SÉMINAIRE N. BOURBAKI

DANIEL LACOMBE

Logique du premier ordre avec quantificateur cardinalisé

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 328, p. 237-260

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__237_0>

Séminaire BOURBAKI
19e année, 1966/67, n° 328 Juin 1967

LOGIQUE DU PREMIER ORDRE AVEC QUANTIFICATEUR CARDINALISÉ

par Daniel LACOMBE

0. Introduction

0.1 Soit $\aleph_\alpha$ un cardinal infini donné. On peut se demander "ce qui se passe" lorsqu'on introduit dans le calcul des prédicats (du premier ordre) un symbole signifiant "il existe au moins $\aleph_\alpha$ éléments tels que...". On est conduit en particulier à discuter suivant les valeurs de l'ordinal α.

Ce problème, posé par MOSTOWSKI et résolu par lui dans le cas $\alpha = 0$, a été étudié par de nombreux auteurs (CRAIG, FUHRKEN, KEISLER, SCOTT, SILVER, VAUGHT, etc...). On trouvera dans [1] l'état de la question en 1963 (avec une bibliographie) ; les articles [2] et [3] apportent quelques résultats supplémentaires. Le lemme fondamental, utilisé (avec ou sans généralisation) dans tous ces travaux, est tiré de [4].

0.2 A titre de comparaison, nous rappelons dans le § 1 les principaux résultats classiques concernant le calcul des prédicats ordinaires (avec uniquement le quantificateur "il existe" - d'où aussi le quantificateur "quel que soit" -, mais sans aucun quantificateur cardinalisé).

Dans le § 3 nous donnons les définitions nécessaires, avec un certain nombre de résultats généraux (dont quelques-uns non triviaux).

Le § 4 est consacré à l'étude des cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. Les démonstrations y sont assez délicates et les résultats assez surprenants. En effet, contrairement à ce qu'un esprit non prévenu pourrait supposer, le cas $\alpha = 1$ est (à plusieurs points de vue) beaucoup plus simple que le cas $\alpha = 0$. Par contre, la preuve de la simplicité du cas $\alpha = 1$ est beaucoup moins simple que la preuve de la non-

simplicité du cas $\alpha = 0$. D'autre part, on démontre que ces deux cas se trouvent en quelque sorte aux extrémités opposées de la famille des cas possibles (munie d'une certaine relation d'inclusion).

0.3- Bien entendu, cet exposé (qui consiste à étudier "sémantiquement" une certaine classe de systèmes formels) se déroule dans la théorie des ensembles usuelle (formalisée ou non), avec axiome de choix. Quelques définitions et propositions ensemblistes utiles seront données dans le §2.

1- Rappels sur le calcul des prédicats du premier ordre avec égalité

1.1- Soit $\mathbb{P}$ un ensemble fini ou dénombrable, et soit Ar une application de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{N}$ (ensemble des entiers ≥ 0). Les éléments de $\mathbb{P}$ seront appelés symboles de prédicats (ou "prédicats formels", ou encore "constantes de prédicats"). Pour chaque $P \in \mathbb{P}$, $Ar(P)$ est l'arité (ou "nombre de places" de P).

Dans le cas où $\mathbb{P}$ est infini (dénombrable), nous supposerons de plus que $\mathbb{P}$ est muni d'une numérotation Num (bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{P}$) telle que la fonction Ar o Num soit récursive.

On sait définir l'ensemble $\mathcal{F}^*(\mathbb{P}, Ar)$ [ou, en abrégé, $\mathcal{F}^*$] des formules du premier ordre avec égalité construites sur $(\mathbb{P}, Ar)$ [c'est un certain sous-ensemble de l'ensemble de toutes les suites finies à valeurs dans $\mathbb{P} \cup \mathbb{V} \cup \{=, \neg, \wedge, \forall\}$, où $\mathbb{V}$ est un ensemble (supposé infini dénombrable) de "symboles de variables", et où $=, \neg, \wedge, \forall$ sont des symboles appelés respectivement "égalité", "négation", "conjonction" et "quantificateur existentiel" "formels"].

On sait également définir le sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}^*$ constitué par les formules closes (ou "sans variables libres").

$\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^*$ sont dénombrables. On définit canoniquement (à une permutation récursive de $\mathbb{N}$ près) une certaine numérotation de $\mathcal{F}$ (dépendant de Num lorsque $\mathbb{P}$ est infini). Relativement à cette numérotation on peut parler de sous-ensemble récursif ou récursivement énumérable de $\mathcal{F}$, etc...

REMARQUE - Beaucoup d'entre les résultats indiqués dans cet exposé se généralisent au cas où le cardinal de $\mathbb{P}$ est quelconque. Mais, faute de place, nous ne nous occuperons pas de cette question.

1.2 Soit E un ensemble quelconque. Un prédicat p-aire (ou "relation à p arguments") sur E est une application de E^p dans l'ensemble $\{$faux, vrai$\}$ (on peut - si on veut - assimiler respectivement les éléments "faux" et "vrai" aux ensembles $\emptyset$ et $\{\emptyset\}$, ou aux nombres 0 et 1).

L'ensemble de tous les prédicats p-aires sur E sera désigné par $\mathcal{P}^{(p)}E$. On peut évidemment et canoniquement identifier $\mathcal{P}^{(p)}E$ à $\mathcal{P}(E^p)$ (1).

Nous poserons $\mathcal{P}^* E = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^{(p)}E$.

1.3 Nous appellerons ($\mathbb{P}$, Ar)-structure [ou, pour abréger, structure] tout couple (E, σ), où E est un ensemble non-vide, et σ une application de $\mathbb{P}$ dans $\mathcal{P}^* E$ telle que $\sigma(P) \in \mathcal{P}^{(\mathrm{Ar}(P))}E$ pour chaque $P \in \mathbb{P}$. L'ensemble E est appelé la base (ou l'"univers") de (E,σ).

Nous appellerons cardinal d'une structure le cardinal de sa base.

1.4 Soit F un élément de $\mathcal{F}^*$, et soit $(v_1,\dots,v_p)$ une énumération complète et sans répétition des éléments de $\mathbb{V}$ qui possèdent des occurences libres dans F. Soit d'autre part (E,σ) une structure. On sait définir (par récurrence sur la longueur de F) un certain élément de $\mathcal{P}^{(p)}E$ qui est appelé la réalisation de F dans (E,σ). Bien entendu, cette définition est telle que les symboles $=, \neg, \cap, \exists$ sont "traduits" respectivement par l'égalité, la négation, la conjonction et le quantificateur existentiel "ordinaires" (respectivement représentés par = , non, et, $\exists$) et que chaque $P \in \mathbb{P}$ est traduit par le prédicats $\sigma(P)$.

Dans le cas $p = 0$, une formule close F est dite vérifiée par (E,σ) si sa réalisation dans (E,σ) est la constante "vrai".

La traduction d'un élément F de $\mathcal{F}$ est une "condition du premier ordre" portant sur (E,σ). La locution "du premier ordre" signifie que les seules variables (quantifiées) figurant dans une telle condition sont des variables décrivant E (ce qui exclut les conditions où figurent des variables décrivant $\mathcal{P}^{(p)}E$, ou E^E, ou $E^{\mathbb{N}}$, etc...).

---

(1) $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X .

Par exemple, si R désigne un élément de $\mathcal{P}^{(2)}E$, chacune des conditions suivantes est du premier ordre : " R est une relation d'équivalence", " R est une relation d'ordre", " R est un ordre total dense" (c'est-à-dire tel que la base E contienne au moins 2 éléments, et qu'entre deux éléments distincts quelconques de E il en existe toujours un troisième), etc... . Mais la condition " R est un bon-ordre" n'est pas du premier ordre (et on démontre qu'elle n'est équivalente à aucune condition du premier ordre).

De même, si P désigne un sous-ensemble de E, il n'existe aucun α tel que la condition "cardinal de P $\leq \aleph_\alpha$ " soit exprimable dans le premier ordre (et de même pour la condition " cardinal de P = $\aleph_\alpha$ ") . Par contre cette condition est exprimable, pour chaque α fini, dans un système où on dispose de deux espèces de variables décrivant respectivement E et E^E.

REMARQUE A- Lorsque la base E est clairement indiquée dans le contexte, nous écrirons " $\exists x$ " pour " $\exists x \in E$ ", et " $\forall x$ " pour " $\forall x \in E$ " .

REMARQUE B- Pour k entier fini, l'expression "il existe au moins k éléments tels que... " est manifestement définissable dans le premier ordre avec égalité, et ne nécessite par conséquent aucun symbole spécial.

REMARQUE C- Nous n'avons pas introduit dans notre langage formel de <u>symboles fonctionnels</u> (ou "constantes de fonctions"). En effet, on peut toujours remplacer chaque symbole fonctionnel à p places par un symbole de prédicat à p+1 places, avec une convention formelle de remplacement qui est évidente lorsqu'on interprète le prédicat comme le graphe de la fonction.

1.5- Une formule close (élément de $\mathcal{F}$) est dite <u>valide</u> si elle est vérifiée par toutes les structures.

L'ensemble de toutes les formules valides sera désigné par $\mathcal{V}$.

$\mathcal{A}$ étant un sous-ensemble (fini ou infini) de $\mathcal{F}$, une structure est appelée un <u>modèle</u> de $\mathcal{A}$ si elle vérifie tous les éléments de $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ est dit consistant (ou "non-contradictoire") s'il admet au moins un modèle.

Pour que F soit valide, il faut et il suffit que $\{\neg F\}$ soit non-consistant.

1.6- Les principaux résultats classiques sont les suivants :

THEOREME 1.I - Si $\mathcal{A}$ admet un modèle, il admet un modèle fini ou dénombrable.

THEOREME 1.II - Si $\mathcal{A}$ admet un modèle infini, il admet un modèle de n'importe quel cardinal infini.

COROLLAIRE. Si $\mathcal{A}$ possède un modèle infini, il possède des modèles non-isomorphes entre eux.

THEOREME 1.III - Pour que $\mathcal{A}$ soit consistant, il suffit que tout sous-ensemble fini de $\mathcal{A}$ le soit.

THEOREME 1.IV - $\mathcal{V}$ est récursivement énumérable.

PROPOSITION 1.A - Si Ar ne prend que des valeurs < 2, $\mathcal{V}$ est récursif.

PROPOSITION 1.B - Si Ar prend au moins une fois une valeur ≥ 2, $\mathcal{V}$ n'est pas récursif.

Le Corollaire du Th. 1.II signifie que, sauf dans des cas triviaux (cf. Remarque ci-dessous), une théorie du premier ordre n'est jamais "catégorique". Nous verrons que la situation peut changer lorsqu'on introduit un quantificateur cardinalisé.

Comme conséquence du théorème 1.IV, on peut déterminer (de multiples façons) un système d' "axiomes" et de "règles" tel que $\mathcal{V}$ soit identique à l'ensemble des formules obtenables à partir des axiomes par application des règles. C'est ce qu'on appelle une définition "syntaxique" de $\mathcal{V}$ (par opposition à la définition "sémantique" utilisée ici).

REMARQUE. Il existe évidemment des ensembles $\mathcal{A}$ consistants qui ne possèdent aucun modèle fini, par exemple l'ensemble constitué par l'unique formule qui formalise la condition " R est une relation d'ordre dense ". Il existe aussi des $\mathcal{A}$ consistants qui ne possèdent que des modèles finis, par exemple l'ensemble constitué par l'unique formule $\neg \vee v_1 \vee v_2 \neg \asymp v_1 v_2$ [dont la traduction est : $\forall x \forall y (x = y)$] .

Du Th. 1.III on déduit aisément que, si $\mathcal{A}$ admet des modèles de cardinal fini arbitrairement grand, alors $\mathcal{A}$ admet un modèle infini.

2. Considérations ensemblistes

2.1 Le cardinal d'un ensemble E sera désigné par Card(E).

Convenons que l'expression "il existe au moins $\aleph_\alpha$ ..." sera notée par le signe $\exists_\alpha$. Autrement dit, si x représente une variable décrivant un ensemble donné E, l'expression " $\exists_\alpha x(A)$ " signifie : $\mathrm{Card}(\{ x \mid (A) \}) \geq \aleph_\alpha$.

Nous utiliserons le quantificateur dual $\forall_\alpha$ signifiant "pour tous, sauf pour moins de $\aleph_\alpha$ ". Autrement dit, $\forall_\alpha x(A)$ équivaut par définition à : non $\exists_\alpha x$ non (A).

Pour $\alpha = 0$, $\exists_\alpha$ signifie "il existe une infinité", et $\forall_\alpha$ signifie "pour tous sauf un nombre fini".

2.2 Soit R un élément de $\mathcal{P}^{(2)}E$. Nous dirons que R est un ordre de genre α sur E (dans [1] : $\aleph_\alpha$-like linear ordering) si :

(I) R est un ordre total sur E ;

(II) pour tout $x \in E$, l'ensemble des prédécesseurs de x relativement à R est de cardinal $< \aleph_\alpha$, c'est-à-dire

$$\forall x \ \forall_\alpha y \text{ non } R(y, x) \quad ;$$

(III) $\mathrm{Card}(E) \geq \aleph_\alpha$.

On voit aisément que de (I) et (II) on déduit : $\mathrm{Card}(E) \leq \aleph_\alpha$.
La base d'un ordre de genre α est donc exactement de cardinal $\aleph_\alpha$.

Parmi les ordre de genre α , il y a les bons-ordres isomorphes au premier ordinal ayant $\aleph_\alpha$ pour cardinal. Mais ce ne sont pas les seuls.

Il y a exception pour $\alpha = 0$: un ordre de genre 0 est nécessairement de type ω (c'est-à-dire isomorphe à l'ordre naturel sur $\mathbb{N}$). Autrement dit, si nous désignons par $\Omega_0(E,R)$ la conjonction des conditions (I), (II) et (III) dans le cas $\alpha = 0$, on voit que, pour tout (E,R) :

$$\Omega_0(E,R) \iff \left[(E,R) \text{ est isomorphe à } (\mathbb{N}, \leq)\right] .$$

REMARQUE - Soit α un ordinal tel que $\aleph_\alpha$ soit régulier (cf. 2.5 ci-dessous), et soit R un ordre de genre α sur E. Pour un sous-ensemble P de E (élément de $\mathcal{P}^{(1)}E$), le fait d'être de cardinal $\aleph_\alpha$ équivaut au fait d'être non-borné. Autrement dit, on a alors :

(IV) $$\exists_\alpha x P(x) \iff \forall y \exists x \left[R(y,x) \text{ et } P(x)\right] .$$

2.3 Soit $P \in \mathcal{P}^{(1)}E$ et $Q \in \mathcal{P}^{(2)}E$. Considérons la condition (0) suivante :

(0) Card $(P) < \aleph_\alpha$ et Q induit sur P une relation d'ordre total dense.

Cette condition n'est jamais satisfaite pour $\alpha = 0$. Par contre, pour chaque $\alpha > 0$, on peut trouver un (E,P,Q) qui la satisfasse (avec en plus, si on veut, Card $E = \aleph_\alpha$) .

2.4 Soit $E' \in \mathcal{P}^{(1)}E$, $R \in \mathcal{P}^{(2)}E$, $S \in \mathcal{P}^{(2)}E$. Désignons par $\Omega_1(E,E',R,S)$ la conjonction de $\Omega_0(E',R \restriction E')$ [où Ω_0 est défini comme en 2.2, et où $R \restriction E'$ désigne la restriction de R à E'] et de la condition suivante :

$$\forall x \, \forall y \left[\left((\forall z \in E') \left[S(z,x) \iff S(z,y)\right]\right) \Longrightarrow x = y\right].$$

On voit aisément que cette condition $\Omega_1(E,E',R,S)$ ne peut être satisfaite que si Card $E \leq 2^{\aleph_0}$, et peut en fait être satisfaite pour un certain (E,E',R,S) tel que Card $E = 2^{\aleph_0}$.

On définirait de même une condition $\Omega_2(E, E', R, E_1, S_1, S)$ qui ne peut être satisfaite que si Card $E \leq 2^{(2^{\aleph_0})}$, et peut être satisfaite dans le cas de l'égalité. Etc...

2.5- Le cardinal $\aleph_\alpha$ est dit <u>régulier</u> si, pour toute famille $(E_i)_{i\in I}$ d'ensembles, la condition

$$\text{Card } I < \aleph_\alpha \quad \text{et} \quad (\forall i \in I)\ (\text{Card } E_i < \aleph_\alpha)$$

entraîne : $\text{Card} \bigcup_{i\in I} E_i < \aleph_\alpha$.

$\aleph_0$ est régulier. Et $\aleph_{\beta+1}$ est régulier quel que soit l'ordinal β .

Pour $Q \in \mathcal{P}^{(2)}E$, considérons la condition (1) suivante :

$$(1) \qquad \exists_\alpha x\ \exists y\ Q(x,y) \Longrightarrow \left[\exists y\ \exists_\alpha x\ Q(x,y) \quad \text{ou} \quad \exists_\alpha y\ \exists x\ Q(x,y)\right]$$

Pour que cette condition (1) soit satisfaite quels que soient E et Q, il faut et il suffit que $\aleph_\alpha$ soit régulier (ce n'est rien de plus que la définition).

2.6- Soit R un ordre total sur E. Pour un sous-ensemble M de E et une application ϕ de E dans E, considérons les conditions suivantes :

(a) ϕ est constante sur M

(a') ϕ est constante sur M à partir d'un certain rang, c'est-à-dire :

$$\exists u\ \exists v\ \forall x \left(\left[M(x) \text{ et } R(u,x)\right] \Longrightarrow \phi(x) = v\right)$$

(b) ϕ augmente indéfiniment sur M, c'est-à-dire :

$$\forall v\ \exists u\ \forall x \left(\left[M(x) \text{ et } R(u,x)\right] \Longrightarrow R\left[v, \phi(x)\right]\right)$$

Désignons par $\Lambda_R(M,\phi)$ la condition $\left[(a) \text{ ou } (b)\right]$, et par $\Lambda'_R(M,\phi)$ la condition $\left[(a') \text{ ou } (b)\right]$.

Pour une application ψ de E^2 dans E, désignons par $\Lambda^*_R(M,\psi)$ la condition $\forall t\ \Lambda'_R(M,\psi_t)$, où ψ_t désigne l'application $x \mapsto \psi(t,x)$ de E dans E.

On démontre sans difficulté (pour la Proposition 2.A.0 on utilise une construction par récurrence) :

PROPOSITION 2.A.1- Si $\aleph_\alpha$ est régulier et si R est de genre α, alors, pour tout sous-ensemble L non-borné (c'est-à-dire de cardinal $\aleph_\alpha$) de E et toute application ϕ de E dans E, il existe un sous-ensemble non-borné M de L satisfaisant à $\Lambda_R(M,\phi)$.

PROPOSITION 2.A.0- Si R est isomorphe à l'ordre naturel sur $\mathbb{N}$ (cas $\alpha = 0$), alors, pour tout sous-ensemble L non-borné (c'est-à-dire infini) de E et toute application ψ de E^2 dans E, il existe un sous-ensemble non-borné M de L satisfaisant à $\Lambda^*_R(M,\psi)$.

De ces Propositions on déduit respectivement et aisément, au moyen d'une construction par récurrence.

PROPOSITION 2.B.1- Soient α et R comme dans la Proposition 2.A.1. Soit Φ un ensemble dénombrable d'applications de E dans E. Il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{M}$ totalement ordonné par inclusion de sous-ensembles non-bornés de E tel qu'on ait

$$(\forall\, \phi \in \Phi)\ (\exists M \in \mathcal{M})\ \Lambda_R(\mathcal{M},\phi)$$

PROPOSITION 2.B.0- Comme la Proposition 2.B.1., en faisant $\alpha = 0$, et en remplaçant Φ par Ψ et Λ_R par Λ^*_R .

Soient Φ et $\mathcal{M}$ comme dans la Proposition 2.B.1 [resp. : 2.B.0] . Il existe un ultra-filtre incluant $\mathcal{M}$ et incluant l'ensemble des complémentaires de parties bornées. Si "presque partout" signifie "sur un ensemble appartenant à cet ultra-filtre", on voit que, pour toute fonction $\phi \in \Phi$ [respectivement : pour toute fonction ψ_t, avec $\psi \in \Psi$ et $t \in E$] : ou bien ϕ est presque partout constante ; ou bien, pour chaque constante, ϕ est presque partout supérieure à cette constante. C'est cette propriété qui sera utilisée dans la démonstration des Lemmes fondamentaux du § 4.

REMARQUE - Dans le cas de la Proposition 2.B.0, l'ensemble de toutes les ψ_t est dénombrable. On pourrait donc se contenter d'utiliser la Proposition 2.B.1. Mais ce ne serait pas suffisant. En effet, pour nos démonstrations futures, il y aura beaucoup de différence entre : d'une part une quantification comme "$\forall t \in E$" qui sera "formalisable" dans la théorie (du premier ordre)

considérée, et d'autre part une quantification comme " $\forall \phi \in \Phi$ " ou " $\forall \psi \in \Psi$ " qui ne sera pas formalisable dans ladite théorie (et restera par conséquent du domaine de la "méta-théorie"). En particulier, une propriété exprimable avec seulement des quantificateurs (ordinaires) sur E peut rester vraie, non seulement pour les structures (E, σ, R) où (E, R) est isomorphe à $(\mathbb{N}, \leq)$, mais aussi pour toutes les (E, σ, R) qui satisfont à certains axiomes du premier ordre : ce sera le cas de la Proposition 2.B.0, avec L et ψ donnés, et M donné (ou tout au moins explicitement défini à partir des données).

3. Définitions essentielles - Résultats généraux.

3.1- Soient $\mathbb{P}$, Ar, $\mathcal{F}^*$, $\mathcal{F}$ comme au §1.

Ajoutons à notre langage formel un nouveau symbole $\bigvee^+$ (à ranger dans les "constantes logiques" avec $\neg$, $\sqcap$, $\bigvee$).

En procédant comme pour la définition de $\mathcal{F}^*$, avec adjonction d'une règle de formation portant sur $\bigvee^+$ (semblable à celle portant sur $\bigvee$), on définit l'ensemble $\mathcal{G}^*$ des formules du premier ordre avec égalité et avec quantificateur supplémentaire construites sur $(\mathbb{P}, \mathrm{Ar})$.

La notion de variable libre se définit dans $\mathcal{G}^*$ comme dans $\mathcal{F}^*$ (en considérant $\bigvee$ et $\bigvee^+$ comme "liants"). Nous désignerons par $\mathcal{G}$ l'ensemble des formules closes de $\mathcal{G}^*$.

$\mathcal{G}$ est dénombrable, et canoniquement muni d'une certaine numérotation (dépendant de Num lorsque $\mathbb{P}$ est infini). Relativement à cette numérotation, $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble récursif de $\mathcal{G}$.

3.2- Soit maintenant α un ordinal donné.

Soit (E,σ) une $(\mathbb{P}, \mathrm{Ar})$-structure, de cardinal $\geq \aleph_\alpha$
En "traduisant" le symbole $\bigvee^+$ par $\exists_\alpha$, on définit sans aucune difficulté la notion de α-réalisation d'un élément de $\mathcal{G}^*$ dans (E, σ), et en particulier (dans le cas des formules closes) la propriété pour (E, σ) de α-vérifier un élément de $\mathcal{G}$.

Procédant comme en 1.5, nous définissons le sens des expressions suivantes (où $G \in \mathcal{G}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$) :

G est <u>α-valide</u> ;

(E, σ) est un <u>α-modèle</u> de $\mathcal{B}$;

$\mathcal{B}$ est <u>α-consistant</u> .

Nous désignerons par $\mathcal{V}_\alpha$ l'ensemble des éléments α-valides de $\mathcal{G}$.

On a évidemment, quel que soit α, $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_\alpha$.

Contrairement à celle de $\mathcal{G}$, la définition de $\mathcal{V}_\alpha$ fait (au moins à première vue) intervenir α . Les $\mathcal{V}_\alpha$ correspondant aux différents α sont des sous-ensembles du même ensemble dénombrable $\mathcal{G}$. Le problème fondamental est de savoir comment $\mathcal{V}_\alpha$ dépend de α .

REMARQUE. Dans ces définitions, la condition Card $E \geq \aleph_\alpha$ est imposée pour que le quantificateur $\exists_\alpha$ ne risque pas de se trouver trivialisé (de même que, dans le calcul des prédicats ordinaire, on impose la conditon $E \neq \emptyset$ pour ne pas trivialiser le quantificateur $\exists$). On peut, si on veut, introduire la notion suivante : G est <u>α-super-valide</u> si, lorsqu'on traduit $\overset{+}{\vee}$ par $\exists_\alpha$, la condition qui correspond à G est satisfaite dans toute (E, σ) avec $E \neq \emptyset$. Mais cette notion se ramène à celles de validité et de α-validité : G est α-super-valide si et seulement si G est α-valide et G' valide, en désignant par G' l'élément de $\mathcal{F}$ (formule sans quantificateur cardinalisé) obtenue en remplaçant (de proche en proche) dans G chaque sous-formule de la forme $\overset{+}{\vee} v\, X$ par une formule indentiquement fausse de $\mathcal{F}$ [par exemple $\overset{+}{\vee} v \neg (v = v)$, qui se traduit par : $\exists x (x \neq x)$] .

3.3 Nous avons déjà vu que le quantificateur $\exists_\alpha$ ne peut pas se "définir" à l'aide des opérations logiques du premier ordre (opérations booléennes et quantificateur $\exists$) .

Inversement, le quantificateur ordinaire $\exists$ ne peut pas se définir à partir des opérations booléennes et de $\exists_\alpha$. Autrement dit, l'introduction du symbole $\overset{+}{\vee}$ ne permet pas de supprimer le symbole $\vee$. C'est une conséquence (à peu près immédiate) du résultats (facile) suivant :

PROPOSITION 3.A- Soit G un élément de $\mathcal{G}$ où ne figure pas le symbole $\vee$. Soient (E,σ) et (E,σ') deux structures de même base E telles que, pour chaque $\underline{P} \in \mathbb{P}$, la différence symétrique entre $\sigma(\underline{P})$ et $\sigma'(\underline{P})$ soit de cardinal $< \aleph_\alpha$ [lorsque $Ar(\underline{P}) = 0$, on impose $\sigma(\underline{P}) = \sigma'(\underline{P})$]. Alors G est α-vérifiée par (E,σ) si et seulement si elle l'est par (E,σ').

3.4- Remarquons d'autre part que le quantificateur "il existe strictement plus de $\aleph_\alpha$" (ou, ce qui revient manifestement au même, le quantificateur "il existe exactement $\aleph_\alpha$") ne peut pas se définir à partir de $\exists_\alpha$, $\exists$ et des opérations booléennes.

Supposons en effet qu'il existe une condition $\Gamma(E,P)$ formalisée par un élément de $\mathcal{G}$ (où $\overset{+}{\vee}$ est interprété par $\exists_\alpha$), telle qu'on ait, quel que soit E de cardinal $\geq \aleph_\alpha$ et quel que soit $P \subset E$:

$$\text{Card } P > \aleph_\alpha \iff \Gamma(E,P)$$

D'après le Th. 3.I ci-dessous, puisque la condition $\Gamma(E,P)$ est satisfaite par un (E,P) avec Card $E \geq \aleph_\alpha$, elle est aussi satisfaite par un (E',P') avec Card $E' = \aleph_\alpha$. D'où contradiction.

3.5- La démonstration du Th. 1.IV ne s'étend pas : $\mathcal{V}_\alpha$ n'est pas récursivement énumérable quel que soit α.

Par contre, la démonstration de la Prop. 1.A ("élimination des quantificateurs" dans le calcul des prédicats unaires) s'étend sans difficulté : si Ar ne prend que des valeurs ≤ 1, $\mathcal{V}_\alpha$ est récursif. Ce cas trivial sera désormais supposé exclu.

De même, le fait que $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble récursif de $\mathcal{G}$ entraîne que, lorsque $\mathcal{V}$ n'est pas récursif (c'est-à-dire en dehors du cas trivial qu'on vient d'exclure), alors $\mathcal{V}_\alpha$ n'est pas non plus récursif.

De plus, si on considère la méthode classique qui permet de "réduire" une infinité dénombrable de prédicats (d'arités quelconques) à un seul prédicat d'arité 2, on constate que cette méthode peut s'appliquer à n'importe quelle généralisation du calcul des prédicats, et en particulier au cas des quantificateurs cardinalisés.

Pour ces raisons, nous supposerons toujours, dans ce qui suit, que $\mathfrak{P}$ contient tous les symboles de prédicats dont nous pourrons avoir besoin.

3.64 Soit G_0 l'élément de $\mathcal{G}$ qui formalise la négation de la condition (0) énoncée en 2.3. On a évidemment :

PROPOSITION 3.B.0.- $G_0 \in \mathcal{V}_\alpha \iff \alpha = 0$.

Soit G_1 l'élément de $\mathcal{G}$ qui formalise la condition (1) énoncée en 2.5. On a évidemment :

PROPOSITION 3.B.1.- $G_1 \in \mathcal{V}_\alpha \iff \aleph_\alpha$ est régulier.

Il existe donc au moins trois $\mathcal{V}_\alpha$ différents, correspondant respectivement à : $\alpha = 0$, α régulier non-nul , α non-régulier.

Si l'on s'autorise à employer l'hypothèse du continu généralisée (H C G), on semble actuellement en mesure de prouver qu'il n'existe que quatre $\mathcal{V}_\alpha$ différents, correspondant aux cas suivants (sur le dernier cas, cf. [3]) :

1° $\alpha = 0$;
2° α successeur (c'est-à-dire de la forme $\beta + 1$) ;
3° α limite et $\aleph_\alpha$ régulier (donc inaccessible, avec H C G) ;
4° α limite et $\aleph_\alpha$ non-régulier.

Sans H C G, la situation semble nettement plus compliquée (il n'est même pas évident qu'on puisse trouver, pour le cardinal de l'ensemble des différents $\mathcal{V}_\alpha$, un meilleur majorant que le trivial $2^{\aleph_0}$) .

De toute façon (même sans H C G), la Prop. 3.B.1 montre que la correspondance $\alpha \mapsto \mathcal{V}_\alpha$ n'est pas monotone (relativement à l'ordre ordinal sur les α , et à l'inclusion sur les $\mathcal{V}_\alpha$) .

Dans le § 4 , nous nous bornerons à étudier les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. Il semble d'ailleurs que les méthodes utilisées soient essentiellement les mêmes dans tous les cas.

3.7- Le Théorème 1.I, c'est-à-dire la "partie descendante" du théorème de Löwenheim-Skolem-Tarski, reste valable mutatis mutandis. On a en effet, quel que soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ et quel que soit l'ordinal α :

THÉORÈME 3.I- Si $\mathcal{B}$ est α-consistant, alors $\mathcal{B}$ possède un α-modèle de cardinal $\leq \aleph_\alpha$.

COROLLAIRE- Pour qu'une formule close (élément de $\mathcal{G}$) soit α-valide, il faut et il suffit qu'elle soit α-vérifiée par toute structure de cardinal $\leq \aleph_\alpha$.

PREUVE- On opère en gros comme dans la démonstration classique du Th. 1.I. Pour éliminer le quantificateur $\exists$, on introduit des fonctions ϕ_i (dites "de Skolem"). Pour $\exists_\alpha$, on prend un sous-ensemble fixe U de E tel que Card U = $\aleph_\alpha$, et on associe à tout $P \in \mathcal{P}^{(p+1)}E$ une application ψ de E^{p+1} dans E telle qu'on ait, $\forall x_1,\ldots,x_p \in E$:

$$(\forall u, u' \in U)\ \left[u \neq u' \Longrightarrow \psi(u,x_1,\ldots,x_p) \neq \psi(u', x_1,\ldots,x_p)\right]$$

$$\exists_\alpha y\ P(x_1,\ldots,x_p,y) \Longleftrightarrow (\forall u \in U)\ P\left[x_1,\ldots,x_p, \psi(u,x_1,\ldots,x_p)\right].$$

Soit E' le plus petit sous-ensemble de E qui inclut U et qui est stable vis-à-vis de toutes les ϕ_i et ψ_j ainsi introduites (en prenant successivement pour P la réalisation de chaque formule de $\mathcal{G}^*$). On voit aisément qu'une formule de $\mathcal{G}$ qui est α-vérifiée par (E,σ) est aussi α-vérifiée par (E',σ'), en désignant par σ' la restriction de σ à E' (structure induite). Mais puisque les ϕ_i et ψ_j sont en infinité dénombrable, on a manifestement Card E' = $\aleph_\alpha$.

3.8- Par contre, le Th. 1.II (partie "montante" du théorème de Löwenheim-Skolem-Tarski) ne se généralise pas : Si un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathcal{G}$ est α-consistant, il ne possède pas nécessairement pour autant un modèle de cardinal $\aleph_\gamma$ pour tout $\gamma \geq \alpha$.

On démontre toutefois :

PROPOSITION 3.C- Pour chaque α, il existe un β tel que :

$$(\forall \mathfrak{B} \subset \mathcal{G})\ \left[(\exists \gamma \geq \beta)\ \mathrm{Mod}\ (\alpha, \mathfrak{B}, \gamma) \Longleftrightarrow (\forall \gamma \geq \beta)\ \mathrm{Mod}\ (\alpha, \mathfrak{B}, \gamma)\right]$$

où Mod $(\alpha, \mathfrak{B}, \gamma)$ signifie : "il existe un α-modèle de $\mathfrak{B}$ ayant pour cardinal $\aleph_\gamma$ " .

Mais, si on désigne par $h(\alpha)$ le plus petit d'entre ces β (h est la "fonction de HANF"), on a en général $h(\alpha) > \alpha$. On prouve en particulier, grâce à l'astuce (due à ROBINSON) indiquée en 2.4 :

PROPOSITION 3.D- $\quad h(0) \geq \omega$

3.9 Nous dirons que l'ordinal α est <u>compactifiant</u> si le Th. 1.III s'étend, c'est-à-dire si on a :

$$(\forall \mathfrak{B} \subset \mathcal{G})\ \left(\left[(\forall \mathfrak{B}'\ \text{fini} \subset \mathfrak{B})\ (\mathfrak{B}'\ \text{est}\ \alpha\text{-consistant})\right] \Longrightarrow \mathfrak{B}\ \underset{\alpha\text{-consistant}}{\text{est}}\right)$$

La démonstration du Th. 1.III ne reste pas valable. Certes, on peut procéder comme pour le Calcul des prédicats ordinaires, et se ramener à des conditions "prénexes" de la forme

$$\ldots \forall x_i \ldots \forall_\alpha x_j \ldots \Delta(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots)$$

avec Δ sans quantificateurs. Mais la présence des quantificateurs $\forall_\alpha$ empêche de recourir à l'argument classique de compacité.

On doit donc examiner séparément le cas de chaque α .

3.10 L'étape essentielle, dans l'étude des $\mathcal{U}_\alpha$, consiste à trouver un procédé permettant d' "éliminer" le quantificateur $\exists_\alpha$ afin de se ramener à des problèmes concernant le calcul des prédicats ordinaires. Nous utiliserons pour cela les ordres de genre α (cf. 2.2 ci-dessus ; sur une autre méthode, cf. [1] et [5]).

Soit $\underline{R}$ un symbole de prédicat n'appartenant pas à $\mathbb{P}$. Posons $\mathbb{P}' = \mathbb{P} \cup \{\underline{R}\}$. Et prolongeons Ar en Ar' , en posant $\mathrm{Ar}'(\underline{R}) = 2$. Soit $\mathcal{F}'$ l'ensemble des formules closes du premier ordre ordinaire (sans quantificateur additionnel) construites sur $(\mathbb{P}', \mathrm{Ar}')$.

Une (P', Ar')-structure peut être assimilée à un triplet (E,σ,R), où (E,σ) est une (P, Ar)-structure, et où $R \in \mathcal{B}^{(2)}E$.

Une structure (E,σ,R) sera dite <u>de genre α</u> si R est un ordre de genre α sur E.

A chaque élément G de $\mathcal{G}$ associons l'élément G^+ de $\mathcal{F}'$ obtenu en éliminant dans G (de proche en proche) le quantificateur $\vee^+$ grâce au procédé qui est représenté (sous forme sémantique) par la formule (IV) de 2.2. On voit immédiatement que cette correspondance $G \longmapsto G^+$ est récursive.

Posons, pour chaque $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$, $\mathcal{B}^+ = \{G^+ ; G \in \mathcal{B}\}$.

Du Th. 3.1 on tire immédiatement, dans le cas où $\aleph_\alpha$ est régulier, le résultat suivant, qui reste valable dans le cas général à condition de compliquer un peu la définition de $\mathcal{B}^+$ (cf. 5.5 ci-dessous) :

PROPOSITION 3.E- Pour que $\mathcal{B}$ possède un α-modèle, il faut et il suffit que $\mathcal{B}^+$ possède un modèle de genre α .

4. Etude des cas α = 0 et α = 1.

4.1- La complication de $\mathcal{V}_0$, c'est-à-dire la possibilité d'exprimer "beaucoup de choses" à l'aide de $\exists_0$, est due essentiellement à l'existence de la condition Ω_0 indiquée en 2.5, autrement dit au fait qu'on peut, avec $\exists_0$ (et contrairement à ce qui se passe pour le calcul des prédicats ordinaire : cf. Cor. du Th. 1.II), définir à un isomorphisme près l'ordre naturel sur $\mathbb{N}$.

4.2. Soit E quelconque, $A \in \mathcal{B}^{(3)}E$, $M \in \mathcal{B}^{(3)}E$, $X \in \mathcal{B}^{(1)}E$.

A partir de Ω_0 on construit de façon évidente une condition analogue Ω'_0 telle que :

$$\Omega'_0\,(E,A,M) \Longleftrightarrow \left[(E, A, M) \text{ est isomorphe à } (\mathbb{N}, +, \times)\right]$$

en désignant par + et × les graphes de l'addition et de la multiplication usuelles sur $\mathbb{N}$.

A chaque condition du premier ordre (ordinaire) Φ_F (E, A, M, X) correspondant à un élément F de $\mathcal{F}$, associons la condition suivante, qui correspond à un certain élément G_F de $\mathcal{G}$:

$$\Omega'_0 (E, A, M) \Longrightarrow \Phi_F (E, A, M, X) .$$

Dire que G_F est 0-valide équivaut à dire que :

$$(\forall X \subset \mathbb{N})\ \Phi_F(\mathbb{N}, +, \times, X).$$

Or l'ensemble des F qui possèdent cette propriété est (quasiment par définition) " Π^1_1-complet " (c'est-à-dire que, non seulement il n'est pas récursivement énumérable, mais qu'on ne peut l'exprimer qu'avec au moins une quantification universelle portant sur une variable décrivant $\mathcal{P}\mathbb{N}$). D'où (relativement à la numérotation canonique de $\mathcal{G}$) :

THÉORÈME 4.I.0- $\mathcal{V}_0$ est Π^1_1-complet.

C'est d'ailleurs exactement à l'échelon Π^1_1 que se situe $\mathcal{V}_0$ dans la classification de KLEENE :

PROPOSITION 4.A- $\mathcal{V}_0 \in \Pi^1_1$.

En effet, du Th. 3.I il résulte que toute formule G de $\mathcal{G}$ qui possède un 0-modèle, en possède un de base $\mathbb{N}$. Or, sur $\mathbb{N}$ muni de + et x (et par conséquent de $\leq$), le quantificateur $\exists_0$ se ramène à des quantificateurs ordinaires [par la formule (IV) de 2.2]. On en déduit que la 0-validité de G équivaut à :

$$(\forall \sigma \text{ de base } \mathbb{N})\ \Phi (\mathbb{N}, \sigma, +, \times)$$

où Φ est une condition du premier ordre dépendant très simplement de G.

4.3- Considérons les éléments de $\mathcal{G}$ (en fait, ils appartiennent tous à $\mathcal{F}$ sauf le premier) qui formalisent respectivement les conditions suivantes, où P représente un élément de $\mathcal{P}(E)$:

$$\text{non } \exists_0 x\ P(x)\ ,\ \text{Card } P > 1, \ldots,\ \text{Card } P > n, \ldots$$

Cet ensemble de formules ne possède aucun 0-modèle, mais chacun de ses sous-ensembles finis en possède un. D'où :

THÉORÈME 4.II.0- 0 n'est pas compactifiant.

De même, en utilisant encore Ω_0 ou Ω'_0, en prenant un sous-ensemble hyperarithmétique non arithmétique de $\mathbb{N}$ et en considérant les deux formules équivalentes (l'une de type Π^1_1, l'autre de type Σ^1_1) qui définissent ce sous-ensemble, on montre que $\mathcal{V}_0$ ne satisfait pas au "lemme d'interpolation" (même dans le cas très particulier où les deux formules extrêmes sont équivalentes).

4.4- Contrairement à ce que nous venons de voir pour $\alpha = 0$, on a les résultats suivants pour $\alpha = 1$:

THEOREME 4.I.1- $\mathcal{V}_1$ est récursivement énumérable.

THEOREME 4.II.2- 1 est compactifiant.

Ces deux théorèmes se déduisent immédiatement de la Prop. 4.E ci-dessous (pour le Th. 4.I.1 on utilise en plus la récursivité de l'ensemble $\mathcal{G}_1$ défini en 4.7 et de la correspondance $G \mapsto G^+$ définie en 3.10).

Du Th. 4.I.1 il résulte que $\mathcal{V}_1$, tout comme $\mathcal{V}$, peut être défini par un système de règles et d'axiomes ; un tel système est indiqué dans [2].

4.5- Le comportement opposé de 0 et de 1 vis-à-vis des autres ordinaux est marqué par les résultats suivants :

THEOREME 4.III.0- $\forall \alpha$, $\mathcal{V}_\alpha \subset \mathcal{V}_0$.

THEOREME 4.III.1- $\forall \alpha$ tel que $\leftrightsquigarrow_\alpha$ soit régulier, $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_\alpha$.

Le Th. 4.III.i (i = 0,1) est une conséquence immédiate de la Prop. 3.E et de la Prop. 4.B.i suivante, où $\mathcal{A}$ désigne un sous-ensemble quelconque de $\mathcal{F}'$ (cf. 3.10) :

PROPOSITION 4.B.0- Si $\mathcal{A}$ admet un modèle de genre 0, il admet un modèle de genre α pour tout ordinal α.

PROPOSITION 4.B.1- Si $\leftrightsquigarrow_\alpha$ est régulier et si $\mathcal{A}$ admet un modèle de genre α, alors $\mathcal{A}$ admet un modèle de genre 1.

4.6 Tout se ramène donc maintenant à démontrer les Prop. 4.B.0 et 4.B.1, et à énoncer et démontrer la Prop. 4.E.

Partant de $\mathbb{P}'$ (cf. 3.10), on introduit (de façon différente suivant que $\alpha = 0$ ou 1) une infinité dénombrable de symboles de prédicats supplémentaires, ce qui donne $\mathbb{P}''_0$ et $\mathbb{P}''_1$. Soit $\mathcal{F}''_i$ $(i = 0,1)$ l'ensemble des formules du premier ordre (sans quantificateur supplémentaire) construites sur $\mathbb{P}''_i$.

On définit un certain sous-ensemble récursif $\mathcal{C}_i$ de $\mathcal{F}''_i$.

Et on démontre, pour tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}'$:

PROPOSITION 4.C.0- Si $\mathcal{A}$ possède un modèle de genre 0, alors $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}_0$ est consistant.

PROPOSITION 4.C.1- Si $\leftrightarrow_\alpha$ est régulier et si $\mathcal{A}$ possède un modèle de genre α, alors $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}_1$ est consistant.

PROPOSITION 4.D.0- Si $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}_0$ est consistant, alors $\mathcal{A}$ possède un modèle de genre α pour tout $\alpha > 0$.

PROPOSITION 4.D.1- Si $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}_1$ est consistant, alors $\mathcal{A}$ possède un modèle de genre 1.

La Prop. 4.B.i est une conséquence immédiate des Prop. 4.C.i et 4.D.i.

D'autre part, des Prop. 3.E, 4.C.1 et 4.D.1 on tire immédiatement, pour tout $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ (cf. aussi 5.5 ci-dessous) :

PROPOSITION 4.E. $\mathcal{B}$ est 1-consistant $\iff$ $\mathcal{B}^+ \cup \mathcal{C}_1$ est consistant.

4.7 Pour achever les démonstrations, il reste à fournir la définition exacte des $\mathcal{C}_i$ et la preuve des Prop. 4.C.i et 4.D.i. Nous ne pourrons en donner qu'un schéma.

La méthode repose sur la formalisation des résultats indiqués en 2.6. Les fonctions ϕ ou ψ de 2.6 sont toutes celles qui peuvent s'obtenir par superposition à partir des fonctions de Skolem (relatives aux formules de $\mathcal{F}'$).

Les symboles de prédicats supplémentaires (introduits pour obtenir $\mathbb{P}''_0$ et $\mathbb{P}''_1$) correspondent aux éléments de $\mathcal{M}$. Les formules de $\mathcal{C}_1$ [resp. $\mathcal{C}_0$] formalisent les conditions $\Lambda_R(M,\phi)$ [resp. $\Lambda^*_R(M,\psi)$] .

La preuve des Prop. 4.C.i est aisée. Pour la Prop. 4.D.i , le point essentiel est constitué par le Lemme i suivant :

Soient (E,σ,R) et (E',σ',R') deux structures telles que R (resp. R') soit un ordre total sur E (resp. E'). Nous dirons que (E',σ',R') est un allongement équipotent de (E,σ,R) si on a :

$E \subset E'$; $E \neq E'$; Card E = Card E' ;

(σ,R) est la restriction de (σ',R') à E ;

tout élément de E'-E est supérieur (relativement à R') à tout élément de E.

LEMME 0- Tout modèle de $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}_0$ possède un allongement équipotent qui est encore un modèle de $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}_0$.

LEMME 1- Tout modèle dénombrable de $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}_1$ possède un allongement équipotent qui est encore un modèle de $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}_1$.

La preuve de ces Lemmes s'obtient par une technique d' "ultra-puissance restreinte ". L'ensemble E' est obtenu (avec σ' et R') comme le quotient, modulo l'égalité presque partout (relativement à l'ultra-filtre considéré en 2.6) de l'ensemble constitué par toutes les fonctions ϕ ou ψ_t introduites comme indiqué ci-dessus.

La Prop. 4.D.i se tire aisément du Lemme i, en partant d'un modèle dénombrable (qui existe toujours d'après le Th. 1.I) et en répétant transfiniment l'opération d'allongement équipotent.

5. Remarques finales (à lire de préférence au début).

5.1- Pour $\mathbb{P}$ (dénombrable) et Ar quelconques (cf. 1.1), il n'existe en général aucune bijection Num de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{P}$ telle que Ar∘Num soit récursive. Pour qu'il existe une telle Num, il faut et il suffit que le sous-ensemble

$$\{(n,p) \mid n < \text{Card}\,(\text{Ar}^{-1}\{p\})\}$$

de $\mathbb{N}^2$ soit récursivement énumérable.

5.2 Dire que $\exists_\alpha$ (avec α donné) n'est pas "définissable" à partir de $\exists$ et des opérations booléennes, cela signifie qu'il n'existe aucune condition du premier ordre $\theta\ (E,P)$ telle qu'on ait, $\forall E$, $\forall P \subset E$:

$$\theta\ (E,P) \iff \exists_\alpha x\ P(x)\ .$$

Par contre, pour certains E_0 munis d'une structure σ_0 particulière, il peut parfois exister une condition du premier ordre $\theta_0\ (E_0, \sigma_0, P)$ telle qu'on ait, $\forall P \subset E_0$:

$$\theta_0\ (E_0, \sigma_0, P) \iff \exists_\alpha x\ P(x)\ .$$

C'est le cas par exemple pour $\alpha = 0$, $E_0 = \mathbb{N}$, $\sigma_0 =$ la structure d'ordre naturel sur $\mathbb{N}$; la condition θ_0 est alors donnée par la formule (IV) de 2.2.

5.3 En plus des quantificateurs ordinaires, des quantificateurs cardinalisés, et des suites finies de tels quantificateurs, on peut définir des "quantificateurs généralisés" d'espèces très variées (cf. [6]).

Un exemple amusant (cf. [7]) est fourni par l'abréviation $\left\langle \begin{matrix} x & u \\ y & v \end{matrix} \right\rangle$ qui signifiera par définition :

" quels que soient x et y, il existe un u dépendant seulement de x, et un v dépendant seulement de y, tels que ... " .

Autrement dit, si les variables x, y, u, v décrivent E, l'expression $\left\langle \begin{matrix} x & u \\ y & v \end{matrix} \right\rangle R\ (x,y,u,v)$ équivaut par définition à :

$$(\exists \phi,\psi \in E^E) \forall x\ \forall y\ R\ \left[x, y, \phi(x), \psi(y)\right] .$$

Cette expression doit donc être soigneusement distinguée d'autres expressions telles que

$$\forall x\ \forall y\ \exists u\ \exists v\ R(x, y, u, v)$$

$$\forall x\ \exists u\ \forall y\ \exists v\ R(x, y, u, v)$$

qui sont respectivement équivalentes à

$$(\exists\, \phi,\psi \in E^{(E^2)}\ )\ \forall x\ \forall y\ R\left[x,y,\phi(x,y),\psi(x,y)\right]$$

$$(\exists \phi \in E^{E})\ (\exists \psi \in E^{(E^2)}\ )\forall x\ \forall y\ R\left[x,y,\phi(x),\psi(x,y\right]$$

Malgré son apparence anodine, ce signe $\left\langle \begin{smallmatrix}\circ\circ\circ & \circ\circ\circ \\ \circ\circ\circ & \circ\circ\circ\end{smallmatrix} \right\rangle$ ne peut pas se définir à partir des quantificateurs ordinaires (par contre, les quantificateurs ordinaires se définissent aisément à partir de $\left\langle \begin{smallmatrix}\circ\circ\circ & \circ\circ\circ \\ \circ\circ\circ & \circ\circ\circ\end{smallmatrix} \right\rangle$ en utilisant des conditions où ne figure qu'une des quatre variables x,y,u,v). En effet, $\exists_0$ peut se définir à partir de $\left\langle \begin{smallmatrix}\circ\circ\circ & \circ\circ\circ \\ \circ\circ\circ & \circ\circ\circ\end{smallmatrix} \right\rangle$ et des opérations booléennes. Pour le voir, il suffit de remarquer que la condition

$$\exists z \left[P(z) \text{ et } \left\langle \begin{smallmatrix} x & u \\ y & v \end{smallmatrix} \right\rangle \left(\left[x = y \Longleftrightarrow u = v\right] \text{ et } \left[P(x) \Rightarrow (P(u) \text{ et } u \neq z)\right] \right) \right]$$

équivaut à l'existence d'une application injective de P dans un sous-ensemble strict de P, c'est-à-dire à $\exists_0 x\ P(x)$.

La réciproque n'est pas vraie : le signe $\left\langle \begin{smallmatrix}\circ\circ\circ & \circ\circ\circ \\ \circ\circ\circ & \circ\circ\circ\end{smallmatrix} \right\rangle$ ne peut pas être défini à partir de $\exists_0$, de $\exists$ et des opérations booléennes. En effet, du fait que la condition

$$\left\langle \begin{smallmatrix} x & u \\ y & v \end{smallmatrix} \right\rangle \left[(x = y \implies u = v) \text{ et } R(x, y, u, v)\right]$$

équivaut à

$$\exists \phi\ \forall x\ \forall y\ \ R\left[x,y,\phi(x),\ \phi(y)\right] \quad ,$$

on déduit, grâce à quelques manipulations classiques (permettant de ramener à la forme ci-dessus tous les cas où ϕ intervient de façon "arithmétique"), que, dans $(\mathbb{N},\ +,\ \times\ )$, le signe $\left\langle \begin{smallmatrix}\circ\circ\circ & \circ\circ\circ \\ \circ\circ\circ & \circ\circ\circ\end{smallmatrix} \right\rangle$ peut remplacer un quantificateur fonctionnel [ce que ne permet pas $\exists_0$ puisque, dans $(\mathbb{N},\ +,\ \times\ )$, $\exists_0$ est exprimable dans le premier ordre].

5.4 Il existe de multiples façons d' "élargir" le calcul des prédicats du premier ordre tout en conservant un point de vue "classique". Citons :

(a) l'introduction de nouvelles espèces de variables (par exemple fonctions, fonctions de fonctions, etc...), ce qui donne un calcul "d'ordre supérieur" ;

(b) l'introduction de nouveaux quantificateurs ;

(c) l'introduction de formules "infiniment longues" (suivant des modalités qui peuvent différer suivant les systèmes) ;

(d) la restriction de la classe de tous les modèles à telle ou telle sous-classe jugée spécialement intéressante (par exemple ; les modèles de genre α que nous venons d'étudier, les ω-modèles au sens de KREISEL, et ϕ...).

Comme nous l'avons vu, il existe des rapports entre (b) et (a), ainsi qu'entre (b) et (d). Il en existe aussi entre (b) et (c).

5.5. La formule (IV) de 2.2, qui permet d'éliminer $\exists_\alpha$, n'est valable que lorsque $\mathfrak{F}_{\alpha}$ est régulier. Dans le cas général, on utilise le fait suivant :

Soit R un ordre de genre α sur E. On peut associer à tout $P \subset E$ une application injective ϕ_P de P dans E de façon à avoir $(\forall P \subset E)$:

(1) $\phi_P(P) = E$ ou $\phi_P(P)$ borné relativement à R .

Si cette condition (1) est satisfaite, on a

(2) $\exists_\alpha x\ P(x) \iff \phi_P(P) = E$.

La méthode consiste donc : à introduire de proche en proche (comme pour les fonctions de Skolem) des fonctions supplémentaires ϕ_P (avec paramètres), à éliminer $\exists_\alpha$ en utilisant (2), et à ajouter (1) comme axiomes supplémentaires. Tout modèle de genre α de l'ensemble (sous-ensemble de $\mathfrak{F}$) ainsi obtenu fournira un α-modèle de l'ensemble initial (sous-ensemble de $\mathfrak{g}$), et inversement.

B I B L I O G R A P H I E

[1] G. FUHRKEN - Languages with added quantifier "there exist at least $\aleph_\alpha$ ", The Theory of models (Proc. Int. Symposium Berkeley 1963), North-Holland Pub. C., 1965, p. 121-131.

[2] H.J. KEISLER - First order properties of pairs of cardinals, Bull. Amer. Math. Soc., 72 n° 1 (janv. 1966), p. 141-144.

[3] H.J. KEISLER - Weakly well-ordered models, Notices Amer. Math. Soc., Avril 1967, 67T - 286, p. 414.

[4] R. MAC DOWELL and E. SPECKER - Modelle der Arithmetik, Infinitistic methods (Proc. Symposium Warsaw 1959), Pergamon Press, 1961, p. 257-263.

[5] R.L. VAUGHT - A Löwenheim-Skolem theorem for cardinals far apart, The theory of models (Proc. Symposium Berkeley 1963), North-Holland Pub. C., 1965, p. 390-401 .

[6] A. MOSTOWSKI - On a generalization of quantifiers, Fund. Math., 44 (1957), p. 12-36 .

[7] L. HENKIN - Some remarks on infinitely long formulas, Infinitistic methods (Proc. Symposium Warsaw 1959), Pergamon Press, 1961, p. 167-183.