ARMAND BRUMER

Travaux récents d'Iwasawa et de Leopoldt

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. nº 325, p. 189-202
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__189_0>

Séminaire BOURBAKI
19e année, 1966/67, n° 325 Juin 1967

TRAVAUX RÉCENTS D'IWASAWA ET DE LEOPOLDT

par Armand BRUMER

1. Introduction.

D'après le théorème de Kronecker-Weber tout corps K abélien sur $\mathbb{Q}$ est contenu dans un corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\zeta_f)$ où $\zeta_f = e^{2\pi i/f}$. Le groupe de Galois de $\mathbb{Q}(\zeta_f)$ sur $\mathbb{Q}$ s'identifie au groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^*$ au moyen de la formule $\sigma_m(\zeta_f) = \zeta_f^m$ qui définit un automorphisme de $\mathbb{Q}(\zeta_f)$ pour tout m premier à f. La restriction de σ_m à K sera notée $(\frac{K}{m})$: c'est simplement le symbole d'Artin. Tout caractère χ de $G(K/\mathbb{Q})$ induit un caractère de Dirichlet défini sur les entiers rationnels en posant $\chi(m) = \chi((\frac{K}{m}))$ si $(m,f) = 1$ et $\chi(m) = 0$ sinon. Soit $\mathfrak{X}(K)$ le groupe de caractères de Dirichlet définis ainsi. On voit immédiatement que $\mathfrak{X}(K)$ détermine K complètement et on a donc envie de décrire l'arithmétique de K à partir de $\mathfrak{X}(K)$, puisque cela peut être fait <u>en principe</u>. Il s'agit de construire des invariants calculables à partir de $\mathfrak{X}(K)$ et d'en sortir, par exemple, la structure du groupe des classes d'idéaux de K.

Personne ne s'étonnera que la plupart des résultats dont nous parlerons ont leur origine dans les recherches de Kummer (ca. 1850), Vandiver (1930) et bien d'autres sur le problème de Fermat.

A titre d'exemple, citons un cas spécial pour lequel les invariants que nous allons décrire ont été calculés.

THÉORÈME (Iwasawa et Sims [6]). Soient p un nombre premier et S_n la composante p-primaire du groupe de classes d'idéaux du corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$. Supposons que parmi les $(p-3)/2$ premiers nombres de Bernouilli d soient divisibles par p et que $p \leq 4001$. Alors S_n est la somme directe de d groupes cycliques d'ordre p^n.

2. Formules pour le nombre de classes dans le cas réel.

Soit χ un caractère de Dirichlet défini modulo f, c'est-à-dire un caractère du groupe de Galois de $\mathbb{Q}(\zeta_f)$ et notons H_χ son noyau. Le sous-corps K_χ de $\mathbb{Q}(\zeta_f)$ laissé fixe par H_χ est une extension cyclique de $\mathbb{Q}$ dont le groupe de caractères est engendré par χ. Puisque σ_{-1} induit la conjugaison complexe, K_χ est réel si $\chi(-1) = 1$ et imaginaire si $\chi(-1) = -1$. Rappelons que le conducteur $f(\chi)$ de χ est le plus petit entier tel que $K_\chi \subset \mathbb{Q}(\zeta_{f(\chi)})$.

On obtient les formules analytiques pour le nombre h_K de classes d'idéaux d'un corps abélien en posant $s = 1$ dans la relation

$$\zeta_K(s)/\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \prod_{\chi \neq 1} L(s,\chi)$$

où $L(s,\chi)$ représente la fonction L de Dirichlet

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s}$$

correspondant au caractère χ de K. Les valeurs $L(1,\chi)$ sont de nature totalement différente selon la parité de χ. Supposons pour le reste de ce paragraphe que K est réel.

THÉORÈME 1_∞ ([4]). Soit K un corps abélien réel de degré n et soit h_K le nombre de classes d'idéaux de K. Alors, on a la formule

$$\frac{2^{n-1}R_\infty h_K}{\sqrt{d_K}} = \prod_{\chi\neq 1} L(1,\chi)$$

$$= \frac{2^{n-1}}{\sqrt{d_K}} \prod_{\chi\neq 1} \sum_{\pm a \bmod f(\chi)} (-\chi(a) \log |1 - \zeta^a_{f(\chi)}|)$$

où la somme est prise sur la moitié d'un système de résidus premiers à $f(\chi)$, d_K est le discriminant et R_∞ est le régulateur de K.

Rappelons que pour tout groupe H d'unités de K, le régulateur de H est défini par

$$R_\infty(H) = |\det(\log |\varepsilon_i^\sigma|)_{\sigma\neq 1}|$$

où $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ est un système fondamental de H et σ parcourt les plongements de K dans $\mathbb{R}$. Dans un long travail, Leopoldt a complété les résultats de Hasse [4] ayant pour but une interprétation arithmétique du théorème 1_∞:

COROLLAIRE. Il y a un sous-groupe H_K d'unités cyclotomiques et un entier Q (qui ne dépend que du groupe de Galois de K) tels que

$$Q.h_K R_\infty = R_\infty(H_K) = [E_K : H_K] R_\infty(E_K)$$

où E_K dénote le groupe d'unités de K.

Si K est cyclique, ce résultat est encore plus agréable car Q = 1 dans ce cas.

Le corollaire reste vrai si on remplace les régulateurs par les régulateurs p-adiques formés de la même manière, mais en utilisant les logarithmes p-adiques :

$$R_p(H) = \det\,(\log_p(\varepsilon_i^\sigma))$$

où σ parcourt $n-1$ plongements distincts de K dans une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Ceci a suggéré à Kubota et Leopoldt [7] la recherche de fonctions L p-adiques pour lesquelles l'analogue p-adique du théorème 1_∞ serait vrai. Leur point de départ est l'observation que pour les fonctions L ordinaires, $L(1-m,\chi)$ est un nombre algébrique, pour tout entier $m \geqq 1$, qu'on peut expliciter en termes de nombres de Bernouilli généralisés

$$(*) \qquad L(1-m,\chi) = -B^m(\chi)/m \qquad m \geqq 1$$

où

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m(\chi)t^m}{m!} = \Big(t \sum_{a=1}^{f(\chi)} \chi(a)e^{at}\Big)/(e^{f(\chi)t} - 1).$$

Or, ces nombres algébriques peuvent être considérés comme nombres p-adiques et on est tenté de construire les fonctions L p-adiques par interpolation à partir de leurs valeurs sur les entiers négatifs qui seraient données par (*). Ceci est ~~presque~~ possible :

THÉORÈME 2 (Cf. [3],[7]). <u>Si</u> $\chi \neq \varepsilon$ (<u>le caractère principal</u>), <u>il y a une fonction continue unique</u> $L_p(s,\chi)$ <u>sur</u> $\mathbb{Z}_p$ <u>telle que</u>

$$L_p(s,\chi) = \Big(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\Big)\, L(s,\chi)$$

pour tout s entier négatif, congru à 1 modulo $(p-1)$ si $p \neq 2$ (resp. mod 2 si $p = 2$). Cette fonction peut être représentée par une série convergente dans un cercle de centre 0 et de rayon supérieur à $p^{1-1/(p-1)}$ (resp. 2 si $p = 2$). Un résultat analogue est valable pour le caractère principal, à part un pôle simple de résidu $1 - \frac{\varepsilon(p)}{p} = 1 - \frac{1}{p}$ au point $s = 1$.

D'après Leopoldt (non publié) et Amice-Fresnel [3], ces fonctions d'apparence artificielle satisfont au théorème des résidus :

THÉORÈME 1_p. Soit K un corps abélien réel comme ci-dessus. Alors

$$\frac{2^{n-1} h_K R_p}{\sqrt{d}} = \prod_{\chi \neq \varepsilon} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right)^{-1} \prod_{\chi \neq \varepsilon} L_p(1, \chi)$$

pour tout entier p, où R_p dénote le régulateur p-adique de K.

Remarques.

1) Cette formule ne se réduit pas à $0 = 0$, car le régulateur p-adique ne s'annule pas ([2]).

2) Contrairement au cas complexe, le point $s = 1$ est la limite d'entiers négatifs sur lesquels $L_p(1 - m, \chi)$ est connu par définition. D'après les évaluations du module de continuité des fonctions L p-adiques ([3],[7]) on peut remplacer l'égalité ci-dessus par des congruences modulo p^m dans lesquelles le membre à droite est explicité en terme de nombres de Bernouilli. On retrouve ainsi les congruences obtenues par Ankeny-Artin et Chowla sur les unités des corps quadratiques réels [1].

3. Modules d'Iwasawa.

Une extension galoisienne L d'un corps de nombres K dont le groupe de Galois Γ est isomorphe du groupe additif des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$ est dite une Γ-extension. Soit $I(L/K)$ le groupe de Galois de la p-extension abélienne non ramifiée maximale M de L. D'après la théorie du corps de classes, on peut décrire $I(L/K)$ comme suit. Soit L_n l'unique sous-corps de L de degré p^n sur K et notons $S(L_n)$ la p-composante du groupe de classes d'idéaux de L_n, c'est un module sur $\Gamma_n = G(L_n/K)$. Alors, on a

$$I(L/K) = \varprojlim S(L_n)$$

la limite projective provenant des applications $S(L_m) \to S(L_n)$ définies pour $m \geq n$ par la norme. La Γ-extension la plus simple est la suivante. Soit P_n le sous-corps de $\mathbb{Q}(\zeta_{p^{n+1}})$ de degré p^n si $p \neq 2$ (resp. le sous-corps réel de $\mathbb{Q}(\zeta_{2^{n+2}})$ de degré 2^n). Posons $K_n = KP_n$ et $K_\infty = \bigcup_{n\geq 1} K_n$, nous dirons que K_∞/K est la Γ-extension fondamentale de K et que $I_p(K) = I(K_\infty/K)$ est le module d'Iwasawa de K. Notons que l'exemple classique s'obtient en prenant $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ (resp. $K = \mathbb{Q}(i)$ si $p = 2$).

Supposons dorénavant que K est un corps abélien de degré premier à p. Alors $I_p(K)$ est un module sur $G(K_\infty/\mathbb{Q}) = \Delta \times \Gamma$ où

$$\Delta = G(K_\infty/P_\infty) \cong G(K/\mathbb{Q}) \qquad \text{et} \qquad \Gamma = G(K_\infty/K) \cong G(P_\infty/\mathbb{Q}).$$

Soit $1 = \Sigma\, \varepsilon_\Phi$ la décomposition de 1 en idempotents primitifs de $\mathbb{Z}_p[\Delta]$, où Φ parcourt les caractères de Δ irréductibles sur $\mathbb{Q}_p$. Tout $\mathbb{Z}_p[\Delta]$-module M se décompose en somme directe :

$$M = \oplus\, M_\Phi \qquad \text{où} \qquad M_\Phi = \varepsilon_\Phi M.$$

Soit χ une composante absolument irréductible de Φ (d'où Φ est la somme des conjugués sur $\mathbb{Q}_p$ de χ) et soit O_χ l'anneau engendré sur $\mathbb{Z}_p$ par les valeurs de χ. On a alors $\varepsilon_\Phi \mathbb{Z}_p[\Delta] \cong O_\chi$ où l'isomorphisme est induit par l'application $\delta \to \chi(\delta)$ pour $\delta \in \Delta$. Appliquons ceci au module d'Iwasawa :

$$I_p(K) \cong \oplus \; I_p(K)_\Phi$$

et la composante $I_p(K)_\Phi$ est un module sur

$$\varepsilon_\Phi \; \mathbb{Z}_p[[G]] = \varepsilon_\Phi \; \mathbb{Z}_p[\Delta][[\Gamma]] \cong O_\chi[[\Gamma]].$$

On vérifie sans peine que si χ est une composante absolument irréductible de Φ et K_χ est le sous-corps de K laissé fixe par le noyau de χ, on a un isomorphisme naturel

$$I_p(K)_\Phi \cong I_p(K_\chi)_\Phi \; .$$

Ceci montre qu'il suffit, pour étudier la Φ-composante, de supposer que K est cyclique et que χ engendre le groupe des caractères de K.

4. Le groupe de "classes imaginaires".

Avant de commencer l'étude des modules d'Iwasawa, nous rappelons deux résultats classiques. Soient K un corps abélien imaginaire (arbitraire) et K^+ son plus grand sous-corps réel. D'après le théorème des unités on voit que le groupe engendré par les unités de K^+ et les w racines de l'unité de K est d'indice $Q = 1$ ou 2 dans le groupe des unités de K. La formule analytique pour le nombre de classes de K prend la forme suivante :

THÉORÈME 3 ([4]). <u>On a</u> $h_K = h_{K^+} h^-$ <u>où le nombre de classes relatif est donné par</u>

$$h^- = Qw \prod_{\chi(-1)=-1} L(1,\chi) = Qw \prod_{\chi(-1)=-1} \frac{1}{2f(\chi)} \sum_{a=1}^{f(\chi)} (-a\chi(a)^{-1}) .$$

Nous avons l'appui d'un vieux résultat de Stickelberger (obtenu en considérant la factorisation de certaines sommes de Gauss) pour interpréter cette formule :

THÉORÈME 4 ([8]). <u>Soient</u> K <u>un sous-corps de</u> $\mathbb{Q}(\zeta_f)$ <u>et</u> G <u>son groupe de Galois. Définissons, avec les notations de l'introduction, l'élément suivant de</u> $\mathbb{Q}[G]$:

$$\theta_f = \frac{1}{f} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,f)=1}}^{f} a\left(\frac{K}{a}\right)^{-1} .$$

<u>Alors l'idéal</u> $\mathbb{Z}[G] \cap \theta_f\mathbb{Z}[G]$ <u>annule le groupe</u> $C(K)$ <u>de classes d'idéaux de</u> K.

Reprenons les notations du dernier paragraphe : K est un corps cyclique de degré premier à p, Δ est son groupe de Galois et χ engendre le groupe de caractères de K. Soit Φ le caractère de Δ, irréductible sur $\mathbb{Q}_p$, dont χ est une composante. Supposons que χ (et <u>a fortiori</u> K) est imaginaire et soit $f(\chi)$ le conducteur de χ. Alors $K_n \subset \mathbb{Q}(\zeta_{fp^n})$ où f est le plus petit commun multiple de $f(\chi)$ et de p. En particulier, la Φ-composante $S(K_n)_\Phi$ du p-Sylow du groupe de classes d'idéaux de K_n est un module sur $\varepsilon_\Phi\mathbb{Z}_p[G_n]$ annulé par

$$\varepsilon_\Phi(\mathbb{Z}_p[G_n] \cap \theta_{fp^n}\mathbb{Z}_p[G_n])$$

d'après le théorème 4, où $G_n = G(K_n/\mathbb{Q}) = \Delta \times \Gamma_n$.

Soit ω le caractère à valeurs dans les racines $(p-1)^{\text{èmes}}$ de l'unité défini pour tout a entier premier à p par la congruence $\omega(a) \equiv a \pmod p$: c'est le représentant multiplicatif de Teichmüller. Nous définissons une application

$$\alpha_n : (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^* \to (\mathbb{Z}/p^n f\mathbb{Z})^*$$

par les deux congruences

$$\begin{cases} \alpha_n(a) \equiv a \pmod{f} \\ \alpha_n(a) \equiv \omega(a) \pmod{p^{n+1}} \end{cases}$$

(ceci est possible car $(f, p^{n+1}) = p$). On voit immédiatement que

$$\{\alpha_n(a)(1+f)^e \,|\, a \in (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^*, 0 \leqq e < p^n\}$$

représente les résidus modulo $p^n f$ premiers à $p^n f$. Il est clair d après la construction que $\Delta = \{(\frac{K_n}{\alpha_n(a)})\}$ et que $(\frac{K_n}{1+f})$ engendre Γ_n. Notant la partie fractionnaire du nombre rationnel x par $\{x\}$, on trouve

$$\theta_{fp^n} = \sum_{e=0}^{p^n-1} \sum_{a \bmod f} \{\frac{\alpha_n(a)(1+f)^e}{p^n f}\} (\frac{K_n}{\alpha_n(a)})^{-1} (\frac{K_n}{1+f})^{-e} .$$

C'est maintenant un agréable exercice de vérifier le résultat suivant. Posons $R_n = \mathbb{Z}_p[G_n]$.

PROPOSITION 5. <u>Soit</u> h_Φ <u>l'ordre de l'anneau</u> $\varepsilon_\Phi(R_n/R_n \cap \theta_{fp^n} R_n)$.

(i) <u>Si</u> $\chi \neq \omega$, <u>alors</u>

$$h_\Phi = \prod_{\psi \in \Phi} \frac{1}{fp^n} \sum_{a=1}^{fp^n} (-a\psi(a)^{-1})$$

<u>à une unité</u> p-<u>adique près, où</u> ψ <u>parcourt les caractères de</u> G_n <u>dont la restriction à</u> Δ <u>est une composante de</u> Φ .

(ii) <u>Si</u> $\chi = \omega$ <u>(ce qui correspond à</u> $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ <u>et</u> $f = p$), <u>l'élément</u>

$$\varepsilon_\Phi((\frac{K_n}{1+p}) - (1+p))\theta_{p^{n+1}}$$

est une unité dans $\varepsilon_\Phi R_n$, d'où

$$h_\Phi = 1 = p^{n+1} \prod_{\psi\in\Phi} \frac{1}{f_p n} \sum_{a=1}^{f_p n} (-a\ \psi(a)^{-1})$$

à une unité p-adique près. En particulier, on a $S(K_n)_\Phi = 0$ (ceci est relié au théorème de Staudt von Clausen sur les nombres de Bernouilli).

Posons $S(K_n)^- = \oplus\, S(K_n)_\Phi$ où Φ parcourt les caractères irréductibles imaginaires de K, alors $|S(K_n)^-| = h_n^-$ à une unité p-adique près. En comparant la proposition avec la formule analytique on obtient le

COROLLAIRE 6. Supposons que p divise le conducteur de tout caractère imaginaire de K (c'est-à-dire que p se ramifie dans tout sous-corps imaginaire de K). Si $S(K_n)$ est un module monogène sur $\mathbf{Z}_p[G_n]$ alors

(i) $S(K_n)_\Phi \cong 0_\chi[\Gamma_n]/\varepsilon_\Phi\theta_{f_p n}\, 0_\chi[\Gamma_n]$ si $\chi \neq \omega$

(ii) $S(K_n)_\Phi = 0$ si $\chi = \omega$.

Notons qu'en général, l'élément $\varepsilon_\Phi\theta_{f_p n}$ annule $S(K_n)_\Phi$ et que si $t_{n,m}$ dénote l'épimorphisme naturel $t_{n,m} : \Gamma_n \to \Gamma_m$ pour $n \geq m$, on a la formule

$$t_{n,m}(\varepsilon_\Phi\theta_{f_p n}) = \varepsilon_\Phi\theta_{f_p m}\ .$$

Il est donc naturel de passer à la limite. Pour faire ceci convenablement, on identifie $0_\chi[[\Gamma]]$ à l'anneau des séries formelles $0_\chi[[T]]$ en envoyant le générateur $(\frac{K_n}{1+f})$ sur $1+T$. Ceci étant fait, $0_\chi[\Gamma_n]$ s'identifie au quotient $0_\chi[[T]]/(1-(1+T)^{p^n})$. En particulier, $\varepsilon_\Phi\theta_{f_p n}$ s'identifie au polynome suivant en $(1+T)^{-1}$:

$$g_n(T,\chi) = \sum_{e=0}^{p^n-1} \sum_{a=1}^{f} \{\frac{\alpha_n(a)(1+f)^e}{p^n f}\} \chi(a)^{-1}(1+T)^{-e} .$$

Posons $g(T,\chi) = \lim_n g_n(T,\chi)$, on a alors

$$g(T,\chi) \equiv g_n(T,\chi) \qquad (\text{mod } 1 - (1+T)^{p^n}) .$$

Si $\chi = \omega$, on prend la série $g_n(T,\chi)$ qui correspond à $\varepsilon_\Phi((\frac{K_n}{1+p}) - (1+p))\theta_{f_p n}$ et on pose $g(T,\chi) = \lim_n g_n(T,\chi)$ de nouveau ; d'après la proposition, c'est une unité de $\mathbb{Z}_p[[T]]$.

COROLLAIRE 7. <u>Si on identifie</u> $O_\chi[[\Gamma]]$ <u>à</u> $O_\chi[[T]]$ <u>comme ci-dessus, la série</u> $g(T,\chi)$ <u>annule la composante</u> $I(K)_\Phi$ <u>du module d'Iwasawa</u>.

On peut obtenir des résultats plus précis sous deux genres d'hypothèses s'appuyant essentiellement sur le corollaire 6.

THÉORÈME 8. <u>Soit</u> K <u>une extension abélienne de degré premier à</u> p. <u>Supposons satisfaites les hypothèses suivantes</u> :

(i) p <u>reste premier dans</u> K

(ii) p <u>est ramifié dans tout sous-corps imaginaire de</u> K

(iii) $S(K)^-$ <u>est monogène sur</u> $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ <u>où</u> $\Delta = G(K/\mathbb{Q})$.

<u>Alors, pour tout caractère imaginaire</u> Φ, <u>on a</u>

$$I_p(K)_\Phi \cong O_\chi[[T]]/(g(T,\chi))$$

<u>et</u>

$$S(K_n)_\Phi \cong O_\chi[[T]]/(g_n(T,\chi), 1 - (1+T)^{p^n}) .$$

D'après un résultat de "dualité" de Léopoldt [9], on sait que (iii) est vérifié si le nombre de classes du plus grand sous-corps réel de $K(\zeta_p)$ est premier à p. On en déduit alors que $S(K_n)_\Phi = 0$ et <u>a fortiori</u> que $I_p(K)_\Phi = 0$ pour tout caractère réel Φ. Lehmer et Vandiver avaient vérifié que le plus grand sous-corps réel de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ a nombre de classes premier à p si $p \leqq 4001$. Le théorème annoncé dans l'introduction s'obtient donc à partir du théorème ci-dessus en calculant les coefficients de $g(\chi,T) = \alpha_0(\chi) + \alpha_1(\chi)T + \dots$. En fait, les deux premiers ont suffi pour les cas considérés car chaque fois que $\alpha_0(\chi)$ n'était pas une unité, $\alpha_1(\chi)$ en était une. Dans le premier cas $I_p(K)_\Phi = 0$ et dans le second, $I_p(K)_\Phi \cong \mathbb{Z}_p$ (en tant que groupes abéliens !) d'après le théorème de préparation de Weierstrass.

THÉORÈME 9. Soit K une extension abélienne imaginaire de groupe de Galois Δ. Soit p un nombre premier ne divisant pas le produit $|\Delta|\, h_K\, d_K$. Soit Φ un caractère imaginaire de Δ irréductible sur $\mathbb{Q}_p$ et soit χ une de ses composantes absolument irréductible. Alors :

$$I_p(K)_\Phi \cong O_\chi[[T]]/(g(T,\chi))$$

et

$$S(K_n)_\Phi \cong O_\chi[[T]]/(g(T,\chi),\nu_n)$$

où $\nu_n = (1 - (1+T)^{p^n})/T$ est l'élément correspondant à la norme de K_n à K.

Remarques.

(i) Le terme constant de $g(T,\chi)$ est égal au nombre de Bernouilli

$$B^1_{\chi^{-1}\omega^\circ} = (1 - \chi^{-1}(p))B^1_{\chi^{-1}} \ .$$

Donc $I_p(K)_\Phi = 0$ si $\chi(p) \neq 1$, tandis que $I_p(K)_\Phi$ a un quotient isomorphe à O_χ si $\chi(p) = 1$.

(ii) Pour la démonstration, on suppose que $K = K_{\chi}$. D'après le théorème 4 de [10], on voit que $I_p(K)$ est monogène sur $G(K_\infty/\mathbb{Q})$. Puisque K a nombre de classes premier à p, ν_n est dans l'annulateur de $S(K_n)$. Il suffit alors de calculer l'ordre du membre de droite dans (*) et de le comparer avec la formule analytique pour conclure.

Nous avons vu l'importance arithmétique des fonctions L p-adiques pour les corps abéliens réels et des séries d'Iwasawa pour l'étude des corps abéliens imaginaires. Nous terminerons cet exposé en décrivant le lien étroit, découvert récemment par Iwasawa, entre ces fonctions ([5]).

Soit χ un caractère <u>imaginaire</u> dont le conducteur $f(\chi)$ n'est pas divisible par p^2 si $p \neq 2$ (resp. par 8 si $p = 2$). Soit ω le caractère défini plus haut pour $p \neq 2$ (resp. le caractère d'ordre 2 défini par $\omega(x) \equiv x \pmod 4$ si $p = 2$). Posons $f = \mathrm{ppcm}\,(f(\chi),p)$ (resp. $f = \mathrm{ppcm}\,(f(\chi),4)$) et soit $g_p(T,\chi)$ la série d'Iwasawa formée à partir des relations de Strickelberger d'après la recette donnée ci-dessus.

THÉORÈME 10 ([5]). <u>On a les relations suivantes</u> :

(i) $L_p(s,\chi^{-1}\omega) = -g_p((1+f)^s - 1,\chi)$ <u>si</u> $\chi \neq \omega$

(ii) $$L_p(s,\varepsilon) = \frac{g_p((1+f)^s-1,\omega)}{(1+f)^s-(1+f)} .$$

Il faut remarquer que les fonctions L p-adiques qui ne sont définies que pour des caractères réels font effectivement intervenir les caractères imaginaires. En fait, on démontre, en même temps que le théorème 2, que pour tout entier $m \geqq 1$ on a la relation

$$L_p(1-m,\chi) = -\frac{B^m(\chi\omega^{-m})}{m}$$

pour tout caractère réel χ. On peut évidemment utiliser ce théorème pour obtenir des congruences sur les coefficients de $g(T,\chi)$ en termes de nombres de Bernouilli. Par exemple, le terme constant est égal à $B^1_{\chi^{-1}\omega^\circ} = (1-\chi^{-1}(p))B^1_{\chi^{-1}}$.

RÉFÉRENCES

[1] ANKENY-ARTIN-CHOWLA - On the class number of real quadratic number fields, Ann. of Math. 56 (1952), pp. 479-493.

[2] A. BRUMER - On the units of algebraic number fields. Mathematika (A paraître).

[3] J. FRESNEL - Nombres de Bernouilli et Fonctions L p-adiques (Thèse), 1967.

[4] H. HASSE - Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper, Berlin, 1952.

[5] K. IWASAWA - Cours donné à Princeton University en fin 1966.

[6] K. IWASAWA et C.C. SIMS - Invariants of cyclotomic fields, Jl. Math. Soc. of Japan (1966), pp.

[7] T. KUBOTA et H.W. LEOPOLDT - Eine p-adische Theorie der Zetawerte I, Journal f. reine u. Ang. Math. vol. 214-215 (1964) pp. 328-339.

[8] H.W. LEOPOLDT - Zur Arithmetik in abelschen Zahlkörpern. Jl, f. reine u. Ang. Math. t. 209 (1962) pp. 54-71.

[9] H.W. LEOPOLDT - Zur Struktur der ℓ-Klassengruppe galoischer Zalkörper, J. reine Ang. Math. t. 199 (1958) pp. 165-174.

[10] J.-P. SERRE - Classes des corps cyclotomiques. Séminaire Bourbaki. Exposé 174 (1958).