

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ADRIEN DOUADY

Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. n° 277, p. 7-13

http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__7_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE PROBLÈME DES MODULES POUR LES VARIÉTÉS ANALYTIQUES COMPLEXES

par Adrien DOUADY

(d'après Masatake KURANISHI [2])

A partir du n° 3, on utilisera constamment la notion, désormais familière, de variété banachique, ainsi que celle d'espace $\underline{\mathbb{C}}$ -analytique banachique.

Si U est un ouvert d'un espace de Banach E , et θ une application $\underline{\mathbb{C}}$ -analytique de U dans un espace de Banach F , les fonctions $\underline{\mathbb{C}}$ -analytiques h sur un ouvert de U à valeurs dans $\underline{\mathbb{C}}$ de la forme $h(u) = \langle \theta(u), f(u) \rangle$, où f est une application $\underline{\mathbb{C}}$ -analytique à valeurs dans le dual F' de F , forment un idéal \mathfrak{J} du faisceau $\mathcal{O}(U)$. On munit $X = \theta^{-1}(0)$ du faisceau \mathcal{O}/\mathfrak{J} . Pour les besoins de cet exposé, il suffit de définir un espace $\underline{\mathbb{C}}$ -analytique banachique comme un espace annelé localement isomorphe à un modèle de ce type.

1. La variété des structures complexes sur un espace vectoriel.

Soit E un espace vectoriel de dimension $2n$ sur $\underline{\mathbb{R}}$. Pour toute structure complexe φ sur E , il existe une application $\underline{\mathbb{C}}$ -linéaire, et une seule, de $\underline{\mathbb{C}} \otimes E$ dans (E, φ) prolongeant l'identité; son noyau K_φ est un sous-espace vectoriel complexe de $\underline{\mathbb{C}} \otimes E$. On obtient ainsi une bijection de l'ensemble $\Psi(E)$ des structures complexes sur E sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels complexes K de $\underline{\mathbb{C}} \otimes E$ tels que $\underline{\mathbb{C}} \otimes E = K \oplus \bar{K}$. Ainsi $\Psi(E)$ s'identifie à un ouvert de la grassmannienne de $\underline{\mathbb{C}} \otimes E$, et à ce titre est muni d'une structure de variété analytique complexe.

Soit φ_0 une structure complexe sur E ; posons $K_0 = K_{\varphi_0}$. Pour toute structure complexe φ suffisamment voisine de φ_0 , K_φ est le graphe d'une application $\underline{\mathbb{C}}$ -linéaire u_φ de K_0 dans \bar{K}_0 . La projection p'' (resp. p') de E sur \bar{K}_0 (resp. K_0) est un isomorphisme (resp. un antiisomorphisme) pour φ_0 . A φ correspond donc une application $\underline{\mathbb{C}}$ -antilinéaire $\omega_\varphi = p''^{-1} \circ u_\varphi \circ p'$ de (E, φ_0) dans lui-même, et la correspondance $\varphi \mapsto \omega_\varphi$ est la carte de $\Psi(E)$ définie par φ_0 .

L'application identique $(E, \varphi_0) \rightarrow (E, \varphi)$, qui est $\underline{\mathbb{R}}$ -linéaire, se met sous la forme $f' + f''$, où f' est $\underline{\mathbb{C}}$ -linéaire et f'' est $\underline{\mathbb{C}}$ -antilinéaire. On a alors $\omega_\varphi = f'^{-1} \circ f''$.

2. Un Frobenius complexe relatif.

Soit $V_0 = (V, \varphi_0)$ une variété \mathbb{C} -analytique compacte, V étant la variété \mathbb{R} -analytique sous-jacente et φ_0 sa structure complexe. En considérant pour chaque point x de V la carte de $\Psi(T_x(V))$ définie par $\varphi_0(x)$, on associe, à toute structure presque complexe \mathbb{R} -analytique ψ sur V assez voisine de φ_0 au sens \mathbb{C}^1 , un morphisme \mathbb{R} -analytique \mathbb{C} -antilinéaire du fibré tangent $T(V_0)$ dans lui-même, i. e. une forme ω_ψ de type $(0, 1)$ à valeurs dans $T(V_0)$. Pour que ψ soit intégrable, il faut et il suffit que $\omega = \omega_\psi$ vérifie $d''\omega - [\omega, \omega] = 0$ [1]. Ceci entraîne que ψ est sous-jacente à une structure \mathbb{C} -analytique et une seule (voir par exemple [3], p. 36).

Considérons l'ensemble $\Psi(V)$ des couples (x, ψ) , où $x \in V$ et $\psi \in \Psi(T_x(V))$; c'est une variété \mathbb{C} -analytique au-dessus de V (i. e. une variété \mathbb{R} -analytique munie d'une submersion sur V et d'une structure \mathbb{C} -analytique sur les fibres). Si S est un espace \mathbb{C} -analytique, $S \times V$ est un espace \mathbb{C} -analytique au-dessus de V . On appellera structure presque complexe \mathbb{R} -analytique sur V , paramétrée par S , un morphisme \mathbb{R} -analytique, \mathbb{C} -analytique sur les fibres, d'espaces \mathbb{C} -analytiques au-dessus de V : $S \times V \rightarrow \Psi(V)$. On définit de même les formes de type (p, q) à valeurs dans $T(V_0)$ paramétrées par S . On peut définir les opérations d'' et $[\ , \]$ sur les formes paramétrées par S . Une structure presque complexe ψ sur V paramétrée par S sera dite intégrable si la forme $\omega = \omega_\psi$ paramétrée par S correspondante vérifie $d''\omega - [\omega, \omega] = 0$.

PROPOSITION 1. - Soit ψ une structure presque complexe \mathbb{R} -analytique sur V paramétrée par S intégrable. Alors ψ est sous-jacente à une structure \mathbb{C} -analytique et une seule sur $S \times V$, qu'on notera encore ψ . En posant $X = (S \times V, \psi)$, la projection $X \rightarrow S$ est un morphisme lisse, et pour tout $x \in X$, $S \times \{x\}$ est un sous-espace \mathbb{C} -analytique de X .

La démonstration est analogue à celle de [3] ⁽¹⁾.

3. Variétés d'applications.

Soient M une variété compacte de classe \mathbb{C}^r , et V une variété \mathbb{C} -analytique. L'ensemble $\mathbb{C}^r(M; V)$ des applications de classe \mathbb{C}^r de M dans V est muni d'une structure de variété \mathbb{C} -analytique banachique, et $T_{\mathbb{C}^r} \mathbb{C}^r(M; V)$ s'identifie

⁽¹⁾ Il n'y a pas de difficulté parce qu'on a supposé ψ \mathbb{R} -analytique. Il serait beaucoup plus délicat d'introduire des paramètres dans la démonstration de NIRENBERG dans le cas \mathbb{C}^∞ .

à l'espace de Banach des sections de classe C^r du fibré $r^*T(V)$ sur M .

Plus généralement, soient S un espace \underline{C} -analytique et X un espace \underline{C} -analytique lisse au-dessus de S . L'ensemble $\underline{C}^r(M; X)$ des applications de classe C^r de M dans une fibre de X est un espace \underline{C} -analytique banachique simple au-dessus de S , c'est-à-dire que tout point $f: M \rightarrow X_s$ a un voisinage qui est S -isomorphe au produit d'un voisinage de s dans S par un ouvert d'un espace de Banach.

D'autre part, si E est une variété \underline{C} -analytique au-dessus de M , l'ensemble des sections de classe C^r de E est muni d'une structure de variété \underline{C} -analytique banachique. En particulier, si M est une variété de classe C^{r+1} , l'ensemble $\Psi^r(M)$ des structures presque complexes de classe C^r sur M est une variété \underline{C} -analytique banachique.

Avec les notations ci-dessus, l'ensemble $\text{Diff}^{r+1}(M; X)$ des difféomorphismes de classe C^{r+1} de M sur une fibre de X est un ouvert de $\underline{C}^{r+1}(M; X)$, et on a un morphisme \underline{C} -analytique de $\text{Diff}^{r+1}(M; X)$ dans $\Psi^r(M)$ qui à $f: M \rightarrow X_s$ associe $r^*(\varphi_s)$, où φ_s est la structure complexe de X_s .

Ces considérations s'appliquent au cas $r = k + \alpha$ non entier [1]. On pourrait aussi utiliser les applications de classe \mathcal{K}^s avec s suffisamment grand.

4. Etude locale de $\Phi^r(V)$.

Soit, comme au n° 2, $V_0 = (V, \varphi_0)$ une variété \underline{C} -analytique compacte. On notera $r_{\Omega}^{p,q}$ l'espace de Banach des formes de type (p, q) de classe C^r sur V_0 à valeurs dans le fibré tangent $T(V_0)$. La carte définie par φ_0 représente un voisinage de φ_0 dans $\Psi^r(V)$ sur un voisinage de 0 dans $r_{\Omega}^{0,1}$.

L'espace \underline{C} -analytique banachique $\Phi^r(V)$ des structures intégrables est défini dans cette carte par l'équation $\theta(\omega) = 0$, où $\theta: r_{\Omega}^{0,1} \rightarrow r_{\Omega}^{-1,2}$ est l'application analytique définie par $\theta(\omega) = d''\omega - [\omega, \omega]$. L'application tangente à θ est $d'' = d_1''$. Si $r > 1$ est non entier, ce que nous supposons désormais,

$$d_0'' : r_{\Omega}^{+1,0,0} \rightarrow r_{\Omega}^{0,1} \quad \text{et} \quad d_1'' : r_{\Omega}^{0,1} \rightarrow r_{\Omega}^{-1,0,2}$$

sont des homomorphismes d'image fermée. Munissons V_0 d'une structure hermitienne \underline{R} -analytique, et notons δ_1' et δ_2' les adjoints de d_0'' et d_1'' par rapport à cette métrique. On a alors

$$r_{\Omega}^{0,1} = \text{Im } d_0'' \oplus \text{Ker } \delta_1' \quad \text{et} \quad r_{\Omega}^{+1,0,2} = \text{Im } d_1'' \oplus \text{Ker } \delta_2' .$$

Posons $\Sigma = \theta^{-1}(\text{Ker } \delta_2^1)$. Le théorème des fonctions implicites montre que, au voisinage de 0, Σ est une sous-variété banachique $\underline{\underline{C}}$ -analytique de $r_{\Omega}^{0,1}$ contenant $\Phi^r(V)$, et $T_0(\Sigma) = \text{Ker } d_1''$.

Posons $H = \Sigma \cap \text{Ker } \delta_1^1$; au voisinage de 0, H est une sous-variété $\underline{\underline{C}}$ -analytique de dimension finie de Σ , et $T_0(H)$ est l'espace vectoriel des formes harmoniques de type (0, 1) à valeurs dans $T(V_0)$, espace qui s'identifie à $H^1(V_0; \Theta)$, où Θ est le faisceau des champs de vecteurs holomorphes sur V_0 . H peut être défini par l'équation

$$\delta'(d''\omega - [\omega, \omega]) + d''\delta'\omega = 0.$$

Il résulte des théorèmes connus sur les équations elliptiques que toute forme $\omega \in H$ est $\underline{\underline{R}}$ -analytique, et que l'injection de H dans $r_{\Omega}^{0,1}(V)$ définit sur V une structure presque complexe paramétrée par H .

Considérons le sous-espace S de H défini par $\theta(\omega) = 0$. Son espace tangent de Zariski en 0 est $T_0(H)$. L'injection de S dans H définit sur \tilde{V} une structure presque complexe $\underline{\underline{R}}$ -analytique paramétrée par S intégrable. Nous noterons X l'espace $\underline{\underline{C}}$ -analytique obtenu en munissant $S \times V$ de la structure ainsi définie.

5. Le théorème de Kuranishi.

L'espace $\underline{\underline{C}}$ -analytique X , lisse et propre au-dessus de l'espace pointé $(S, s_0 = 0)$, muni de l'identification $i : V_0 \rightarrow X_0$, jouit de la propriété semi-universelle suivante :

THÉORÈME. - Pour tout espace $\underline{\underline{C}}$ -analytique pointé (S', s'_0) , pour tout espace $\underline{\underline{C}}$ -analytique X' lisse et propre au-dessus de S' , et pour tout isomorphisme $i' : V_0 \rightarrow X'_0$, il existe un voisinage S'' de s'_0 dans S' , un morphisme f (non nécessairement unique) de (S'', s'_0) dans (S, s_0) , et un S'' -isomorphisme $g : X'|_{S''} \rightarrow f^*(X)$ tel que $g_{s'_0} = i \circ i'^{-1}$.

Démonstration. - Considérons l'espace $\underline{\underline{C}}$ -analytique $\Omega = \text{Diff}^{r+1}(V; X)$ lisse au-dessus de S , muni du point de base $e = I_{V_0}$. On a une section $\sigma : S \rightarrow \Omega$ provenant de l'identité $S \times V = X$, et un morphisme $\rho : \Omega \rightarrow \Phi^r(V)$ tel que, pour $f : V \rightarrow X_S$, $\rho(f) = f^*(\varphi_S)$, où φ_S est la structure complexe de X_S . Le composé $\rho \circ \sigma : S \rightarrow \Psi^r(V)$ est l'injection canonique. L'application tangente à $\rho_0 : \Omega_0 = \Omega_{s_0} \rightarrow \Psi^r(V)$ en e est $d_0'' : r_{\Omega}^{r+1,0,0} \rightarrow r_{\Omega}^{0,1}$, qui est un homomorphisme de noyau de dimension finie.

Soit \mathcal{E} un sous-espace \underline{C} -analytique banachique de \mathcal{Q} , lisse au-dessus de S , contenant $\sigma(S)$, et tel que $r^{+1}\Omega^{0,0} = \text{Ker } d'' \oplus T(\mathcal{E}_0)$. La restriction de ρ à \mathcal{E} est une immersion de \mathcal{E} dans Σ en e , car son application linéaire tangente est un isomorphisme. On a $S \subset \rho(\mathcal{E}) \subset \Phi^r(V) \subset \Sigma$, ces inclusions ayant lieu au sens des espaces analytiques. Il résultera du lemme qui suit que

$$(1) \quad \rho(\mathcal{E}) = \Phi^r(V) \quad \text{au voisinage de } 0.$$

LEMME 1. - Soient H un voisinage de 0 dans \mathbb{C}^k , U un voisinage de 0 dans un espace de Banach, Φ un sous-espace \underline{C} -analytique de $H \times U$. Posons $S = (H \times \{0\}) \cap \Phi$. Si $\Phi \supset S \times U$ ⁽²⁾, on a $\Phi = S \times U$ au voisinage de 0 dans $H \times U$.

Ce lemme sera démontré au n° 6.

Pour déduire l'assertion (1) du lemme, il suffit de trivialisier \mathcal{E} au voisinage de e , et de prolonger $\rho : \mathcal{E} = S \times U \rightarrow \Sigma$ en une application \underline{C} -analytique de $H \times U$ dans Σ , qui est alors une carte de Σ .

Soient maintenant (S', s'_0) un espace \underline{C} -analytique pointé, X' un espace \underline{C} -analytique lisse et propre au-dessus de S' , et $i' : V_0 \rightarrow X'$ un isomorphisme. L'espace analytique $\mathcal{Q}' = \text{Diff}^{r+1}(V, X')$ étant lisse, il existe une section \underline{C} -analytique $\sigma' : S'' \rightarrow \mathcal{Q}'$ sur un voisinage S'' de s'_0 dans S' telle que $\sigma'(s'_0) = i'$. D'autre part, on a comme précédemment un morphisme $\sigma' : \mathcal{Q}' \rightarrow \Phi^r(V)$ tel que, pour $f' : V \rightarrow X'_S$, $\rho(f) = f'^*(\varphi'_S)$. Comme $\rho : \mathcal{E} \rightarrow \Phi^r(V)$ est un isomorphisme local au point $e = i$, on peut, quitte à diminuer S'' , mettre de façon unique $\rho' \circ \sigma'$ sous la forme $\rho \circ h$, où h est un morphisme \underline{C} -analytique de (S'', s'_0) dans (\mathcal{E}, e) .

Composant h avec la projection $\mathcal{E} \rightarrow S$, on obtient un morphisme $f : (S'', s'_0) \rightarrow (S, s_0)$. A h (resp. à σ') correspond un f -morphisme (resp. un S'' -morphisme) \tilde{h} (resp. $\tilde{\sigma}'$) de $S'' \times V$ dans X (resp. dans X'), de classe \mathcal{C}^r , partiellement \underline{C} -analytique par rapport à S'' . La relation $\rho' \circ \sigma' = \rho \circ h$ montre que les structures presque complexes paramétrées par S'' induites sur V par X et X' au moyen de \tilde{h} et $\tilde{\sigma}'$ coïncident, ce qui montre que $g = \tilde{h} \circ \tilde{\sigma}'^{-1} : X''_S \rightarrow X$ est un morphisme \underline{C} -analytique, et achève la démonstration du théorème.

Remarque. - f dépend du choix de \mathcal{E} . Si $H^0(V_0; \Theta) = 0$, on a nécessairement

⁽²⁾ Au sens des espaces analytiques. Le lemme serait faux, si on supposait seulement l'inclusion ensembliste.

$\mathcal{E} = \emptyset$ au voisinage de e ; dans ce cas, f et g sont uniques, et $X \rightarrow S$ jouit d'une propriété universelle.

6. Démonstration du lemme 1.

Si f est une fonction sur $H \times U$ et $u \in U$, on notera f_u la fonction $x \rightarrow f(u, x)$. Pour tout polycylindre $K \subset H$ de rayons r_1, \dots, r_k , notons B_K l'espace de Banach des fonctions continues sur B_K , holomorphes à l'intérieur [4].

Soient f_1^1, \dots, f_p^p des fonctions \mathbb{C} -analytiques au voisinage de 0 dans $H \times U$, appartenant à l'idéal définissant Φ , et telles que f_0^1, \dots, f_0^p engendrent l'idéal \mathfrak{J} définissant S au voisinage de 0 ; notons f_u l'homomorphisme de faisceaux $\mathcal{O}^p \rightarrow \mathcal{O}$ défini par $f_u(h_1, \dots, h_p) = \sum f_u^j h_j$. Soit K un voisinage privilégié de 0 dans H pour f_0 , i. e. un polycylindre tel que f_0 induise un homomorphisme $B_K^p \rightarrow B_K$ ayant pour image le sous-espace fermé I_K de B_K formé des fonctions h dont le germe en 0 est dans \mathfrak{J} . Comme $\Phi \supset S \times U$, on a $f_u(B_K) \subset I_K$ pour tout u et, f_0 étant un épimorphisme, f_u sera un épimorphisme pour u suffisamment voisin de 0 . On peut donc mettre f_u^i sous la forme $\sum g_u^{ij} f_u^j$, et, en utilisant un supplémentaire de $\text{Ker } f_0$, on peut choisir les g_u^{ij} dépendant analytiquement de u . Ceci montre que les fonctions $(x, u) \rightarrow f_0^i(x)$, qui engendrent l'idéal définissant $S \times U$, appartiennent à l'idéal définissant Φ .

C. Q. F. D.

7. Description de S .

H est une sous-variété de $r\Omega^{0,1}$, et $T_0(H) = H^1 = \text{Ker } d_1^n \cap \text{Ker } \delta_1^1$ s'identifie à $H^1(V_0; \Theta)$; il existe un voisinage U de 0 dans H^1 et une carte $\eta : U \rightarrow H$ telle que $\eta(u) = u + o(\|u\|)$. Le sous-espace S de H est défini par $\Theta(\omega) = 0$, où Θ est l'application analytique de H dans $r^{-1}\Omega^{0,2}$ définie par $\Theta(\omega) = d^n \omega + [\omega, \omega]$.

PROPOSITION 2. - Il existe une application \mathbb{C} -analytique $\zeta : U \rightarrow H^2(V_0; \Theta)$ telle que η induise un isomorphisme local $\zeta^{-1}(0) \rightarrow S$. On peut choisir ζ de la forme $\zeta(u) = [u \sim u] + o(\|u\|^2)$, où $[u \sim u]$ est le cup-crochet.

Démonstration. - On a les relations $\theta(\omega) \in \text{Ker } \delta_2'$ et $d''(\theta(\omega)) = 2[\omega, \theta(\omega)]$ pour $\omega \in H$. D'autre part,

$$r^{-2}\Omega^{0,3} = \text{Im } d'' \oplus \text{Ker } \delta_3'$$

Considérons l'ensemble \mathfrak{F} des couples $(\omega, \alpha) \in H \times \text{Ker } \delta_2'$ tels que $d''\alpha - 2[\omega, \alpha] \in \text{Ker } \delta_3'$. Le théorème des fonctions implicites montre que \mathfrak{F} est un sous-fibré vectoriel de $H \times \text{Ker } \delta_2'$ et que la projection

$$p : r^{-1}\Omega^{0,2} \rightarrow H^2 = \text{Ker } d_2'' \cap \text{Ker } \delta_2'$$

induit un isomorphisme local de \mathfrak{F} sur $H \times H^2$. Comme θ définit une section de \mathfrak{F} , on a

$$\theta^{-1}(0) = (p \circ \theta)^{-1}(0),$$

et $\zeta = -p \circ \theta \circ \eta$ satisfait la première condition.

On a

$$-p(\theta(\omega)) = p([\omega, \omega]),$$

et

$$\zeta(u) = p([\eta(u), \eta(u)]) = p([u, u]) + o(\|u\|^2).$$

Or, $[u - u] = p([u, u])$, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KODAIRA (K.), NIRENBERG (L.) and SPENCER (D. C.). - On the existence of deformations of complex analytic structures, *Annals of Math.*, t. 68, 1958, p. 450-459.
- [2] KURANISHI (Masatake). - On the locally complete families of complex analytic structures, *Annals of Math.*, t. 75, 1962, p. 536-577.
- [3] WEIL (André). - Introduction à l'étude des variétés kählériennes. - Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1267 ; *Publ. Inst. Math. Univ. Nancago*, 6).

Voir aussi :

- [4] DOUADY (Adrien). - Théorème des voisinages privilégiés, *Séminaire Leray, Sur les équations aux dérivées partielles*, 4e année, 1964/65 (Collège de France).