SÉMINAIRE N. BOURBAKI

SERGE LANG

Nombres transcendants

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. n° 305, p. 407-414

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__407_0>

Séminaire BOURBAKI
18e année, 1965/66, n° 305

Février 1966.

NOMBRES TRANSCENDANTS

par Serge LANG

Nous commencerons par le résultat le plus simple :

THÉORÈME 1. Soient β_1, β_2 des nombres complexes, linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et z_ν ($\nu = 1,2,3$) également complexes, et linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors l'un des nombres

$$e^{\beta_1 z_\nu}, \quad e^{\beta_2 z_\nu} \quad (\nu = 1,2,3)$$

est transcendant.

Avant de démontrer le Théorème 1, nous en donnerons quelques corollaires.

COROLLAIRE 1. Soit β complexe, et supposons qu'il existe au moins trois nombres algébriques $\neq 0$ multiplicativement indépendants α_ν ($\nu = 1,2,3$) tels que les α_ν^β soient algébriques. Alors β est rationnel.

Démonstration. Supposons β irrationnel. Posons $\beta_1 = 1$ et $\beta_2 = \beta$, $z_\nu = \log \alpha_\nu$. On applique le Théorème 1 directement.

COROLLAIRE 2. Soit y réel, et x^y algébrique pour tout nombre rationnel positif x. Alors y est rationnel.

COROLLAIRE 3. De tous les nombres $2^\pi, 3^\pi, 5^\pi, \ldots$ au plus deux sont algébriques.

(Le corollaire 2 répond à une question qui m'avait été posée par Serre. Voir la fin de cet exposé à ce sujet.)

Le Théorème 1 dit qu'il existe au plus deux exceptions à la transcendance de α^β. Il peut y en avoir une :

$$2^{\frac{\log 3}{\log 2}} = 3.$$

On voudrait bien réduire d'une unité le nombre 3 dans le Théorème 1, mais il semble que cela soit nettement plus profond. Le Théorème de Gelfond-Schneider dit que si α, β sont algébriques, $\alpha \neq 0,1$ et β irrationnelalors il n'y a pas d'exception, α^{β} est transcendant.

On m'a fait remarquer que le Théorème 1 peut être considéré comme corollaire d'un résultat de Schneider [5], et que Siegel le connaissait (cf. Trans. AMS, 56, 1944, p. 455). Néanmoins, ce théorème n'apparait pas explicitement dans la littérature (par exemple dans les trois livres sur les nombres transcendants [2], [6], [7]), alors qu'il mérite certainement d'être mieux connu. Bien entendu, il apparaitra dans le quatrième !

Nous allons maintenant le démontrer, et cela par la méthode classique de Gelfond-Schneider, sauf que l'on s'en tire sans équation différentielle, et que la démonstration s'en trouve simplifiée au point d'être complètement triviale.

Supposons que la conclusion du théorème soit fausse, et soit K une extension finie de $\mathbb{Q}$ contenant

$$e^{\beta_1 z_\nu} \quad , \quad e^{\beta_2 z_\nu}$$

pour $\nu = 1,2,3$. Pour simplifier, nous supposerons que les valeurs ci-dessus sont entières. Le cas où elles sont dans un corps de nombres se traite de la même manière, faisant intervenir de la technique triviale de nombres algébriques.

Soit n un entier qui tendra vers l'infini, et qu'on suppose être un carré. Posons $r = (4n)^{3/2}$. On peut trouver des entiers a_{ij} non tous nuls tels que la fonction

$$F(t) = \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij} e^{i\beta_1 t} e^{j\beta_2 t}$$

ait un zéro en chaque point $k.z = k_1z_1 + k_2z_2 + k_3z_3$, avec $1 \leqq k_\nu \leqq n$. Ceci revient à résoudre des équations linéaires en r^2 variables, avec $r^2 = (4n)^3$. Le nombre d'équations est égal à n^3, et les coefficients sont les valeurs

$$e^{i\beta_1(k.z)}\, e^{j\beta_2(k.z)}$$

qui sont des entiers, dont la valeur absolue est $\leqq C^{rn}$ avec une constante C. Un lemme simple de Siegel dit que dans ces conditions, on peut résoudre non-trivialement les équations linéaires, avec a_{ij} du même ordre de grandeur que les coefficients, à savoir C^{rn}.

Comme β_1, β_2 sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, la fonction F n'est pas identiquement nulle. Soit s le plus grand entier tel que $F(k.z) = 0$ avec $1 \leqq k_\nu \leqq s$. Soit $w = k.z$ avec l'un des $k_\nu = s+1$ tel que $F(w) \neq 0$. Alors $F(w)$ est entier, et

$$1 \leqq |F(w)| .$$

D'autre part, on a

$$F(w) = \frac{F(t)}{\prod (t-k.z)} \prod (w-k.z) \Bigg|_{t=w}$$

les produits étant pris sur $1 \leqq k_\nu \leqq s$. On emploie le principe du maximum sur le cercle de rayon $R = s^{3/2}$. Alors $F(t)$ sur ce cercle est d'un ordre de grandeur $C^{rR} \leqq C^{s^3}$ alors que le quotient satisfait à la borne

$$\max_{|t| = R} \frac{\prod |w-k.z|}{\prod |t-k.z|} \leqq \frac{C}{s^{3/2}}$$

Aussitôt que n est suffisamment grand (et donc aussi s) on a une contradiction.

On voit immédiatement que la démonstration ci-dessus ne fait intervenir que certaines propriétés triviales des fonctions entières, et la loi de groupe algébrique de l'exponentielle. En outre, formellement, la démonstration fait intervenir deux fonctions algébriquement indépendantes f, g, à savoir

$$f(t) = e^{\beta_1 t} \qquad \text{et} \qquad g(t) = e^{\beta_2 t}$$

En conséquence, on peut démontrer de la même façon le théorème plus général suivant :

THÉORÈME 2. *Soit G une variété de groupe linéaire ou abélienne, définie sur un corps de nombres. Soit $\phi : \mathbb{C} \to G_{\mathbb{C}}$ un sous-groupe à 1 paramètre, et Γ un sous-groupe de $\mathbb{C}$ contenant au moins 3 éléments linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ dans le cas linéaire, et 7 éléments linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ dans le cas abélien. Alors $\phi(\Gamma)$ ne peut être contenu dans le groupe des points algébriques de G que si $\phi(\mathbb{C})$ est un sous-groupe algébrique de $G_{\mathbb{C}}$.*

En effet, on peut uniformiser l'application exponentielle ϕ au moyen de fonctions entières ou méromorphes selon le cas, et essentiellement copier la démonstration du Théorème 1. Par exemple, dans le cas linéaire, on a

$$\phi(t) = \sum t^{\mu} M^{\mu}/\mu!$$

avec une matrice M qui donne la direction du vecteur tangent à l'origine de l'exponentielle ϕ. Dans ce cas, $\phi(t)$ est une matrice

$$\phi(t) = (f_{ij}(t))$$

où les f_{ij} sont entières d'ordre 1. Si ϕ ne paramétrise pas un sous-groupe algébrique de G, alors au moins deux des fonctions f_{ij}, soient f, g, sont algébriquement indépendantes, et on leur applique la démonstration en question. Dans le cas des variétés abéliennes, on emploie les fonctions thêta, inventées exprès pour ça.

On remarquera qu'il n'y a aucun besoin de normaliser l'exponentielle, i.e. de prescrire que sa dérivée à l'origine soit algébrique. Une telle normalisation sert à réduire le nombre de points en lesquels la valeur de l'exponentielle est algébrique. Dans ce cas, rappelons qu'on a le théorème suivant, qu'on énoncera pour plusieurs variables [4] .

THEOREME 3. Soit G une variété de groupe algébrique, linéaire ou abélienne, définie sur un corps de nombres. Soit $\phi : \mathbb{C}^d \to G_{\mathbb{C}}$ un sous-groupe à d paramètres, normalisé de telle façon que la dérivée $\phi'(0)$ à l'origine soit algébrique. Soit Γ un sous-groupe de $\mathbb{C}^d$ contenant au moins d points linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$. Si $\phi(\Gamma)$ est contenu dans le groupe des points algébriques de G, alors ϕ est de dimension algébrique d, et $\phi(\mathbb{C}^d)$ est un sous-groupe algébrique de dimension d.

Pour la démonstration, on impose en plus d'un tas de zéros, qu'ils aient de hautes multiplicités. A part ça, c'est toujours le même principe.

Il serait bien entendu très désirable d'étendre le Théorème 3 sans normaliser ϕ , mais en faisant l'assomption qu'on a un tas de points dans Γ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ (et pas seulement sur $\mathbb{C}$). On tombe alors sur l'analogue du lemme des trois cercles pour estimer une fonction entière ayant beaucoup de zéros, dans le cas de plusieurs variables. Comme une telle fonction admet toujours un diviseur de zéros, il faut alors que les zéros soient raisonnablement distribués dans le cercle (i.e. le polydisque), et on a donc besoin d'une condition d'approximation diophantienne sur les vecteurs de Γ en question. Cela mène à un genre de question qui semble très au delà de tout ce qu'on peut traiter aujourd'hui.

Remarquons enfin qu'on peut étendre l'argument au cas où les fonctions prennent des valeurs dans un corps de type fini sur $\mathbb{Q}$, à condition d'assumer une mesure de transcendance sur ce corps. Cela donne des résultats d'indépendance algébrique. On procède comme suit.

Soit K un sous-groupe de $\mathbb{C}$, et supposons d'abord que $K = \mathbb{Q}(x) = \mathbb{Q}(x_1,\ldots,x_q)$ où $x_1,\ldots,x_q$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Pour tout polynôme P à coefficients entiers,

$$P(x) = \sum c_{(i)} x_1^{i_1} \ldots x_q^{i_q}$$

posons $|P| = \max |c_{(i)}|$, et

$$gr(P) = \max(\deg P, \log |P|).$$

On dit que $gr(P)$ est la grandeur de P, ou de $P(x)$. On définit la grandeur d'un élément de K en le représentant comme quotient de polynômes à coefficients entiers, et enfin la grandeur $gr(\alpha)$ d'un élément dans une extension finie de $\mathbb{Q}(x)$ par rapport à une base linéaire sur $\mathbb{Q}(x)$, et des coefficients de α relativement à cette base.

On dira que K a un type de transcendance $\leq \tau$ (avec τ réel ≥ 2) si pour tout $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, on a

$$-(gr(\alpha))^{\tau} << \log |\alpha|$$

(le signe << signifiant la même chose que "grand oh" dans la notation usuelle).

La grandeur correspond à la hauteur (logarithmique) dans le cas des nombres algébriques. On obtient alors la généralisation suivante du Théorème 1.

THEOREME 4. *Soit $\mathbb{Q}(x)$ une extension pure de $\mathbb{Q}$, de type $\leq \tau$ avec τ entier ≥ 2. Soient $\beta_1,\ldots,\beta_d$ complexes, linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et $z_1,\ldots,z_m$ également. Supposons $d > \tau$. Si $m \geq d\tau$, alors l'un des nombres*

$$e^{\beta_i z_\nu} \quad (i = 1,\ldots,d \text{ et } \nu = 1,\ldots,m)$$

est transcendant sur $\mathbb{Q}(x)$.

On peut formuler et démontrer une généralisation pour les groupes linéaires de façon évidente. Pour les variétés abéliennes, on a besoin en plus d'une estimation sur l'ordre de croissance semblable à celle qu'on

a pour les valeurs algébriques (i.e. la quadraticité de Néron-Tate). On peut la vérifier explicitement pour le cas de dimension 1, mais je ne l'ai pas encore fait pour les variétés abéliennes. On notera que le type de démonstration ici permet de travailler avec des invariants g_2, g_3 qui ne sont pas forcément algébriques, contrairement au reste de la littérature. On voit bien clairement dans le cas elliptique comment ces invariants interviennent dans la formule d'addition. Pour les variétés abéliennes, définies sur une extension transcendante de $\mathbb{Q}$, cela pose un genre de problème nouveau.

Bien entendu, pour appliquer le Théorème 4, il faut savoir que certains nombres transcendants ont un type bien déterminé. Les résultats dans cette direction sont dus à Feldman [1], puis Gelfond [2]. Feldman démontre par exemple que π a un type de transcendance $\leq 2+\varepsilon$. (En fait, quelque chose de plus fort, mais passons.) On voit comment la théorie des nombres transcendants est, par là, purement inséparable de la théorie des approximations diophantiennes.

Finissons par quelques remarques sur le cas p-adique. Dans ce cas, les théorèmes sont locaux, et les Théorèmes 1, 2 se généralisent de façon évidente. Serre a remarqué que le cas p-adique (et l'autre aussi) ont des applications à la théorie des nombres algébriques, e.g. à la détermination des caractères des classes d'idèles d'un corps de nombres à valeurs algébriques. Il montre comment ce problème se ramène à un cas du Théorème 3 où les vecteurs tangents sont des vecteurs de logarithmes de nombres algébriques. C'est précisément le cas difficile, sauf en dimension 1, qui est couvert par le Théorème 1. Rappelons aussi que le cas p-adique de transcendance, ou plutôt d'indépendance algébrique de logarithmes p-adiques de nombres algébriques multiplicativement indépendants, montrerait la non-nullité du régulateur p-adique de Leopoldt.

B I B L I O G R A P H I E

[1] N. FELDMAN - The approximation of certain transcendental numbers, I and II, Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. 15 (1951), pp. 53-74 and pp. 153-176.

[2] A.O. GELFOND - Transcendental and algebraic numbers, Dover, New-York, 1960.

[3] S. LANG - Transcendental points on group varieties, Topology 1 (1962) pp. 313-318.

[4] S. LANG - Algebraic values of meromorphic functions, I and II Topology (1965) pp. 313-318, and the second paper to appear.

[5] T. SCHNEIDER - Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise, Math. Ann. 121 (1949-1950) pp. 131-140.

[6] T. SCHNEIDER - Einführung in die transzendenten Zahlen, Springer Verlag, 1957.

[7] C.L. SIEGEL - Transcendental Numbers, Annals of Math. Studies 16.