceau cohérent F sur X , on note $F(n)$ le faisceau $F \otimes \mathcal{O}_p(1)^{\otimes n}$. L'entier r est fixé jusqu'à la fin de la démonstration.

Notons d'abord que $F_{s,s}^{r,0}$ est une famille limitée, c.à.d. qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $V \in F_{s,s}^{r,0}$, $V(n)$ soit engendré par ses sections et $H^1(X, V(n))$ soit nul. En effet, la proposition 1 nous ramène au cas où V est indécomposable de degré 0 et de rang $\leq r$, auquel cas la propriété résulte de [1] lemme 7. Pour n fixé $\geq n_0$, on a alors par Riemann-Roch :

$$r(H^0(X, V(n))) = rn + r(1 - g) = h \quad \forall V \in F_{s,s}^{r,0}.$$

Soit E le fibré trivial sur X de rang h et soit H le schéma quasi-projectif sur $\mathbb{C}$ qui représente le foncteur suivant (cf. [3]) :

Pour tout $\mathbb{C}$ préschéma S , $H(S)$ est l'ensemble des faisceaux F sur X_S vérifiant les conditions suivantes :

- (i) F est un quotient de E_S où E_S est l'image réciproque de E sur X_S .
- (ii) F est localement libre de rang r et pour tout point s de S , la fibre

F_s de F est de degré rn .

(iii) $\forall s \in S$, $H^1(X_s, F_s) = 0$ et $H^0(X_s, E_s) \rightarrow H^0(X_s, F_s)$ est surjectif (donc bijectif).

On trouve ainsi, pour tout $n \geq n_0$, un schéma H et un fibré vectoriel V_H sur X_H , qui est de rang r , qui est un quotient de E_H et qui possède la propriété suivante :

Pour tout $\mathbb{C}$ -préschéma S et tout fibré W sur X_S qui est semi-stable, de rang r et de degré 0 , il existe un recouvrement ouvert S_i de S et des morphismes $u_i : S_i \rightarrow H$ tels que la restriction de $W(n)$ au-dessus de S_i soit isomorphe à l'image réciproque de V_H par u_i . En prime, on note les propriétés suivantes :

- (i) Le groupe linéaire GL_h opère sur H et deux points x et x' de $H(\mathbb{C})$ sont dans la même orbite si et seulement si $V_x \simeq V_{x'}$.
- (ii) Le schéma H est lisse, de dimension $r^2(g-1) + h^2$ (utiliser l'étude différentielle faite dans [3]).
- (iii) H est irréductible (utiliser le fait qu'un fibré vectoriel de rang r sur X qui est engendré par ses sections, est extension d'un fibré de rang 1 par le fibré trivial de rang $r-1$ ([1] théorème 2)).

b) Passage au quotient.

A toute suite de N points rationnels (distincts) de X , soient $P_1, \dots, P_N$ on associe de façon évidente un morphisme $i_{P_1, \dots, P_N} : H \rightarrow G_{h,r}^N$ (cf. n° 4, Exemple 2). Ce morphisme est compatible avec l'action de GL_h et est injectif pour N assez grand. Mais on a bien mieux :

PROPOSITION 4.- (i) Les points de $H(\mathbb{C})$ qui correspondent à des fibrés semi-stables

(resp. stables) sont les points d'un ouvert $H_{s,s}$ (resp. H_s) de H .

(ii) Si n et N sont choisis assez grands et si $V \in H_{s,s}(\mathbb{C})$, $i_{P_1, \dots, P_N}(V)$ est un point semi-stable de $G_{h,r}^N$, au sens du n° 4, et est stable (avec pour stabilisateur le centre de GL_h) si et seulement si V est stable.

Idée de la démonstration de la proposition 4. Pour simplifier, si M est un faisceau cohérent sur X , nous posons $h^i(M) = r H^i(X, M)$. Soient $V \in F_{s,s}^{r,0}$, W un sous-fibré de V , m un entier $\geq n^0$. On a alors d'après Riemann-Roch :

$$(1) \quad h^0(W(m))/r(W(m)) - h^0(V(m))/r(V(m)) = h^1(W(m))/r(W(m)) + d(W)/r(W) - d(V)/r(V).$$

Par ailleurs, si $W(m)$ est engendré génériquement par ses sections (c.à.d. si

$H^0(X, W(m))$ engendre un sous-fibré de $W(m)$ ayant même rang que W), on montre que l'on a $h^0(W(m)) \leq d(W(m)) + r(W(m))$, de sorte que le second membre de (1) est majoré par $g + d(W)/r(W) - d(V)/r(V)$. Or la famille des W pour lesquels ce dernier nombre est ≥ 0 est limitée, d'où le lemme :

LEMME 2.- Si n est choisi assez grand, pour tout $V \in H_s(\mathbb{C})$ et pour tout sous-fibré propre non nul, W de V , qui est génériquement engendré par ses sections, on a :

$$h^0(W)/r(W) - h^0(V)/r(V) < 0.$$

L'entier n étant ainsi choisi, prouvons par exemple, que si $V \in H_s(\mathbb{C})$, et si $N \geq 2h^2nr$, $i_{P_1, \dots, P_N}(V)$ est stable. Soit F un sous-espace propre, non nul, de $H^0(X, V)$, W le sous-fibré de V engendré par F , F_i l'image de F dans la fibre de W au point P_i et notons que F engendre W sauf en au plus $d(W)$ points. On a alors les inégalités :

$$(2) \quad 0 \leq \frac{\sum [r(W) - r(F_i)]}{N r(F)} \leq \frac{d(W)r(W)}{N r(F)} \leq \frac{d(V)r(W)^2}{N r(F)r(V)} \leq \frac{nr}{N} \leq \frac{1}{2h^2}.$$

Par ailleurs, d'après le lemme 2, on a si $W \neq V$:

$$r(W)/r(F) - r(V)/h^0(V) \geq r(W)/h^0(W) - r(V)/h^0(V) > 0$$

et comme $r(F) \leq h^0(V) = h$, on a même :

$$(3) \quad r(W)/r(F) - r(V)/h^0(V) \geq 1/h^2.$$

Si $W = V$, comme $r(F) \neq h^0(V)$, (3) est trivialement vérifiée. Il résulte alors de (2) et (3) que l'on a :

$$\frac{\sum r(F_i)}{N r(F)} - \frac{r(V)}{h^0(V)} \geq \frac{1}{2h^2} > 0.$$

Mais c'est dire que $i_{P_1, \dots, P_N}(V)$ est stable.

On suppose désormais que les entiers n et N satisfont aux conditions de la proposition 4 et on pose $i = i_{P_1, \dots, P_N}$. Il résulte alors de la proposition 2, qu'il existe un quotient géométrique $\underline{Q}_s$ de H_s par $Gl_h(\mathbb{C})$; $\underline{Q}_s$ est lisse et représente le foncteur $\underline{F}_s^{r,0}$ (cf. [7] 0,9.). Soit d'autre part Y le quotient catégorique de l'ouvert des points semi-stables de $G_{h,r}^N$ et $\underline{Q}$ le normalisé de l'image fermée de $H_{s,s}$ dans Y . Il est clair que l'on a un morphisme canonique $q : \underline{F}_{s,s}^{r,0} \rightarrow \underline{Q}$. Soit $V \in H_{s,s}(\mathbb{C})$; comme V possède une suite de composition dont les quotients successifs sont stables (prop. 1), on montre que $i(V)$ possède une propriété analogue, ce qui nous permet de définir le gradué de $i(V)$: $Gr i(V)$. On montre alors que $Gr(V) \simeq Gr(V') \iff Gr i(V) \simeq Gr i(V')$ et que Y sépare les éléments semi-stables qui ont des gradués non isomorphes. Il en résulte que $Gr(V) \neq Gr(V') \implies q(V) \neq q(V')$. Enfin, les seules orbites fermées sous Gl_h dans $H_{s,s}(\mathbb{C})$ sont celles dont les points correspondent à des fibrés semi-stables, somme directe de fibrés stables, on en déduit que $\underline{Q}$ est un quotient catégorique de $H_{s,s}$ et satisfait à la propriété universelle énoncée dans le théorème 2.

c) Fin de la démonstration des théorèmes 1 et 2.

Reprenons les notations introduites dans le n° 3 et notons que les constructions faites dans la partie a) de ce n° se transposent immédiatement en géométrie analytique. A la représentation universelle de Γ dans $GL_r(\mathbb{C})$, est associé un fibré analytique F sur $X_{an} \times_{\mathbb{C}} R^C$. L'ouvert R^{nC} de R^C , correspondant aux fibres semi-stables de F , contient R^u (n° 2, c)) et F définit un morphisme analytique $j' : R^{nC} \rightarrow \underline{Q}_{an}$. La restriction de j' à R^u est donc un morphisme analytique réel, noté encore j' . Il est clair que la démonstration des théorèmes 1 et 2 sera achevée si on prouve que $j'(R^u) = \underline{Q}(\mathbb{C})$. Comme R^u est compact, $j'(R^u)$ est fermé dans $\underline{Q}_{an}$. Si R_{irr}^u est le sous-ensemble de R^u qui correspond aux représentations irréductibles, $j'(R_{irr}^u)$ est fermé dans $(\underline{Q}_s)_{an}$, et d'autre part, cet ensemble est non vide pour $g \geq 2$. Comme $\underline{Q}_s$ est irréductible, donc $(\underline{Q}_s)_{an}$ connexe, il suffit de montrer que $j'(R_{irr}^u)$ est ouvert dans $(\underline{Q}_s)_{an}$. Pour établir ce point, nous montrons que R_{irr}^u est une variété analytique et que l'application linéaire tangente à j' est surjective. Or, si (E, ρ) est une représentation unitaire irréductible de Γ , de rang r , l'espace tangent à R^u , au point correspondant à ρ , s'identifie au groupe des 1-cocycles $Z^1(\Gamma, Lie U(r))$, (où Γ opère sur $Lie U(r)$ par la représentation $ad(\rho)$ composée de ρ et de la représentation adjointe de $U(r)$), tandis que l'espace tangent à $\underline{Q}_s$ au point $j'(E, \rho)$ s'identifie à $H^1(X_{an}, Hom E(\rho), E(\rho))$. Comme le complexifié de $U(r)$ est $GL(E)$, $Lie U(r)$ a pour complexifié $End(E, E)$. Soit V le faisceau des sections du fibré vectoriel $End(E, E) (ad \rho)$ et soit W le faisceau sur X_{an} , qui est associé au faisceau constant sur $\tilde{X}$ défini par $Lie U(r)$. L'application linéaire tangente à j' au point (E, ρ) est alors la composée des applications canoniques suivantes :

$$Z^1(\Gamma, \text{Lie } U(r)) \longrightarrow H^1(\Gamma, \text{Lie } U(r)) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{\text{an}}, W) \longrightarrow H^1(X_{\text{an}}, V) .$$

Des majorations immédiates, montrent qu'il suffit de prouver que l'application

$$H^1(X_{\text{an}}, W) \longrightarrow H^1(X_{\text{an}}, V) \text{ est injective, ou encore que l'application}$$

$H^0(X_{\text{an}}, V) \longrightarrow H^0(X_{\text{an}}, V/W)$ est surjective. Mais le faisceau V/W s'identifie au faisceau des sections du fibré vectoriel analytique réel, associé à $(\text{Lie } U(r), \text{ad } \rho)$ et on applique le lemme 1.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. F. ATIYAH - Vector bundles over an elliptic curve. Proc. London Math. Soc. t. 7, 1957. (Voir aussi Sémin. Bourbaki 1957/58, n° 154.)
- [2] A. GROTHENDIECK - Sur le mémoire de A. Weil, Généralisation des fonctions abéliennes, Sémin. Bourbaki 1956/57, n° 141.
- [3] A. GROTHENDIECK - Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert. Sémin. Bourbaki 1960/61, n° 221.
- [4] A. GROTHENDIECK - Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique V : les schémas de Picard. Sémin. Bourbaki 1961/62, n° 232.
- [5] A. GROTHENDIECK - Eléments de géométrie algébrique. Publ. Math. I.H.E.S.
- [6] A. GROTHENDIECK - Séminaire de géométrie algébrique. Séminaire I.H.E.S., 60/61.
- [7] D. MUMFORD - Geometric invariant theory. Springer Verlag 1965.
- [8] M. S. NARASIMHAN et C. S. SESHADRI - Holomorphic vector bundles on a compact Riemann surface. Math. Ann., 1964, 155.
- [9] M. S. NARASIMHAN et C. S. SESHADRI - Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface. Ann. of Math., 82, 1965.
- [10] C. S. SESHADRI - Space of unitary vector bundles on a compact Riemann surface. A paraître.
- [11] A. WEIL - Introduction à l'étude des variétés kählériennes. Paris Hermann 1958.

ERRATA

Page 316-04 - Le lemme 1 doit être modifié comme suit :

LEMME 1.- Soient ρ une représentation unitaire (resp. orthogonale) de Γ dans un espace vectoriel E complexe (resp. réel) de rang fini, $E(\rho)$ (resp. $E_h(\rho)$) le faisceau sur X_{an} associé au faisceau sur $\tilde{X}$ des fonctions holomorphes (resp. harmoniques) à valeurs dans E . Alors l'application : $H^0(\Gamma, E) \rightarrow H^0(X_{an}, E(\rho))$ (resp. $H^0(\Gamma, E) \rightarrow H^0(X_{an}, E_h(\rho))$) est bijective.

Page 316-15 - Supprimer les lignes 5 et 6 et lire :

faisceau associé au faisceau sur $\tilde{X}$ des fonctions harmoniques à valeurs dans $Lie U(r)$ et on applique le lemme 1.

Généralisation.- Le foncteur $\underline{F}_S^{r,d}$ s'introduit plus généralement pour une " famille de courbes X au-dessus d'un préschéma S ", définie par un S -schéma X , projectif et lisse sur S , à fibres géométriquement connexes de genre g . Lorsque S a toutes ses caractéristiques résiduelles nulles, la méthode exposée ici lorsque $S = Spec(\mathbb{C})$ et $d = 0$, jointe à une technique de descente, permet encore de montrer que $\underline{F}_S^{r,d}$ est représentable par un S -schéma lisse, à fibres connexes de dimension $r^2(g - 1) + 1$. Lorsqu'on disposera de l'analogue de la prop. 2 sur un corps de caractéristique $p > 0$ (cf. [7]. Préface) le même résultat vaudra sans restriction sur S .