

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PAUL GÉRARDIN

Représentations du groupe SL_2 d'un corps local

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 332, p. 309-343

http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__309_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATIONS DU GROUPE SL_2 D'UN CORPS LOCAL

(d'après GEL'FAND, GRAEV et TANAKA)

par Paul GÉRARDIN

Gel'fand et Graev ont déterminé "toutes" les représentations unitaires irréductibles du groupe SL_2 d'un corps local k [3]. A partir de la représentation projective de Weil [9] Tanaka retrouve les séries discrètes [7]. Plus généralement, à chaque sous-groupe de Cartan C de $G = SL_2(k)$ est attachée une algèbre B de dimension 2 sur k dont C est le groupe des éléments de norme 1. La représentation projective de Weil relative au groupe additif de B définit une représentation de G dans $\mathcal{P}(B)$. Le k -automorphisme de conjugaison de B se transmet à $\mathcal{P}(B)$ et commute à la représentation. Celle-ci se décompose à l'aide de la représentation évidente de C dans $\mathcal{P}(B)$. Si B est un corps quadratique sur k on obtient une série discrète ; la série continue provient de l'algèbre déployée.

Tanaka a également résolu ce problème pour les groupes SL_2 des corps finis et des anneaux $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ (cf. [7] et [12]).

0. LA REPRÉSENTATION PROJECTIVE DE WEIL [9]

Soit G un groupe abélien localement compact, G' son dual et $\langle x, x' \rangle$ le bicaractère de $G \times G'$ définissant la dualité. On munit G' de la mesure de Haar duale de celle de G . Le groupe symplectique de G , $Sp\ G$, est le groupe des auto-

morphismes de $G \times G'$ laissant invariant le bicaactère de $G \times G'$ qui a pour morphisme $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Appelons $X_2(G)$ le groupe des caractères quadratiques de G , c'est-à-dire des applications continues q de G dans T telles que

$$(0.1) \quad q(x+y)q(x)^{-1}q(y)^{-1} = \langle x, y u_q \rangle \quad \text{pour tous } x, y \text{ dans } G$$

où u_q est un morphisme symétrique de G dans G' dit morphisme de q . Si u_q est inversible, q est dit non dégénéré ; dans ce cas on peut lui définir une transformée de Fourier

$$(0.2) \quad q(x') = \gamma(q) |u_q|^{-\frac{1}{2}} q(x' u^{-1})^{-1} \quad \text{où } \gamma(q) \text{ est dans } T \text{ et } x' \in G'$$

cette formule signifiant qu'associer à f de $\mathcal{S}(G)$ la fonction $q * f$ est un automorphisme de $\mathcal{S}(G)$ qui vérifie

$$(0.3) \quad (q * f)^\wedge = q \hat{f}.$$

Si on prend pour groupes G les groupes additifs des espaces vectoriels $\underline{k}^n$ sur un corps local $\underline{k}$, on montre que l'application γ définie par (0.2) est un caractère du groupe de Witt du corps local $\underline{k}$ (Weil [9], Théorème 2 et Proposition 3).

Soit $H(G)$ le groupe des opérateurs unitaires de $L^2(G)$ définis par

$$(0.4) \quad U(z, t) f(x_1) = t f(x + x_1) \langle x_1, x' \rangle$$

où

$$z = (x, x') \in G \times G' \quad \text{et} \quad t \in T$$

ce groupe est isomorphe au produit topologique $G \times G' \times T$ muni de la loi tirée de (0.4) par composition des opérateurs. Appelons $B(G)$ le groupe des automorphismes de $H(G)$ qui sont triviaux sur le centre, et $N(G)$ le normalisateur de

$H(G)$ dans le groupe unitaire de $L^2(G)$. On a alors le résultat

THÉOREME 0.1 (Segal). Avec les notations précédentes, on a

(a) le centralisateur de $H(G)$ dans le groupe unitaire de $L^2(G)$ est son centre T .

(b) Les éléments de $B(G)$ sont induits par ceux de $N(G)$,

(c) le quotient $N(G)/T$ est isomorphe à $B(G)$.

(c) fournit une représentation projective du groupe $B(G)$ dans $L^2(G)$ et une projection de $N(G)$ sur $B(G)$ qu'on note $\bar{s}$ pour s dans $N(G)$

$$(0.5) \quad s^{-1}U(z,t)s = U(z,t)\bar{s} = U(zu_{\bar{s}}, tq_{\bar{s}})$$

$u_{\bar{s}}$ est un automorphisme symplectique de G dit partie symplectique de $\bar{s}$ et $q_{\bar{s}}$ un caractère quadratique de $G \times G'$ dit partie quadratique de $\bar{s}$.

On peut relever par cette projection :

- le monomorphisme de $X_2(G)$ dans $B(G)$ donné pour q dans $X_2(G)$ par

$$(0.6) \quad \bar{n}(q) = ((\begin{smallmatrix} 1 & u_q \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}), 1) \text{ en } n(q)f(x_1) = q(x_1)f(x_1)$$

- le monomorphisme de $\text{Aut } G$ dans $B(G)$ donné sur l'automorphisme t par

$$(0.7) \quad \bar{a}(t) = ((\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{smallmatrix}), -1) \text{ en } a(t)f(x_1) = |t|^{\frac{1}{2}} f(x_1 t)$$

(on a noté par un accent le passage d'un morphisme à son morphisme dual)

- le sous-ensemble, vide si G n'est pas isomorphe à son dual, image dans $B(G)$ de $\text{Isom}(G', G)$ par l'application $\bar{w}$:

$$(0.8) \quad \bar{w}(v) = ((\begin{smallmatrix} 0 & -v'^{-1} \\ v & 0 \end{smallmatrix}), \langle x, -x' \rangle) \text{ en } w(v)f(x_1) = |v|^{-\frac{1}{2}} \hat{f}(-x_1 v'^{-1}).$$

Appelons "troisième élément" d'un endomorphisme g de $G \times G'$ le morphisme v_g de G' dans G défini par $(0, x')g = (x'v_g, \dots)$ pour x' dans G' .

THÉOREME 0.2 (Weil [9], Théorème 3). Soit $\Omega(G)$ la partie de $B(G)$ faite de ceux des automorphismes dont la partie symplectique a son troisième élément inversible.

Alors :

(a) tout élément s de $\Omega(G)$ admet la décomposition unique

$$(0.9) \quad s = \bar{n}(q_s^1) \bar{w}(v_s) \bar{n}(q_s^2)$$

où v_s est le troisième élément de u_s

(b) pour s dans $\Omega(G)$ on définit l'opérateur unitaire $W(s)$ par

$$(0.10) \quad W(s) = n(q_s^1) w(v_s) n(q_s^2) .$$

Alors W est un relèvement de $\Omega(G)$ à $N(G)$, et si $s_1, s_2, s_3 = s_1 s_2$ sont trois éléments de $\Omega(G)$ on a

$$(0.11) \quad W(s_1) W(s_2) = \gamma(q) W(s_3)$$

où q est le caractère quadratique de G :

$$q(x) = q_{s_1}(0, x v_{s_1}^{-1}) q_{s_2}(x, -x t_{s_2} v_{s_2}^{-1})$$

(t_s est le "premier élément" de u_s).

Enfin, $Sp(G)$ se plonge homomorphiquement dans $B(G)$ lorsque $x \mapsto 2x$ est un automorphisme de G , en associant (s, q_s) à $s = \begin{pmatrix} t & u \\ v & w \end{pmatrix}$ de $Sp G$, où

$$q_s(x, x') = \langle xu, 2^{-1}xt \rangle \langle 2^{-1}x'v, x'w \rangle \langle x'v, xu \rangle .$$

Dans ce cas le caractère quadratique q de (0.11) est

$$q(x) = \langle 2^{-1}x, x v_{s_1}^{-1} v_{s_3} v_{s_2}^{-1} \rangle .$$

1. CORPS LOCAUX

Le corps de base k est un corps local, c'est-à-dire un corps commutatif localement compact non discret. La valeur absolue est définie à l'aide d'une mesure de Haar sur son groupe additif. Si k est à valuation discrète, on prend les notations usuelles : $\mathcal{O}, \mathfrak{o} = (\pi), \mathcal{O}^\times = \mathcal{U}, q = \text{Card } \mathcal{O}/\mathfrak{o}, \text{ val } t = \text{Card } \mathcal{O}/t\mathcal{O}$ pour t entier (on supposera toujours q impair, i.e. $|2| = 1$) le groupe multiplicatif de k , $k^\times$, est isomorphe au produit $(1 + \mathfrak{o}) \times \mathcal{U}/(1 + \mathfrak{o}) \times \mathbb{Z}$, le second facteur correspond au groupe fini des racines $(q-1)$ mes de l'unité, on en appellera ε un générateur (lemme de Hensel) ([3] chap. II § 1).

La décomposition polaire de $k^\times$ permet de munir le groupe $X(k^\times)$ de ses caractères généralisés d'une structure de variété analytique, produit du groupe (discret) dual du groupe des éléments de norme 1 par le groupe des caractères généralisés non ramifiés (i.e. qui ne dépendent que de la valeur absolue). On notera $\lambda(t) = t^\lambda$ pour $\lambda \in X(k^\times)$ et $t \in k^\times$; l'exposant de λ est le réel $e = \text{Ex} \lambda$ défini par $|t^\lambda| = |t|^e$. On écrira aussi $t^{\frac{s}{e}} = |t|^s$, $s \in \mathbb{C}$ ([8]).

Le dual du groupe additif de k s'identifie à k par le bicaractère $\tau(xy)$, où τ est un caractère additif non trivial de k . Si k est à valuation discrète, on choisit un caractère τ qui identifie $\mathcal{O}$ à son orthogonal; sinon on prend $\tau(x) = e^{2\pi i x}$ si $k = \mathbb{R}$, et le composé de celui-ci avec la forme linéaire $\text{Tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ si $k = \mathbb{C}$. On définit alors la transformation de Fourier en prenant la mesure de Haar autoduale de k . A chaque vectoriel E de dimension finie sur k est associé l'espace de ses fonctions standard $\mathcal{V}(E)$: si $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ce sont les fonctions "indéfiniment dérivables à décroissance rapide", sinon ce sont les fonctions localement constantes à support compact. $\mathcal{V}(E)$ est muni de sa topologie usuelle; les distributions qu'on utilisera seront les formes linéaires continues sur $\mathcal{V}(E)$, et on les écrira sous forme intégrale ([1]).

Une distribution T sur k est dite de type λ , $\lambda \in X(k^x)$ si

$$dT(tx) = t^\lambda dT(x)$$

quel que soit t dans k^x , c'est-à-dire

$$(1.1) \quad \int_k f(tx) dT(x) = t^{-\lambda} \int_k f(x) dT(x) \quad f \in \mathcal{P}(k), \quad t \in k^x.$$

Les distributions de type λ forment un espace de dimension 1. Soit $Z(k)$ l'ensemble des λ associés aux solutions de support d'origine : si k est à valuation discrète, $Z(k)$ est réduit au caractère trivial 0 associé à la distribution δ ; $Z(\mathbb{R})$ est fait des caractères t^{-n} , $n \in \mathbb{N}$ associés aux solutions $\delta^{(n)}$; $Z(\mathbb{C})$ est formé des caractères $t^{-p}\bar{t}^{-q}$ associés aux solutions $\delta^{(p,q)}$. Les autres solutions s'obtiennent comme prolongement analytique de l'intégrale

$$(1.2) \quad Z_\lambda(f) = \int_k f(x) d^x x^\lambda \quad d^x x^\lambda = x^\lambda dx/|x|, \quad f \in \mathcal{P}(k), \quad \text{Ex} \lambda > 0$$

dont les résidus aux pôles, simples, redonnent les solutions de support 0. La transformée de Fourier d'une distribution de type λ est une distribution de type $\underline{1-\lambda}$: on définit la fonction *gamma* de k (pour le τ choisi) par

$$(1.3) \quad Z_\lambda(f) = \Gamma(\lambda) Z_{\underline{1-\lambda}}(\hat{f}) \quad f \in \mathcal{P}(k), \quad \lambda \text{ et } \underline{1-\lambda} \notin Z(k)$$

ses pôles sont ceux de la fonction zeta (1.2) et ses zéros les pôles de $Z_{\underline{1-\lambda}}$. La fonction *gamma* vérifie les deux relations (la première est la formule des compléments)

$$(1.4) \quad \Gamma(\lambda)\Gamma(\underline{1-\lambda}) = \lambda(-1), \quad \Gamma(\bar{\lambda}) = \lambda(-1)\overline{\Gamma(\lambda)} \quad \text{où } \bar{\lambda}(t) = \overline{\lambda(\bar{t})}.$$

Si k est à valuation discrète, sa fonction Γ est donnée pour λ ramifié ou d'exposant > 0 par

$$(1.5) \quad \Gamma(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq N} \tau(-x) d^{\times} x^{\lambda}$$

[6], [8] et [10].

2. LES GROUPE SL_2

Les matrices d'ordre deux sur k forment une algèbre simple et de rang fini sur k . Le groupe $SL_2(k)$ est formé des matrices de norme réduite 1 ; comme on a pris le corps commutatif, la norme réduite est le déterminant. L'espace vectoriel $V = k \times k$ est muni de la norme $\max(|x|, |y|)$, $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, $x\bar{x} + y\bar{y}$ suivant que k est à valuation discrète, est le corps des réels, ou est le corps des complexes. Les éléments de $G = SL_2(k)$ qui laissent invariante cette norme forment un sous-groupe compact maximal K ; c'est respectivement $SL_2(\mathcal{O})$, $SO(2)$, $SU(2)$. Le stabilisateur N de $e_1 = (1, 0)$ est le groupe des matrices unipotentes supérieures. Le sous-groupe A des matrices diagonales de G normalise N . La décomposition d'Iwasawa de G s'écrit

$$(2.1) \quad G = KAN \quad \text{avec} \quad K \cap AN = K \cap A.K \cap N.$$

Les deux matrices scalaires I et $-I$ forment le centre de G ; le centralisateur M de A dans K est la partie compacte $K \cap A$ de A ; le normalisateur M' de A dans K est engendré par M et $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le groupe de Weyl M'/M opère, comme M' , sur A et les applications définies sur A . La décomposition de Bruhat s'écrit ici

$$(2.2) \quad G = AN \cup ANwAN = w^{-1}AN \cup N_-AN, \quad N_- = w^{-1}Nw$$

est le nilpotent opposé. On identifie G/AN à la droite projective du corps k .

Le groupe G est unimodulaire ; si da et dn sont des mesures de Haar des groupes A et N , $da dn$ est une mesure de Haar à gauche sur AN , $|a|^2 da dn$ en est une à droite. L'isomorphisme $K \backslash G = K \cap AN \backslash AN$ déduit de (2.2) donne la mesure sur G

$$(2.3) \quad dg = dk d_{\mathbb{R}} a n = |a|^2 dk da dn \quad \text{si} \quad g = kan, \quad |a| = \|ge_1\|$$

où dk est la mesure de Haar de K normalisée, $dn = dx$ si $n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et, si la valuation de k est discrète da donne à l'ouvert M de A la mesure 1 de façon que dk soit la mesure dg induite sur l'ouvert K de G , sinon on pose $da = dt/|t|$ pour $a = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$.

3. TRANSFORMATION DE LAPLACE-MELLIN SUR LE PLAN

La décomposition (2.2) montre qu'à des ensembles négligeables près, on a

$$(3.1) \quad G/N = N \backslash A = Ge_1 = A \times N = V$$

et donc que $|a| da dn$ est une mesure invariante sur G/N . On identifiera systématiquement une fonction sur V privé de 0 à une fonction sur G invariante à droite par N . Le corps k étant commutatif, G est le groupe linéaire qui conserve la forme bilinéaire de matrice w

$$(3.2) \quad [z, z'] = xy' - x'y \quad \text{si} \quad z = (x, y) \quad \text{et} \quad z' = (x', y').$$

On définit alors la transformation de Fourier sur V à l'aide du bicharactère $\tau([z, z'])$ et de la mesure autoduale correspondante. Celle-ci se lit sur $A \times N$ par (3.1) en $|a| d^+a dn$, où $d^+a = dt$ si $a = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$; on pose

$$[g, g'] = [ge_1, g'e_1]$$

si g et g' sont dans G ; c'est le premier coefficient de la matrice ${}^t g'wg$. Si f est une fonction continue sur G à support compact modulo N , sa trans-

formée de Fourier est

$$(3.3) \quad f^*(g) = \int_{G/N} f(g^t) \tau([g, g^t]) dg^t = \int_{A \times N} f(nwa) \tau([g, nwa]) |a| d^+a \, dn.$$

En procédant de façon analogue avec les fonctions continues à support compact sur A on écrira

$$(3.4) \quad \hat{f}(a) = \int_A f(a^t) \tau(aa^t) d^+a^t \quad \text{où} \quad \tau(a)^t = \tau(t) \quad \text{si} \quad a = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 3.1. Décomposition de la transformation de Fourier sur le plan. A f dans $\mathcal{S}(V)$ on associe pour chaque g de G la fonction f'_g de $\mathcal{S}(A)$

$$(3.5) \quad f'_g(a) = |a| \int_N f(gnwa) \, dn.$$

Alors, pour tout a dans A , on a l'égalité

$$(3.6) \quad f^*(ga) = \widehat{f'_g}(a).$$

Il suffit d'écrire (3.3) au point ga , puis de changer de variable.

PROPOSITION 3.2. Transformation de Laplace-Mellin sur le plan.

Si K_1 est un compact de G , et K_2 une bande de caractères généralisés de A $-1 < r_1 \leq \text{Re } \lambda \leq r_2 < \infty$, alors, pour f dans $\mathcal{S}(V)$ l'intégrale

$$(3.7) \quad L_\lambda^f(g) = \int_A f(ga) a^\lambda d^+a$$

(a) converge normalement sur $K_1 \times K_2$

(b) se prolonge à $X(k^*)$ en une fonction analytique de pôles simples les λ tels que $1 + \lambda \in Z(k)$

(c) vérifie l'équation fonctionnelle

$$(3.8) \quad \int_N L_\lambda^f(gnw) \, dn = \Gamma(\lambda) L_{-\lambda}^{f^*}(g).$$

Le (a) résulte de ce que t^λ est sommable au voisinage de 0 pour la mesure dt si $\text{Ex } \lambda > -1$. Le (b) est le prolongement analytique de la fonction zeta. L'intégrale de (3.8) se fait sur un horicycle ; elle est convergente si $f(gnw)a^\lambda$ est sommable sur $A \times N$, c'est-à-dire si $f(g(\frac{u}{t}))t^{\lambda-1}$ est sommable sur le plan, ce qui a lieu pour $\text{Ex } \lambda > 0$. L'intégrale est alors $Z_\lambda(f'_g)$, où f'_g est donnée par (3.5), et (c) est l'équation fonctionnelle (1.3) en vertu de la proposition précédente.

Remarques. (3.8) est aussi le prolongement de l'équation fonctionnelle des fonctions de Whittaker [5] : $W_{\lambda,n}^f = n^\lambda W_{-\lambda,n}^{f*}$ où, pour $f \in \mathcal{S}(V)$, on a posé

$$W_{\lambda,n}^f(g) = \int_N L_\lambda^f(gn'w)\tau(n' * n)dn' \quad n \in N, \quad n \neq I \text{ dans l'équation fonctionnelle,}$$

et où l'on a transporté la structure de corps de k sur N à l'aide de l'isomorphisme de N avec le groupe additif de k , l'étoile sur N correspondant au produit sur k .

(3.8) est également l'écriture locale de la relation (3.16) de [4] obtenue à l'aide des équations fonctionnelles des séries d'Eisenstein.

4. Sous-groupes de Cartan

A un sous-groupe de Cartan C de $G = \text{SL}_2(k)$, on associe la sous-algèbre B qu'il engendre dans l'algèbre des matrices d'ordre 2 sur k ; elle est commutative et semi-simple. Inversement, les éléments de norme 1 dans une telle sous-algèbre forment un sous-groupe de Cartan de G . Ces sous-algèbres sont les extensions quadratiques de k et l'algèbre déployée de dimension 2. Elles s'écrivent $k(d^{\frac{1}{2}})$

où l'élément non nul d de k ne compte que modulo le sous-groupe des carrés k^{x^2} ; on les ramène à la forme suivante

$$(4.1) \quad k(d^{\frac{1}{2}}) \text{ est formé des matrices } z = \begin{pmatrix} x & dy \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Pour $d = 1$, on a l'algèbre déployée, associée au sous-groupe de Cartan

$$(4.2) \quad \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, x^2 - y^2 = 1$$

conjugué au sous-groupe A de G . Si d n'est pas un carré, $B = k(d^{\frac{1}{2}})$ est un corps et l'inégalité

$$(4.3) \quad |d|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{|N_{B/k}(z)|^{\frac{1}{2}}}{\|z\|} \leq 1$$

montre que le sous-groupe de Cartan est alors compact (la norme est celle de l'espace vectoriel sous-jacent dans l'isomorphisme qui associe (x, y) à $x + d^{\frac{1}{2}}y$; elle a été définie au § 2).

Le nombre de ces algèbres est égal au nombre de classes des carrés dans k^x . C'est $4/|2|$. En effet, pour un corps à valuation discrète, le lemme de Hensel montre que le passage au carré est un automorphisme de $1 + \mathfrak{o}$; la décomposition de k^x (§ 1) donne alors 4 classes, de représentants $1, \varepsilon, \pi, \varepsilon\pi$.

Si $B = k(d^{\frac{1}{2}})$, appelons $\underline{n}$ son groupe des normes, image par $N_{B/k}$ du groupe multiplicatif de B . C'est k^x si $d = 1$; sinon $\underline{n}$ est d'indice 2 dans k^x comme le montre un examen détaillé de la situation, ou bien parce que les extensions abéliennes de degré 2 sur $\underline{k}$ sont classées par leur groupe des normes ([11], p. 230, Cor. 2). On appelle s le caractère k^x trivial sur $\underline{n}$. Les différents caractères s forment le groupe des caractères de k^x/k^{x^2} ([11], p. 261).

5. TRANSFORMATION DE FOURIER SUR LES ALGÈBRES $k(d^{\frac{1}{2}})$

Soit $B = k(d^{\frac{1}{2}})$ une algèbre de dimension 2 sur k , prise sous la forme (4.1). L'automorphisme de conjugaison $\bar{z} = \begin{pmatrix} x & -dy \\ -y & x \end{pmatrix}$ si $z = \begin{pmatrix} x & dy \\ y & x \end{pmatrix}$ se lit sur le sous-groupe C des éléments de norme 1 comme le passage à l'inverse. Soit τ' un caractère additif non trivial de k . Le bicalectère

$$(5.1) \quad \langle z, z' \rangle = \tau' \circ \text{Tr}_{B/k}(z\bar{z}') \quad z, z' \in B$$

définit l'autodualité sur B et la mesure autoduale associée. De même k est muni de la mesure de Haar autoduale pour le bicalectère $\tau'(xx')$. La représentation évidente de C dans $L^2(B)$ commute à la transformation de Fourier puisque

$$(5.2) \quad \langle cz, cz' \rangle = \langle z, z' \rangle \quad \text{quel que soit } c \in C.$$

Soit dc une mesure de Haar sur C , normalisée si C est compact, et sinon, on prend la mesure de Haar transportée de celle de k^x dans l'isomorphisme de C avec $k^x = Ce_1$. Si B^x désigne alors le groupe multiplicatif des éléments inversibles de B , l'isomorphisme $B^x/C = \underline{n}$ donne une décomposition des mesures de Haar multiplicatives, et donc des mesures de Haar additives

$$(5.3) \quad \int_B f(z) dz = a \int_{\underline{n}} dN_{B/k} z \int_C f(cz) dc \quad f \in \mathcal{F}(B)$$

où a est une constante qui dépend de l'extension et du caractère τ' .

LEMME 5.1. Soient K_1 un compact de B^x , K_2 une bande $r_1 \leq \text{Ex } \lambda \leq r_2$ de caractères généralisés de C , K_3 une partie bornée de $\mathcal{F}(B)$. Alors l'intégrale

$$(5.4) \quad \int_C f(c^{-1}z) dc^\lambda \quad f \in \mathcal{F}(B), \quad z \in B^x, \quad \lambda \in X(C)$$

converge normalement sur $K_1 \times K_2 \times K_3$.

La difficulté pourrait venir lorsque C n'est pas compact, aux points à l'infini de C . Mais alors on intègre sur une "hyperbole" $z\bar{z} = C^{\text{te}} \neq 0$, et f est "à décroissance rapide" sur ses branches. (5.4) définit ainsi une distribution tempérée.

On appelle distribution de Bessel d'espèce C et d'indice λ la transformée de Fourier de la distribution (5.4). Lorsque C est compact elle est donnée par la fonction de Bessel d'indice "entier" λ

$$(5.5) \quad J_{\lambda}^C(z\bar{z}') = \int_C \langle -c^{-1}z, z' \rangle dc^{\lambda}.$$

Si C n'est pas compact, on retrouve les fonctions de Bessel-Hankel lorsque k est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; si le corps est à valuation discrète, la formule (5.5) a un sens si l'intégrale est prise en valeur principale, car elle ne dépend pas du compact assez grand sur lequel on intègre; si $N_{B/k}z$ est assez petit, non nul, alors ([6])

$$(5.6) \quad J_{\lambda}^C(z) = (x+y)^{\lambda} \Gamma^{\sharp}(-\lambda) + (x-y)^{-\lambda} \Gamma^{\sharp}(\lambda) \quad \text{si } z = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \quad \text{et } \lambda \neq 0$$

$$(5.7) \quad J_0^C \text{ est une fonction affine, non constante, de val } N_{B/k}z.$$

Par ailleurs, on a toujours la formule

$$(5.8) \quad J_{\lambda}^C(z) = (z/\bar{z})^{\lambda} J_{\lambda}^C(\bar{z}) = (z/\bar{z})^{\lambda} J_{-\lambda}^C(z).$$

Si B est un corps, la représentation évidente de C dans $L^2(B)$ se décompose en somme directe hilbertienne des sous-espaces $L_m^2(B)$, m caractère de C , formés des fonctions de type m : $f(cz) = c^m f(z)$ quel que soit $c \in C$. Comme tout caractère m de C se prolonge en un caractère du groupe $B^{\times}$ noté encore m (mais pas de façon canonique: en valuation discrète $k^{\times}C$ est d'indice 2 dans $B^{\times}$), on envoie les fonctions de $L_m^2(B)$ sur celles de $L_0^2(B)$ en les multipliant par z^m .

Ces dernières ne dépendent que de la norme $N_{B/k}$, et elles s'envoient sur les fonctions de carré sommable sur $\underline{n}$ pour la mesure induite par la mesure additive de k ; si on écrit $F^f \circ N_{B/k} z = z^{-m} f(z)$ pour $f \in L_m^2(B)$, (5.3) donne

$$(5.9) \quad \int_B |f(z)|^2 dz = a \int_{\underline{n}} |F^f(x)|^2 dx.$$

Enfin, la transformée de Fourier d'une fonction de type m est aussi de type m d'après (5.2), et on a la formule

$$(5.10) \quad \hat{F}^f(x) = a \int_{\underline{n}} F^f(y) dy \int_{c\bar{c}=yx^{-1}} \tau'(cx+c^{-1}y) dc^m, \quad dc^m = c^m dc.$$

6. LES REPRÉSENTATIONS DE WEIL DES GROUPEs SL_2

On va appliquer le § 0 en prenant pour groupe abélien localement compact le groupe additif d'une algèbre B de dimension 2 sur k : $B = k(d^{\frac{1}{2}})$ (4.1). L'autodualité est donnée par le bicaractère (5.1). Chaque élément u de k définit un morphisme (symétrique) de B , à savoir la multiplication par cet élément; c'est le morphisme associé (0.1) au caractère quadratique

$$(6.1) \quad q_u(z) = \langle z, 2^{-1}zu \rangle = \tau'(uN_{B/k}z)$$

q_u est un caractère quadratique non dégénéré si u est inversible dans k , et sa transformée de Fourier est alors (0.2)

$$(6.2) \quad \hat{q}_u = \gamma(u)|u|^{-1} q_{-u^{-1}} \quad \text{où } \gamma(u) = \gamma(q_u).$$

Le groupe symplectique de B se plonge dans $B(B)$; chaque matrice de $G = SL_2(k)$ définit naturellement un automorphisme symplectique de B . Par restriction à G , on a donc une représentation projective de ce groupe dans $\mathcal{S}(B)$:

$$(6.3) \quad n \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f(z) = q_u(z) f(z)$$

$$(6.4) \quad a \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} f(z) = |t| f(zt)$$

$$(6.5) \quad W \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f(z) = \hat{f}(-z) .$$

On pose $\Omega(G) = NwAN$; le théorème 0.2 définit W sur $\Omega(G)$, et (0.11) s'écrit

$$(6.6) \quad W(g_1)W(g_2) = \gamma(v_3/v_1v_2)W(g_3) \quad \text{si } g_1, g_2, g_3 = g_1g_2 \in \Omega(G), \quad g_i = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ v_i & \cdot \end{pmatrix}.$$

L'unicité de la décomposition (0.9) implique

$$(6.7) \quad W(g)W(g^{-1}) = I \quad \text{si } g \in \Omega(G) .$$

THÉOREME 6.1. Cas déployé. Si l'algèbre B est déployée sur k , on définit une représentation W^B de G par

$$(6.8) \quad W^B = n \text{ sur } N, \quad W^B = a \text{ sur } A, \quad W^B = W \text{ sur } \Omega(G)$$

et cette représentation est unitairement équivalente à la représentation évidente de G dans $\mathcal{S}(B)$.

Preuve. Montrons d'abord que $\gamma(u) = 1$ quel que soit u dans k^X . Si $z = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$, le caractère quadratique (6.1) est associé à la forme quadratique $ux^2 - uy^2$. $\gamma(u)$ est donc produit des γ associés aux formes quadratiques ux^2 et $-uy^2$ sur k . Les caractères quadratiques associés sont imaginaires conjugués, leur γ aussi, et le produit de ceux-ci est donc 1.

(6.6) est ainsi une relation d'homomorphisme, et W^B est une représentation unitaire de G dans $\mathcal{S}(B)$. Pour prouver la seconde partie du théorème, on prend B sous la forme diagonalisée. (5.1) s'écrit $\langle z, z' \rangle = \tau'(x'y + xy')$ si $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$. La représentation évidente de G dans $\mathcal{S}(B)$ est

$$(6.9) \quad T(g)f\left(\frac{x}{y}\right) = f(g^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)) .$$

Montrons que l'opérateur qui échange W et T est la transformation de Fourier sur la première variable

$$(6.10) \quad f^*\left(\frac{x}{y}\right) = \int_k f\left(\frac{x'}{y}\right) \tau^*(-xx') dx'$$

qui est bien un automorphisme de $\mathcal{S}(B)$. Sur N et A , on voit aisément la commutation par (6.3) et (6.4). Enfin, pour w :

$$(W^B(w)f)^*\left(\frac{x}{y}\right) = \int_k \hat{f}\left(\frac{-x'}{-y}\right) \tau^*(-xx') dx'$$

mais on a la formule $f^*\left(\frac{u}{v}\right) = \widehat{f^*}\left(\frac{-v}{u}\right)$: l'expression ci-dessus est aussi $f^*\left(\frac{y}{-x}\right)$: c'est $T(w)f^*$ au point (x,y) .

Ce théorème montre que, dans le cas où l'algèbre B est déployée, on est ramené aux représentations induites par le sous-groupe triangulaire AN : on les retrouve en effectuant une transformation de Laplace-Mellin (§ 3).

THÉOREME 6.2. Cas des sous-groupes de Cartan compacts. Si l'algèbre B est le corps quadratique $k(d^{\frac{1}{2}})$, on définit une représentation de G dans $\mathcal{S}(B)$ en posant

$$(6.11) \quad W^B = n \quad \text{sur } N, \quad W^B(h) = s(h)a(h) \quad \text{sur } A$$

où s est le caractère de $k^{\times} \simeq A$ attaché à l'extension B , et $W^B(w) = r W(w)$ où $r = \overline{\gamma(1)}$.

Preuve. Montrons d'abord que $\gamma(u) = \gamma(1)s(u)$. Si $k = \mathbb{R}$, on prend $d = -1$; la norme de $z = x+iy$ est x^2+y^2 ; $\gamma(u)$ est donc le carré du γ associé à la forme quadratique ux^2 sur $\mathbb{R}$; celui-ci résulte par exemple de

l'identité de Jacobi sur la série θ ; si $\tau'(x) = e^{2\pi i b x}$, on a donc

$$(6.12) \quad \gamma(u) = i^{s(bu)} = is(b)s(u) = \gamma(1)s(u) .$$

Soit maintenant un corps k à valuation discrète. Le caractère additif τ' est trivial sur un voisinage de 0 dans k , et donc q_u vaut 1 sur tout réseau R assez petit de B . La formule (0.3) prise en 0 avec pour f la fonction caractéristique du réseau R s'écrit (u est différent de 0)

$$\int_B q_u(z) dz \int_R \langle z', zu \rangle dz' = \gamma(u)|u|^{-1} \int_R dz .$$

D'après les relations d'orthogonalité des caractères la seconde intégrale du premier membre est égale à la fonction caractéristique du réseau $R'u^{-1}$ (R' est l'orthogonal du réseau R), à la mesure de R près. On a donc

$$\gamma(u)|u|^{-1} = \int_{R'u^{-1}} q_u(z) dz = a \int_{N_{B/k}(R'u^{-1})} \tau'(ux) dx$$

la décomposition des mesures venant de (5.3). La fonction caractéristique du groupe des normes $\underline{n}$ de B se décompose à l'aide du caractère s en $\frac{1}{2}+s(x)/2$: l'intégrale précédente se décompose en deux et pour n assez grand il ne reste que

$$2\gamma(u)|u|^{-1}/a = \int_{\mathcal{O}-n} \tau'(ux)s(x)dx = s(u)|u|^{-1} \overline{\Gamma'(1+s)} = s(u)|u|^{-1}s(-1)\Gamma'(1+s) .$$

On a bien $\gamma(u) = \gamma(1)s(u) = s(u)/r$ avec même $r^2 = s(-1)$.

(6.6) devient une relation d'homomorphisme si on remplace $W(g_i)$ par $W(g_i)/\gamma(v_i)$. Ceci définit W^B sur $\Omega(G)$, ouvert dense de G , donc partout.

(6.11) fait de W^B une représentation unitaire de G dans $\mathcal{S}(B)$.

THÉOREME 6.3. La représentation évidente du sous-groupe C des éléments de norme 1 de l'algèbre B dans $\mathcal{V}(B)$ commute à la représentation W^B .

Soit E l'opérateur qui à $f \in \mathcal{V}(B)$ associe la fonction $f(\bar{z})$; alors E est un automorphisme de $\mathcal{V}(B)$ qui commute à la représentation W^B .

Preuve. La première partie du théorème résulte de ce que la norme $N_{B/k}$ est invariante par C , et de (5.2) qui exprime la commutation à $W^B(w)$: les formules (6.3), (6.4), (6.5) montrent l'interversion.

La seconde partie est tout aussi claire; on prend les formules (6.3)-(6.5), sachant que la conjugaison laisse k fixe, et que le bicaractère d'autodualité est (5.1).

On est ainsi ramené à étudier les fonctions qui se transforment à gauche suivant un caractère de C

$$(6.13) \quad f(cz) = \lambda(c)f(z) \quad \text{quel que soit } c \in C, \quad z \neq 0$$

les caractères λ et $-\lambda$ donnant des représentations équivalentes. Les paragraphes suivants précisent le sens qu'il faut accorder à cette remarque si C est déployé.

7. REPRÉSENTATIONS DE LA SÉRIE CONTINUE : ESPACES DES REPRÉSENTATIONS

Le théorème 6.1 ramène la représentation de Weil attachée à l'algèbre déployée à la représentation naturelle de G dans l'espace $\mathcal{V}(V)$, $V = k \times k$. Les représentations de la série continue sont les représentations induites par une représentation de dimension 1 du sous-groupe AN ; N étant le groupe des commutateurs de AN , on se donne donc un caractère généralisé λ de A , et on considère l'espace $C_\lambda(G)$ des fonctions sur G telles que

(7.1) f est régulière sur G , c'est-à-dire localement constante si k est à valuation discrète, indéfiniment dérivable sinon, ([1])

(7.2) $f(ga) = a^{-\lambda} f(g) |a|^{-1} = a^{-\lambda-1} f(g)$ quels que soient $g \in G, a \in A, n \in N$.

Le groupe G opère sur cet espace par translations à gauche

(7.3) $T_\lambda(s) f(g) = f(s^{-1}g)$.

L'invariance à droite par N permet de réaliser la représentation en fonctions sur V privé de l'origine : on retrouve les fonctions L_λ^F du § 3. La décomposition d'Iwasawa (2.1) montre qu'une fonction vérifiant (7.2) est déterminée par sa restriction au groupe compact K . La décomposition de Bruhat (2.2) permet de réaliser l'espace $C(G)$ en fonctions sur $N_- \cup w^{-1} = G/AN = K/K \cap AN$, la droite projective de k . On utilisera cette réalisation, N_- ayant l'avantage d'être un groupe abélien isomorphe au groupe additif de k : à x de k on associe $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$ de N_- . Le groupe G opère par

(7.4) $T_\lambda(n) f(x) = f(n^{-1}x) \quad n \in N_-$

(7.5) $T_\lambda(a) f(x) = f(a^{-1}xa) a^{\lambda+1} \quad a \in A \text{ (A normalise } N_-)$

(7.6) $T_\lambda(w) f(x) = f(w^{-1}n_+(x)w)a(x)^{-\lambda-1} \quad \text{si } x = I$
 $T_\lambda(w) f(1) = f(w^{-1})$

où l'on a utilisé la décomposition de Bruhat de N_- privé de I sur $NwAN$

(7.7) $x = n_+(x)wa(x)n_+(x)$.

Enfin (7.1) se traduit par

(7.8) f et $T_\lambda(w)f$ sont régulières sur N_- .

L'isomorphisme $N_- \cup w^{-1} = K/K \cap AN$ permet de munir N_- d'une mesure invariante à gauche par K : c'est $\|x(e_1)\|^{-2} dx$, et on montre aisément que

$$(7.9) \quad \int_K |f(k)|^2 dk = \int_{N_-} |f(x)|^2 \|x(e_1)\|^{2Ex\lambda} dx$$

ce qui montre que pour λ d'exposant positif ou nul, f est dans $L^2(N_-)$.

8. SÉRIE PRINCIPALE DE REPRÉSENTATIONS

La série principale de G est formée des représentations unitaires induites par les caractères de A . La formule (7.9) montre qu'elle est réalisée dans $L^2(N_-)$, ou encore, pour chaque caractère λ de A , dans le sous-espace fermé de $L^2(K)$ formé des fonctions f telles que $f(kan) = a^{-\lambda} f(k)$ quel que soit $an \in AN$.

On sait alors [1] que la représentation $C_\lambda(G)$ est irréductible si λ n'est pas invariant par le groupe de Weyl de G ; or l'élément non trivial de celui-ci change λ en $-\lambda$: λ est invariant s'il est trivial sur les carrés.

THÉOREME 8.1. Irréductibilité des représentations de la série principale. Si λ est un caractère non trivial de A/A^2 , la représentation $C_\lambda(G)$ est somme directe de deux représentations irréductibles.

Les autres représentations de la série principale sont irréductibles.

Preuve. On revient à la réalisation de Weil en effectuant une transformation de Fourier sur N_- . Les formules (7.4)-(7.6) se lisent alors

$$(8.1) \quad \hat{T}_\lambda(n) \hat{f}(x) = \tau(ux) \hat{f}(x) \quad \text{si } n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{f}(x) = \hat{f} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$$

$$(8.2) \quad \hat{T}_\lambda(a) \hat{f}(x) = t^{\lambda-1} \hat{f}(t^{-2}x) \quad \text{si } a = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

$$(8.3) \quad \hat{T}_\lambda(w) \text{ a pour noyau } J_{-\lambda}^A(x, y).$$

Si un opérateur commute à la représentation, (8.1) montre que c'est la multiplication par une fonction mesurable bornée h . (8.2) montre alors que h est constante sur les classes des carrés. Le théorème est prouvé pour $k = \mathbb{C}$. Pour le corps des réels, $h(x)$ ne dépend que du signe de x ; si on revient à la réalisation du § 7, on voit que l'action de w commute à la transformation de Hilbert, et donc si $h \neq 0$, que λ est le caractère signe. Si le corps est à valuation discrète, la commutation à l'action de w s'écrit

$$(8.4) \quad (h(x) - h(y))J_{-\lambda}^A(x, y) = 0 \text{ pour presque tout } (x, y) \in k^x \times k^x.$$

(5.7) permet de conclure à l'irréductibilité si $\lambda = 0$. Sinon, on utilise (5.6) : $J_{-\lambda}^A(x, y)$ ne peut être nul lorsque x et y parcourent deux classes distinctes de $(k^x)^2$ dans k^x que si λ est un caractère $s \neq 0$ et que si x et y parcourent chacun une classe de $\underline{n}$ dans k^x . On a donc prouvé l'irréductibilité si λ n'est pas un caractère s , et, dans ce cas, que h prenait au plus deux valeurs.

On achève la démonstration en remarquant que les fonctions à support dans l'une des classes de $\underline{n}$ dans k^x forment un sous-espace invariant : on le voit sur les formules (8.1)-(8.3) et (5.8).

9. SÉRIE CONTINUE : FORMES SESQUILINÉAIRES INVARIANTES

Pour étudier la série continue, on attache à chaque couple (λ, μ) de caractères généralisés de A l'espace $S(\lambda, \mu)$ des formes sesquilineaires continues invariantes sur $C_\lambda(G) \times C_\mu(G)$. Ayant $S(\lambda, \mu)$ on pourra déterminer les représentations équivalentes, les représentations irréductibles, les représentations unitaires.

On se ramène à la réalisation de $C_\lambda(G)$ et $C_\mu(G)$ sur N_- (§ 7). L'isomorphisme du groupe additif de k avec N_- permet de transporter la structure de corps : on notera par $*$ la multiplication ainsi mise sur N_- et x^* l'inverse d'un élément x de N_- autre que I .

Par restriction à $\mathcal{S}(N_-) \times \mathcal{S}(N_-)$, une forme sesquilinéaire sur $C_\lambda(G) \times C_\mu(G)$ s'écrit, d'après le théorème des noyaux ([1]), à l'aide d'une distribution $T \in \mathcal{S}'(N_- \times N_-)$

$$(9.1) \quad (f|g) = \int_{N_- \times N_-} f(x) \overline{g(y)} dT(x, y) \quad f, g \in \mathcal{S}(N_-).$$

La décomposition de Bruhat par rapport au tore A et au nilpotent N_- s'écrit

$$(9.2) \quad G = N_- A n N_- \cup N_- A$$

N_- opère par translations (7.4). L'invariance de la forme sesquilinéaire $(|)$ par l'action de N_- montre que la distribution T se factorise à travers la mesure de Haar de N_- en

$$(9.3) \quad (f|g) = \int_{N_- \times N_-} \overline{f(x)g(xy^{-1})} dx dU(y) = \int_{N_-} f * g^\circ(y) dU(y) \quad f, g \in \mathcal{S}(N_-)$$

$$(9.4) \quad g^\circ(x) = \overline{g(x^{-1})} \quad \text{si } g \text{ est une fonction sur } N_-$$

A opère également sur $\mathcal{S}(N_-)$ d'après (7.5). L'invariance de la forme par A s'écrit donc pour les fonctions de $\mathcal{S}(N_-)$

$$\int_{N_-} f * g^\circ(x) dU(x) = a^{\lambda+\bar{\mu}} \int_{N_- \times N_-} \overline{f(x)g(a^{-1}y^{-1}ax)} dx dU(y)$$

car $dx = |a|^{-2} d(a^{-1}xa)$ et comme $\mathcal{S}(N_-) * \mathcal{S}(N_-)$ est dense dans $\mathcal{S}(N_- \times N_-)$, la

distribution U vérifie

$$(9.5) \quad dU(a^{-1}xa) = a^{\lambda+\bar{\mu}} dU(x) \quad \text{quel que soit } a \in A.$$

Le centralisateur de N_- dans A est formé des matrices $\pm I$; c'est le noyau du passage au carré dans A . Si $S(\lambda, \mu)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ on a donc, de (9.5)

$$(9.6) \quad \lambda(-I) = \mu(-I).$$

Dans ce cas $\lambda+\bar{\mu}$ s'écrit 2ω où le caractère généralisé ω est déterminé à un caractère de A/A^2 près. Dans les notations de [10], (9.5) est le problème $P(N_-, A, \omega)$ où A opère sur N_- par les automorphismes axa^{-1} .

Si U^* désigne la restriction de U au groupe multiplicatif de N_- , la distribution $a(x)^{-\omega} U^*(x)$ est invariante par l'opération de A , c'est-à-dire par les translations de A^2 . Elle s'écrit

$$a(x)^{-\omega} dU^*(x) = \sum c_d a(x)^{s_d} d^x x$$

où $d^x x$ est une mesure de Haar sur le groupe multiplicatif de N_- , s_d est le caractère relatif à l'algèbre $k(d^{\frac{1}{2}})$ défini au § 4, et où la sommation se fait sur les classes des carrés.

On sait que $a(x)^{\omega+s_d} d^x x$ se prolonge en une distribution sur N_- si et seulement si $\omega+s_d$ n'est pas dans $Z(k)$ (§ 1). Par ailleurs on détermine facilement les distributions de support l'origine I de N_- qui vérifient (9.5) : ceci nécessite $\lambda+\bar{\mu} \in 2Z(k)$.

Ainsi l'étude de l'invariance par AN a montré que (9.6) est une condition nécessaire pour que $S(\lambda, \mu)$ ne soit pas réduit à 0. Dans ce cas, une forme invariante $(|)$ a pour restriction à $\mathcal{J}(N_-) \times \mathcal{J}(N_-)$

$$(9.7) \quad (f|g) = \sum c_d Z_{\omega+s_d} (f * g^\circ) \quad \text{si } \lambda + \bar{\mu} = 2\omega \in 2Z(k)$$

$$(9.8) \quad (f|g) \text{ est le prolongement analytique de } \sum c_d \frac{Z_{\omega+s_d} (f * g^\circ)}{\Gamma(\omega+s_d)}$$

$$\text{si } \lambda + \bar{\mu} = 2\omega \in 2Z(k) .$$

Reste à écrire l'invariance par w , l'élément du groupe de Weyl. Pour utiliser les résultats ci-dessus, il faut prendre des fonctions de $\mathcal{S}(N_-)$ qui y restent après transformation par w : (7.6). Si $\text{Ex } \omega > 0$, alors Z_ω est donnée par une intégrale absolument convergente. Dans $Z_\omega(T_\lambda(w)f * (T_\mu(w)g)^\circ)$ on fait le changement de variables

$$w^{-1}a(x)_w = a(X) \quad , \quad d'o\grave{u} \quad a(X) = a(x) \quad \text{et} \quad dx = |a(X)|^{-2} dX,$$

et de même pour y , ce qui donne

$$(9.9) \quad Z_\omega(T_\lambda(w)f * (T_\mu(w)g)^\circ) = Z_\omega(a^{\lambda-\omega} f * a^{\bar{\mu}-\omega} g^\circ),$$

a est la fonction $a(x)$. Le second membre de cette identité est une fonction analytique de ω ce qui permet de prolonger (9.9) à $X(A)$ avec les pôles usuels. Si on écrit maintenant que (9.7) est invariante par w , on a donc presque partout en (x,y)

$$0 = \sum c_d (1-a(x))^{\lambda-\omega+s_d} a(y)^{\bar{\mu}-\omega+s_d} a(xy^{-1})^{\omega+s_d-1}$$

c'est

$$0 = \sum c_d (1-a(x * y^*))^{\lambda-\omega+s_d} a(xy^{-1})^{s_d} \quad \text{puisque } \lambda-\omega = \omega-\bar{\mu} .$$

Si donc $S(\lambda, \mu)$ n'est pas réduit à 0, on a nécessairement $\lambda = \omega + s_d$ pour un d , et alors $\lambda = \bar{\mu}$, les autres coefficients c_d , $d \neq d$ étant nuls. On étudie de façon analogue le cas où $\lambda + \bar{\mu} \in 2Z(k)$.

Si on revient à des fonctions sur K ou sur le groupe, alors, si $\lambda = \bar{\mu}$ n'est pas un pôle de la fonction zeta, la forme sesquilinéaire invariante $Z_\lambda(f * g^\circ)$ est

$$(9.10) \quad Z_\lambda(f * g^\circ) = \int_{K \backslash AN \times K \backslash AN} [k, k']^{\lambda-1} f(k) \overline{g(k')} dk dk' \quad \text{Ex } \lambda > 0$$

(le crochet de deux éléments de G a été défini au § 3). Cette intégrale définit une forme sesquilinéaire invariante sur $C_\lambda(G) \times C_{\bar{\lambda}}(G)$: on voit l'invariance en exprimant (9.10) à l'aide de la forme linéaire positive sur $G/AN \int_{G/AN} \dots d\dot{g}$ (voir [4], la remarque p. 14)

$$(9.11) \quad Z_\lambda(f * g^\circ) = \int_{G/AN \times G/AN} [x, y]^{\lambda-1} f(x) \overline{g(y)} dx dy.$$

On récupère les autres cas par prolongement analytique.

THÉORÈME 9.1. Formes sesquilinéaires invariantes [2], [3]. $S(\lambda, \mu)$ n'est pas réduit à 0, si et seulement si l'on est dans l'un des cas suivants :

$\lambda + \bar{\mu} \notin 2Z(k)$, $\lambda = \bar{\mu}$ et $Z_\lambda(f * g^\circ)$ engendre $S(\lambda, \bar{\lambda})$

$\lambda + \bar{\mu} \in 2Z(k)$, et

ou $\lambda + \bar{\mu} = 0$ et $\int_{N_-} f(x) \overline{g(x)} dx$ engendre $S(\lambda, -\bar{\lambda})$ si λ n'est pas un $s_d \neq 0$

$\int_{N_-} f(x) \overline{g(x)} dx$ et $Z_{s_d}(f * g^\circ)$ l'engendrent si $\lambda = \mu = s_d \neq 0$

ou $\lambda = \bar{\mu}$,

et $\int_{N_-} f^{(\lambda)}(x) \overline{g(x)} dx$ engendre $S(\lambda, \lambda)$ si $\lambda \in Z(k)$

et $\int_{N_-} f^{(r)}(x) \overline{g(x)} dx$ et $Z_\lambda(f * g^\circ)$ l'engendrent

si $\lambda \notin Z(k)$, $r = \text{Ex } \lambda$

ou, si $k = \mathbb{C}$, $\lambda + \bar{\mu}$ est un caractère holomorphe x^{-2n} , n entier ≥ 0 ,
 respectivement antiholomorphe $\bar{x}^{-2n}$, et $S(\lambda, \mu)$ est engendré resp. par

$$\int_{N_-} \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \text{et} \quad \int_{N_-} \frac{\partial^n}{\partial \bar{x}^n} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Pour exprimer ce théorème sur la représentation de Weil W^V , on remarque que dans l'identification de G/N à $V - \{0\}$, N_- est la droite $x = 1$. On définit donc un automorphisme de $\mathcal{S}(V)$ en posant $F''(x, y) = \int F(x, y^*) \tau(y y^*) dy^*$. Pour $\text{Ex } \lambda > 0$, les fonctions L_λ^F sont dans $L^1(N_-) \cap L^2(N_-)$ et on a $(L_\lambda^F)'' = M_\lambda^{F''}$ où l'on a posé

$$(9.12) \quad M_\lambda^F(x, y) = \int_{k^*} F(tx, t^{-1}y) t^\lambda d^x t \quad \text{pour } F \in \mathcal{S}(V).$$

C'est une fonction entière de λ (lemme 5.1) et $M_\lambda^F(a^{-1}g) = a^\lambda M_\lambda^F(g)$, quel que soit $a \in A$, $g \in G$. Enfin (1.3) traduit simplement les formes sesquilinéaires trouvées ci-dessus en $Z_\lambda(L_\lambda^F * (L_\lambda^G)^\circ) = \Gamma(\lambda) Z_{1-\lambda}(M_\lambda^{F''} \overline{M_\lambda^{G''}})$

10. SÉRIE CONTINUE : ÉQUIVALENCE ET IRREDUCTIBILITÉ DES REPRÉSENTATIONS

Pour chaque couple (λ, μ) de caractères généralisés de A , soit $E(\lambda, \mu)$ l'espace des opérateurs continus U de $C_\lambda(G)$ dans $C_\mu(G)$ tels que

$$(10.1) \quad UT_\lambda(g) = T_\mu(g)U \quad \text{quel que soit } g \in G.$$

Mais on a vu au théorème 9.1 que $C_\mu(G) \times C_{-\bar{\mu}}(G)$ était muni de la forme sesquilinéaire invariante

$$\int_{N_-} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f \in C_\mu(G) \quad \text{et} \quad g \in C_{-\bar{\mu}}(G).$$

Il en résulte que $E(\lambda, \mu)$ est isomorphe à l'espace $S(\lambda, -\bar{\mu})$. On traduit le théorème 9.1.

PROPOSITION 10.1. La dimension de l'espace $E(\lambda, \mu)$ est

- 0 si $\lambda + \mu \neq 0$ et $\lambda - \mu \notin 2Z(k)$;
- 1 si $\lambda = \mu$ et n'est pas un $s_d \neq 0$: les multiples scalaires de l'identité engendrent $E(\lambda, \lambda)$: c'est l'irréductibilité de la représentation ;
- 1 si $\lambda = -\mu$ et n'appartient pas à $s_d \neq 0 \cup Z(k) + s_d$; $E(\lambda, -\lambda)$ est engendré par la convolution avec Z_λ si λ n'est pas un pôle, par la convolution avec le prolongement analytique de $Z_\lambda / \Gamma(\lambda)$ sinon ;
- 2 si $\lambda = -\mu$ est dans $Z(k) + s_d$, $s_d \neq 0$; $E(\lambda, -\lambda)$ est engendré par la convolution avec Z_λ et par la convolution avec le prolongement analytique de $Z_{\lambda+s_d} / \Gamma(\lambda+s_d)$.

On retrouve les résultats du paragraphe 8 si on remarque que $E(s_d, s_d)$ pour $s_d \neq 0$ est aussi engendré par les deux distributions

$$(10.2) \quad \delta + Z_{s_d} / \Gamma(s_d) \quad \text{et} \quad \delta - Z_{s_d} / \Gamma(s_d)$$

qui sont les transformées de Fourier des distributions associées respectivement à la fonction caractéristique du groupe des normes et à celle de son complémentaire.

La convolution avec Z_λ n'est autre que l'intégrale $\int_{N_-} f(xwy) dy$ étudiée au § 3. On utilise donc l'équation fonctionnelle (3.8) des N_- transformées de Laplace sur le plan. La forme qui définit l'autodualité sur le plan est antisymétrique : la transformation de Fourier est donc sa propre inverse.

L'étude complète de l'opérateur $\int_{N_-} f(xwy) dx$ résoud entièrement le problème de l'équivalence.

THÉOREME 10.2. Equivalence des représentations de la série continue. Pour que les représentations $C_\lambda(G)$ et $C_\mu(G)$ ($\lambda \neq \mu$) soient équivalentes, il faut et il suffit que

$$(10.3) \quad \lambda + \mu = 0 \text{ et } 1 \pm \lambda \notin Z(k) .$$

Un opérateur d'entrelacement est alors donné par le prolongement analytique de

$$(10.4) \quad \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{N_-} f(ywx) dx, \quad f \in \mathcal{S}(N_-) .$$

Si $1 \pm \lambda \in Z(k)$, alors

$k = \mathbb{C} : \lambda(x) = x^{-p} \bar{x}^{-q}$, p et q entiers positifs ; soit $P_\lambda(G)$ le sous-espace $C_\lambda(G)$ formé des polynômes en $a(x)$ de degré plus petit que (p, q) , soit $M_{-\lambda}(G)$ le sous-espace de $C_{-\lambda}(G)$ orthogonal à $P_\lambda(G)$. Alors $P_\lambda(G)$ est un sous-espace invariant de $C_\lambda(G)$, $M_{-\lambda}(G)$ un sous-espace invariant de $C_{-\lambda}(G)$, et les représentations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{ccc} C_{-\lambda}(G)/M_{-\lambda}(G) & \text{et} & P_\lambda(G) \quad \text{d'une part} \\ C_\lambda(G)/P_\lambda(G), M_{-\lambda}(G), C_{-\lambda}(G) & \text{et} & C_\lambda(G) \quad \text{où } \lambda'(x) = x^p \bar{x}^{-q}, \\ & & \text{d'autre part ;} \end{array}$$

$k = \mathbb{R} : \lambda(x) = x^{-n} \text{sgn} x$, n entier > 0 ; soit $P_\lambda(G)$ le sous-espace de $C_\lambda(G)$ formé des polynômes de degré plus petit que n , soit $M_{-\lambda}(G)$ le sous-espace de $C_{-\lambda}(G)$ orthogonal à $P_\lambda(G)$. Alors $P_\lambda(G)$ est un sous-espace invariant de $C_\lambda(G)$, $M_{-\lambda}(G)$ un sous-espace invariant de $C_{-\lambda}(G)$, et la représentation $C_{-\lambda}(G)/M_{-\lambda}(G)$ est équivalente à $P_\lambda(G)$;

k est un corps à valuation discrète : $\lambda = \pm 1$; soit $P_{-1}(G)$ le sous-espace de $C_{-1}(G)$ formé des fonctions constantes, soit $M_1(G)$ le sous-espace de $C_1(G)$ orthogonal à $P_{-1}(G)$. Alors $P_{-1}(G)$ est un sous-espace invariant de $C_{-1}(G)$, $M_1(G)$ un sous-espace invariant de $C_1(G)$, et on a les équivalences :

$$C_{\underline{1}}(G)/M_{\underline{1}}(G) \text{ est équivalente à } P_{\underline{-1}}(G)$$

$$C_{\underline{-1}}(G)/P_{\underline{-1}}(G) \text{ est équivalente à } M_{\underline{1}}(G)$$

[2], [3].

Si on lit ce théorème dans la représentation de Weil (fin du § 9), on voit que (10.4) est l'opérateur de conjugaison E défini au théorème 6.3.

11. SÉRIE CONTINUE : REPRÉSENTATIONS UNITAIRES

On cherche pour quelles valeurs de λ l'espace $S(\lambda, \lambda)$ contient des formes hermitiennes de signe défini. D'après le théorème 9.1, on a alors

(a) soit $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, i.e. λ est unitaire ; dans ce cas $\int_{N_-} f(x) \overline{g(x)} dx$ définit un produit scalaire sur $C_\lambda(G)$: c'est la série principale de G ;

(b) soit $\lambda = \bar{\lambda}$, i.e. λ réel, et si $2\lambda \notin 2Z(k)$ la forme est nécessairement $Z_\lambda(f * g^\circ)$ (les autres cas, qui font intervenir des dérivations, donnent des formes dégénérées ; le cas $\lambda = 0$ est compris dans (a)).

Si $\lambda \neq 0$, on se limite à $\text{Ex } \lambda > 0$ en raison de l'équivalence des représentations $C_\lambda(G)$ et $C_{-\lambda}(G)$. On a alors, d'après l'équation fonctionnelle de la fonction zeta

$$(11.1) \quad Z_\lambda(f * f^\circ) = \Gamma(\lambda) Z_{1-\lambda}(|f''|^2) \quad f \in \mathcal{S}(N_-) .$$

Si $\text{Ex } \lambda < 1$, $Z_{1-\lambda}$ est donnée par une intégrale. Donc si $\lambda(x) = |x|^r$, $0 < r < 1$, on définit une structure hermitienne sur $C_\lambda(G)$ en posant

$$(11.2) \quad (f|g) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} Z_\lambda(f * g^\circ) = Z_{1-\lambda}(f'' \bar{g}'')$$

et $C_\lambda(G)$ se complète en $L^2(N_-, |t|^r dt)$, espace de Hilbert, où la représentation

associée est irréductible. Pour $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la réciproque est dans [2]. Si k est à valuation discrète, une condition nécessaire est que $1-\lambda$ soit de signe défini (c'est une mesure sur l'ouvert $|x| = 1$), c'est-à-dire que λ ne soit pas ramifié. Notons donc $\lambda(x) = |x|^r$. Si $r \neq 1$, le prolongement analytique de $Z_{1-\lambda}$ est

$$(11.3) \quad Z_{1-\lambda}(|f''|^2) = \int_M |f''(x)|^2 a(x)^{-\lambda} dx + \frac{q^{m(r-1)}}{1-q^{r-1}} |f''(0)|^2 \quad f \in \mathcal{G}(N_-)$$

où m est un entier et M un compact multiplicatif, tous deux assez grands. Cette forme est de signe défini si et seulement si $r < 1$. De plus, cette expression montre que si $r = 1$, le sous-espace $M_1(G)$ de $D_1(G)$ se complète en $L^2(N_-, d^x x)$.

THÉORÈME 11.1. Représentations unitaires de la série continue. Les représentations unitaires induites par un caractère généralisé λ de A sont :

(a) les représentations de la série principale, induites par les caractères de A elles se réalisent dans $L^2(N_-)$ et sont irréductibles si λ n'est pas un caractère $s \neq 0$;

(b) les représentations de la série "complémentaire", induites par les caractères réels $\lambda(x) = |x|^r$, $0 < r < 1$, réalisées dans les espaces $L^2(N_-, a(x)^{-r} dx)$ elles sont irréductibles.

Si le corps k est à valuation discrète, on appelle représentation spéciale de G la représentation de G dans le sous-espace invariant $M_1(G)$ de $C_1(G)$ complété en $L^2(N_-, d^x x)$.

Les représentations de la série continue donnent, si $k = \mathbb{R}$, les représentations de la série discrète : elles correspondent à $\lambda(x) = x^n$, n entier > 0 , l'espace $C_n(G)$ se décomposant en somme directe de deux sous-espaces invariants sur chacun desquels on peut mettre une structure hermitienne ([2]).

12. SÉRIES DISCRÈTES DE REPRÉSENTATIONS

On reprend les notations du § 6 : $B = k(d^{\frac{1}{2}})$ est un corps quadratique sur k , C est le sous-groupe de Cartan compact associé. Le théorème 6.3 décompose la représentation de Weil $(L^2(B), W^B)$ en somme directe hilbertienne des sous-espaces invariants $L_m^2(B)$, m caractère de C , formés des fonctions de type m

$$(12.1) \quad f(cz) = c^m f(z) \quad \text{quel que soit } c \in C.$$

On envoie $L_m^2(B)$ sur $L^2(\underline{n})$, où $\underline{n}$ est le groupe des normes de l'extension B , comme il a été dit au § 5. Les formules (6.11) se traduisent alors en

$$(12.2) \quad W_m^B(n)F(x) = \tau'(ux)F(x) \quad \text{si } n = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(12.3) \quad W_m^B(a)F(x) = t^{1+m+s} F(t^2 x) \quad \text{si } a = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

s a été défini au § 4,

$$(12.4) \quad W_m^B(w)F(x) = a \cdot r \int_{\underline{n}} F(y) dy \int_{c\bar{c}=yx^{-1}} \tau'(-cx - c^{-1}y) dc^m$$

d'après (5.10).

THÉOREME 12.1. Irréductibilité des représentations des séries discrètes. Les représentations des séries discrètes sont irréductibles, sauf si le caractère m est d'ordre deux.

Preuve. Soit un opérateur continu qui commute à la représentation. (12.2)

montre que c'est la multiplication par une fonction mesurable bornée h sur $\underline{n}$.

(12.3) dit que h est constante sur les classes des carrés dans $\underline{n}$: c'est donc

l'irréductibilité pour $k = R$. Sinon h prend au plus deux valeurs. Si on revient

à la réalisation dans $L_m^2(B)$, h devient une fonction sur B qui est constante

sur chacune des deux classes du sous-groupe $k^X \cdot C$ de B^X ; la commutation à l'action

de w donne presque partout en $(x, y) \in B \times B$, $(h(x) - h(y))J_m(x, y) = 0$, où,

d'après (5.5) $J_m(x, y) = \sum_{\overline{cx, y}} c^{-m}$ est une somme de Kloosterman ([13]) dont les

propriétés donnent les conclusions (cf. thèse de Joseph A. Shalika, à paraître ?).

Le caractère τ' est de la forme $\tau'(x) = \tau(\alpha x)$, où τ est le caractère défini au § 1. Appelons $D_m^+(G)$, si $\alpha \in \underline{n}$, la série discrète de paramètre m , sinon $D_m^-(G)$: elles sont respectivement définies sur $\underline{n}$ et sur son complémentaire si, à la fonction F de $L_m^2(\underline{n})$, on associe la fonction $f(x) = F(\alpha x)$. Ce sont les séries discrètes de [3].

Les représentations $D_m^+(G)$ et $D_{m'}^-(G)$ ne sont pas équivalentes : on le voit en regardant la commutation à l'action de N . Le théorème 6.3 montre que les représentations d'indice m et m' opposés sont équivalentes. Le calcul des traces donne la réciproque.

APPENDICE : TRACES DES REPRÉSENTATIONS ET MESURE DE PLANCHEREL

Elles sont données par Gel'fand et Graev dans ([3]). Reproduisons-les.

Les représentations de la série principale et de la série complémentaire ont pour traces :

$$\text{Tr } T_\lambda(g) = \begin{cases} 0 & \text{si les valeurs propres de } g \text{ ne sont pas dans } k \\ \frac{b^\lambda + b^{-\lambda}}{|b - b^{-1}|} & \text{si les valeurs propres } b \text{ et } b^{-1} \text{ de } g \text{ sont dans } k. \end{cases}$$

La trace de la représentation spéciale, $\text{Tr } T_{\underline{1}}$, s'obtient de la formule précédente en y faisant $\lambda(x) = |x|$ et y retranchant 1 (codimension de $M_{\underline{1}}(G)$ dans $C_1(G)$).

La différence des traces des représentations des séries discrètes $D_m^+(G)$ et $D_m^-(G)$ est donnée par :

$$\mathrm{Tr} W_m^C,+(g) - \mathrm{Tr} W_m^C,-(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \text{ n'a pas ses valeurs propres sur } C \\ e \, s(v) \frac{b^m + b^{-m}}{|N_{B/k}(b-b^{-1})|^{\frac{1}{2}}} & \text{sinon .} \end{cases}$$

s est le caractère associé à l'extension quadratique B de k relative à C , et $e = 2\Gamma(s)/a_0$ où a_0 est donné par (5.3) où l'on a pris τ comme caractère additif : on a $a_0 = \pi$ si $k = \mathbb{R}$ et $a_0 = (1+q^{-1})/2$ si l'extension $B = k(d^{\frac{1}{2}})$ est non ramifiée, et $a_0 = |d|^{\frac{1}{2}}$ sinon.

La somme des traces est, en g ,

$$\mathrm{Tr} \bar{W}_m^C(g) = 2 \int_C (\mathrm{Tr} g - c - c^{-1})^{s-1} dc^m .$$

La mesure de Plancherel est donnée par la décomposition de la mesure de Dirac de G

$$\delta(g) = \int_{X_1(A)} \mathrm{Tr} T_\lambda(g) dp_A(\lambda) + (2f \mathrm{Tr} T_{\underline{1}}(g)) + \sum_C \int_{X_1(C)} \mathrm{Tr} \bar{W}_m^C(g) dp_C(m)$$

f étant une constante, la sommation se faisant sur les sous-groupes de Cartan compacts, et le terme entre parenthèses n'intervenant que si k est à valuation discrète. Les mesures dp sont données par

$$dp_A(\lambda) = c_k \frac{d\lambda}{|\Gamma(\lambda)|^2}$$

où $d\lambda$ est la mesure duale de da , et où $c_k = 2, \frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}$ suivant que $k = \mathbb{C}, \mathbb{R}$, ou est à valuation discrète

$$p_C(m) = f \int_C \frac{dc^m}{|\text{Tr } c - 2|}, \quad f = \frac{q^2}{2(q+1)}$$

(on prend $q = 1$ si $k = \mathbb{R}$) sauf si l'extension est ramifiée, auquel cas

$$p_C(m) = f \int_C (1 + |\text{Tr } c - 2|^{-1}) dc^m$$

l'intégration se faisant sur les points c de C tels que $|1-c| < 1$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. BRUHAT - Distributions sur les groupes localement compacts et applications aux représentations des groupes p-adiques. Bull. S.M.F. 89 (1961), p. 43-76.
- [2] I.M. GEL'FAND, M.I. GRAEV, N. Ya. VILENKIN - Generalized functions, t. V, Academic Press, New-York (1966).
- [3] I.M. GEL'FAND, M.I. GRAEV, I.I. PIATECKIJ-SAPIRO - Obobchennie funktsii, t. VI, Moscou (1966).
- [4] R. GODEMENT - Analyse spectrale des fonctions modulaires, Séminaire Bourbaki, n° 278, déc. 1964, rédaction de mars 1966.
- [5] H. JACQUET - Fonctions de Whittaker attachées aux groupes de Chevalley, Thèse, juin 1967, Bull. S.M.F. 95 (1967), p. 243-309.
- [6] P.J. SALLY and M.H. TAIBLESON - Special functions on locally compact fields, Acta Mathematica 116 (1966), p. 279-306.
- [7] S. TANAKA - On irreducible unitary representations of some special linear groups of the second order, Osaka J. Math. 3 (1966), p. 217-242.

- [8] J. TATE - Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions. Algebraic number theory (ed. by J.W.S. Cassels and A. Fröhlich). Ac. Press, 1967.
- [9] A. WEIL - Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. Acta Mathematica 111 (1964), p. 153-211.
- [10] A. WEIL - Fonctions zeta et distributions. Séminaire Bourbaki, n° 312, juin 1966.
- [11] A. WEIL - Basic Number Theory. Springer-Verlag (1967).
- [12] S. TANAKA - Irreducible representations of $SL_2(\mathbb{F}_q)$. Osaka J. Math. 4 (1967) p. 65-84.
- [13] H. D. KLOOSTERMAN - The behavior of general theta functions under the modular group. Ann. of Math. 47 (1946), p. 317-447.