ANDRÉ GRAMAIN

L'invariance topologique des classes de Pontrjagin rationnelles

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. nº 304, p. 391-406
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__391_0>

Séminaire BOURBAKI
18e année, 1965/66, n° 304 Février 1966

L'INVARIANCE TOPOLOGIQUE des CLASSES de PONTRJAGIN RATIONNELLES

(d'après S. P. Novikov et L. C. Siebenmann)

par André GRAMAIN

Le but de cet exposé est de démontrer l'invariance topologique des classes de Pontrjagin tangentes des variétés différentiables, c'est-à-dire le

THÉORÈME 0.- Soient V et V' deux variétés différentiables C^{∞}, et h un homéomorphisme de V sur V' ; l'application induite $h^* : H^*(V',\mathbf{Q}) \longrightarrow H^*(V,\mathbf{Q})$ envoie les classes de Pontrjagin tangentes de V' sur celles de V : $h^{4i}(p_i(V')) = p_i(V)$.

Thom ([11]), et Rohlin-Švarč ([7]) ont déjà démontré l'invariance combinatoire des classes de Pontrjagin rationnelles des variétés triangulées. On sait d'autre part (voir Milnor [4]) que les classes de Pontrjagin à coefficients entiers ne sont pas topologiquement invariantes.

Le Théorème 0 a été démontré en premier lieu par S. P. Novikov (voir [6]). Nous exposons ici une démonstration due à L. Siebenmann, qui a l'avantage de donner un résultat plus général que le Théorème 0 (ci-dessous Proposition 3 et son Corollaire).

Dans sa thèse ([9]), L. Siebenmann donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété W différentiable ouverte soit l'intérieur d'une variété différentiable compacte à bord. Plus précisément, il trouve une obstruction à valeurs dans le groupe de Grothendieck $\widetilde{K}^0(Z(G))$ des classes stables de modules projectifs de type fini sur l'algèbre $Z(G)$ d'un certain groupe G attaché à la variété W . Pour démontrer le théorème ci-dessus, nous utiliserons un cas particulier du résultat de Siebenmann, qu'on peut énoncer ainsi :

THÉORÈME 1.- Soit W une variété différentiable de dimension $n + k$, homéomorphe au produit $M \times R^k$, où M est une variété topologique compacte connexe sans bord, de dimension n. Si $n \geqslant 5$, et si $\tilde{K}^o(Z(G)) = 0$, (où G est le produit de $\pi_1(W)$ par $k - 1$ exemplaires de Z) la structure différentiable de W est une structure produit : autrement dit, il existe une variété différentiable N compacte sans bord, telle que le produit $N \times R^k$ soit difféomorphe à W. (Il en résulte que N a même type d'homotopie que M.)

La démonstration de ce théorème sera esquissée au § 4. Nous donnerons un certain nombre de définitions (§ 1) qui nous permettront d'énoncer des conséquences du Théorème 1 (§ 2), d'où nous déduirons (§ 3) l'invariance topologique des classes de Pontrjagin.

§ 1. Microfibrés topologiques.

1. Définition et propriétés (voir Milnor [4]).

Un microfibré topologique de base B, est la donnée de deux espaces topologiques B et E, et de deux applications continues :

la "projection" $j : E \longrightarrow B$,

la "section nulle" $i : B \longrightarrow E$,

telles que leur composée $j \circ i$ soit l'application identique de B.

EXEMPLES.- 1) Microfibré produit de fibre R^n.

$E = B \times R^n$, i est effectivement la section nulle et j la projection sur B.

2) Microfibré tangent à une variété topologique V .

La base est V , et E est $V \times V$; j est la première projection, et i est l'application diagonale de V dans $V \times V$.

3) Microfibré sous-jacent à un fibré vectoriel localement trivial.

La définition est évidente.

Un prémorphisme du microfibré (B,E,i,j) dans le microfibré (B',E',i',j') au-dessus d'une application $f : B \to B'$, est une application g d'un voisinage U de la section nulle de E dans E' , compatible avec f , c'est-à-dire qui rende commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & U\ (\subset E) \arrow[r, "j|U"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "f"] \\ B' \arrow[r, "i'"] & E' \arrow[r, "j'"] & B' \end{tikzcd}$$

Deux prémorphismes au-dessus de f définissent le même morphisme, s'ils coïncident dans un voisinage de la section nulle, contenu dans l'intersection de leurs voisinages de définition.

La composition des morphismes, le morphisme identique sont des notions évidentes. On voit sans peine qu'un isomorphisme, (morphisme qui admet un inverse) est représentable par un homéomorphisme d'un voisinage de la section nulle de E sur un voisinage de celle de E' , au-dessus d'un homéomorphisme de B sur B' . Un B-isomorphisme entre deux microfibrés de même base B , est un isomorphisme au-dessus de l'application identique de B . De même que pour les fibrés, on peut définir les notions de microfibré image réciproque et de microfibré induit. Un microfibré trivial de rang n est un microfibré isomorphe au microfibré produit de fibre R^n . Un microfibré localement trivial de rang n , est un microfibré tel, que tout point de la base ait un voisinage au-dessus duquel le microfibré induit soit trivial de rang n . Nous ne nous intéresserons qu'aux microfibrés localement triviaux. Les exemples donnés ci-dessus sont des microfibrés localement triviaux. Comme pour les fibrés, on sait définir la somme de Whitney de deux microfibrés ; on démontre aussi que les images réciproques d'un microfibré par deux applications homotopes sont isomorphes. Enfin, la dénomination de microfibré tangent à une variété topologique est justifiée par le fait que le microfibré sous-jacent au fibré tangent d'une variété différentiable paracompacte est isomorphe au microfibré tangent à cette variété.

2. "Classification" des microfibrés.

Nous donnerons sans démonstration les résultats, suivants, qui utilisent la classique théorie simpliciale (voir [1]).

Soit Top(n) le groupe simplicial dont les p-simplexes sont les automorphismes du microfibré trivial de rang n , de base le simplexe topologique $|\Delta_p|$. A tout microfibré de rang n , ayant pour base la réalisation géométrique $|B|$ d'un ensemble simplicial B , on peut associer un fibré principal simplicial de base B , de groupe Top(n) . Inversement, à tout fibré simplicial principal de groupe Top(n) , ayant pour base un ensemble simplicial <u>localement fini</u> B , on peut associer un microfibré topologique de rang n , de base $|B|$, de telle sorte qu'on établisse ainsi une bijection entre l'ensemble des classes de microfibrés de rang n , de base $|B|$, et l'ensemble des classes de fibrés principaux de groupe $Top(n)$, de base B (ensemble simplicial localement fini). On sait alors que ces classes de fibrés simpliciaux sont en bijection avec les classes d'homotopie d'applications simpliciales de B dans un certain ensemble simplicial $\overline{W}(Top(n))$ (défini dans [1]).

La même construction pour les fibrés vectoriels localement triviaux, nous donne un groupe simplicial $O(n)$ (qui est le complexe singulier du groupe orthogonal de n variables). $O(n)$ s'identifie à un sous-groupe de $Top(n)$, d'où, par fonctorialité de $\overline{W}$, une application

$$\varphi(n) : \overline{W}(O(n)) \longrightarrow \overline{W}(Top(n)) .$$

$\overline{W}(Top(n))$ est un complexe de Kan, donc $\pi_q(\overline{W}(Top(n)))$ s'identifie à l'ensemble des classes d'homotopie d'applications (simpliciales) de l'ensemble simplicial $\partial \Delta_{q+1}$ (sphère simpliciale de dimension q) dans $\overline{W}(Top(n))$. Donc, $\pi_q(\overline{W}(Top(n)))$ est en bijection avec l'ensemble des classes de microfibrés de rang n , de base S^q . On a un raisonnement analogue pour $O(n)$, et l'application naturelle

$$\pi_q(\overline{W}(O(n))) \longrightarrow \pi_q(\overline{W}(Top(n)))$$

correspond au foncteur "microfibré sous-jacent".

Nous noterons Top et O , les limites inductives par suspension de $Top(n)$ et $O(n)$. Le groupe O est un sous-groupe de Top . Nous noterons BO et $BTOP$ les espaces $\overline{W}(O)$ et $\overline{W}(Top)$.

3. Classes caractéristiques.

Tout microfibré topologique de base B , définit un microfibré (image réciproque) de base $|S(B)|$ (réalisation géométrique du complexe singulier de B), donc une classe d'applications simpliciales

$$f : S(B) \longrightarrow \bar{W}(\mathrm{Top}(n))$$

d'où un homomorphisme

$$f^* : H^*(\bar{W}(\mathrm{Top}(n))) \longrightarrow H^*(B) .$$

Les éléments de l'image de f^* sont les classes caractéristiques du microfibré.

Dans le cas où le microfibré provient d'un fibré vectoriel, cette application se factorise par $H^*(\bar{W}(O(n)))$:

$$H^*(\bar{W}(\mathrm{Top}(n))) \xrightarrow{\varphi^*(n)} H^*(\bar{W}(O(n))) \longrightarrow H^*(B) .$$

Il est clair que, pour les fibrés, toutes les classes caractéristiques qui proviennent de l'image de $\varphi^*(n)$, ne dépendent que du microfibré sous-jacent.

Lorsqu'il s'agit de cohomologie rationnelle, $H^*(BO,\mathbb{Q})$ est une algèbre de polynômes en des classes $p_i \in H^{4i}(BO,\mathbb{Q})$, appelées classes rationnelles de Pontrjagin. Nous démontrerons (Corollaire de la Proposition 3), que $\varphi^* : H^*(BTOP,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(BO,\mathbb{Q})$ est surjective ; <u>les classes rationnelles de Pontrjagin d'un fibré ne dépendent donc que du microfibré sous-jacent.</u>

Pour la cohomologie mod. 2, le résultat est plus précis : on sait construire directement des classes de Stiefel-Whitney $w_i \in H^i(B,\mathbb{Z}_2)$ pour <u>tout</u> microfibré, qui, dans le cas où le microfibré provient d'un fibré, sont les classes de S.-W. de ce fibré. La construction est donnée par une formule classique utilisant les opérations de Steenrod, et l'isomorphisme de Thom. (Le théorème de Thom-Gysin vaut, en effet, pour les microfibrés.) (Voir [10]).

§ 2. Structures différentiables sur $S^n \times R^k$; fibrés de base S^n.

Une conséquence du Théorème 1 est la

PROPOSITION 1.- Pour toute structure différentiable sur $S^n \times R^k$, $n \geq 5$, le fibré tangent est stablement trivial.

Démonstration.

D'après un résultat d'Adams, (voir [3]) toute sphère d'homotopie a un fibré tangent stablement trivial. Mais, d'après le Théorème 1, toute structure différentiable sur $S^n \times R^k$ est une structure produit $\Sigma \times R^k$, où Σ est une n-sphère d'homotopie ; et le fibré tangent à $\Sigma \times R^k$ est stablement trivial. Le Théorème 1 s'applique parce que $\pi_1(S^n) = 0$, et que $\tilde{K}^o(Z(G))$ est nul si G est un groupe abélien libre (voir [12]).

PROPOSITION 2.- Tout fibré de base S^n (quel que soit n), dont le microfibré sous-jacent est stablement trivial, est lui-même stablement trivial.

Démonstration.

Il suffit de démontrer la proposition pour un fibré différentiable, puisque tout fibré a dans sa classe un fibré différentiable. On peut aussi supposer que le microfibré sous-jacent est trivial.

$n \geq 5$. Soit $\xi = (E, S^n, p)$ un fibré différentiable de rang k. L'isomorphisme du microfibré sous-jacent à ξ sur le microfibré trivial est un homéomorphisme h d'un voisinage ouvert $W \subset E$ de la section nulle de ξ sur $S^n \times R^k$, respectant la fibration et la section nulle :

$$\begin{tikzcd} W\ (\subset E) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p|W"'] & & S^n \times R^k \arrow[dl, "p_1"] \\ & S^n & \end{tikzcd}$$

Le fibré tangent $T(W)$ est stablement trivial d'après la Proposition 1. On sait d'autre part calculer $T(W)$; c'est la somme de Whitney $(p^*(\xi) \oplus \theta(k))|W$ de l'image réciproque de ξ par $p|W$, et du fibré trivial de rang k. La restriction de $T(W)$ à la section nulle de ξ est donc isomorphe à la somme de Whitney de ξ et d'un fibré trivial. Ceci prouve que ξ est stablement trivial.

n = 1 (ou 2). Il y a deux classes stables de fibrés de base S^1 (resp. S^2) ; ces deux classes sont caractérisées par leur classe de Stiefel-Whitney w_1 (resp. w_2). Si le microfibré sous-jacent à ξ est trivial, cette classe est nulle, et ξ est stablement trivial.

n = 3. Comme $\pi_2(O)$ est nul, il n'y a qu'une classe stable de fibrés de base S^3, et tout fibré de base S^3 est stablement trivial.

n = 4. On sait que $\pi_4(BO) = \pi_3(O) = Z$; les fibrés de base S^4 sont classifiés par la classe de Pontrjagin $p_1 \in H^4(S^4,Z)$.

Soit ξ un fibré différentiable de base S^4, dont le microfibré sous-jacent est trivial, et W un voisinage ouvert de la section nulle de ξ, homéomorphe à $S^4 \times R^k$; montrons que $y = p_1(\xi) = 0$. Comme pour $n \geqslant 5$, nous utilisons le Théorème 1. Soit $P_2(C)$ l'espace projectif complexe de dimension 2 ; la classe totale de Pontrjagin de son fibré tangent est $1 + 3x^2$, où $x \in H^2(P_2(C),Z)$ est la première classe de Chern du fibré canonique de base $P_2(C)$. Le produit $W \times P_2(C)$ a même cohomologie que $S^4 \times P_2(C)$, et la classe totale de Pontrjagin de $T(W \times P_2(C))$ est :

$$(1 + y).(1 + 3x^2) = 1 + y.1 + 1.3x^2 + y.3x^2$$

car il n'y a pas de torsion.

D'après le Théorème 1, $W \times P_2(C)$ est difféomorphe à un produit $N \times R^k$, où N est une variété compacte de dimension 8 qui a même cohomologie que $S^4 \times P_2(C)$. L'index de la variété N est nul, et le théorème de l'index d'Hirzebruch permet de conclure que : $7p_2 - p_1^2 = 0$, soit $15y.x^2 = 0$, donc $y = 0$.

Une forme équivalente de la Proposition 2, est la :

PROPOSITION 2'.- <u>L'application naturelle</u> :

$$\varphi_n : \pi_n(BO) \longrightarrow \pi_n(BTOP) \qquad \text{(voir § 1)}$$

<u>est injective pour tout</u> $n \geqslant 1$.

En effet, les classes stables de fibrés (resp. de microfibrés) de base S^n , sont en correspondance biunivoque avec $\pi_n(BO)$ (resp. $\pi_n(BTOP)$).

REMARQUES.- 1) <u>L'application</u> φ_n <u>n'est pas surjective pour</u> $n = 4p$. En effet, Milnor a démontré dans [4] que l'image par φ_{4p} d'un générateur de $\pi_{4p}(BO)$ qui (Théorème de Bott) est infini cyclique, est divisible dans $\pi_{4p}(BTOP)$ par l'entier $r = (2^{2p-1} - 1).\mathrm{num.}\left(\frac{B_p}{p}\right)$, où B_p est le p-ième nombre de Bernoulli, et $\mathrm{num.}\left(\frac{B_p}{p}\right)$ le numérateur de $\frac{B_p}{p}$ écrit sous forme irréductible. Pour $p \geqslant 2$, $r > 1$, et l'injectivité de φ_{4p} prouve que φ_{4p} n'est pas surjective.

2) Dans le même article, Milnor construit un CW-complexe X , pour lequel l'analo-

gue de la Proposition 2 est fausse. On l'obtient en attachant à S^{4p-1} une cellule de dimension $4p$ par une application de degré q , où q est un diviseur premier de l'entier r (cf. Remarque 1)). Compte tenu de la Remarque 1), il n'est pas difficile de démontrer que, pour cet espace X , tout microfibré de base X , sous-jacent à un fibré, est stablement trivial ; il y a cependant q classes stables de fibrés de base X .

§ 3. Invariance topologique des classes rationnelles de Pontrjagin.

PROPOSITION 3.- Pour tout n , l'application

$$H_n(BO,Q) \longrightarrow H_n(BTOP,Q)$$

induite par φ , est injective.

COROLLAIRE.- Pour tout n , l'application

$$H^n(BTOP,Q) \longrightarrow H^n(BO,Q)$$

induite par φ , est surjective.

Le Corollaire est une conséquence immédiate de la Proposition 3. D'après ce que nous avons dit au § 1, il entraîne que les classes de Pontrjagin rationnelles d'un fibré ne dépendent que du microfibré sous-jacent. En particulier, les classes tangentes d'une variété différentiable, ne dépendant que du microfibré tangent, ne dépendent que de la structure de variété topologique.

Démonstration de la Proposition 3.

Soit $G(n)$ l'un des groupes simpliciaux $Top(n)$ ou $O(n)$. L'isomorphisme de $R^n \times R^n$ sur R^{2n} qui, au couple (x,y) , où $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$, $y = (y_i)_{1\leq i\leq n}$, associe $z = (z_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ avec $z_{2p-1} = x_p$, $z_{2p} = y_p$, permet de définir un homomorphisme de groupes simpliciaux $G(n) \times G(n) \longrightarrow G(2n)$, compatible avec les suspensions $G(n) \longrightarrow G(n+1)$ et $G(2n) \longrightarrow G(2n+2)$. Par fonctorialité de $\overline{W}$, on en déduit une application simpliciale $\overline{W}(G(n)) \times \overline{W}(G(n)) \longrightarrow \overline{W}(G(2n))$. Ceci permet de définir sur BO et BTOP , par passage à la limite, deux lois de composition, respectées par l'application φ : BO $\longrightarrow$ BTOP . Les réalisations géométriques de BO et BTOP sont donc munies de lois de composition qui en font des H-espaces dans un sens un peu large : ces lois de composition ne sont, en effet, pas nécessairement continues ; mais leurs restrictions aux compacts sont continues (voir [1]).

Comme BO et BTOP sont des complexes de Kan, leur homologie et leur homotopie sont celles de leurs réalisations géométriques. La Proposition 3 est donc une conséquence de la Proposition 2' et du Lemme suivant (valable pour les H-espaces dans le sens faible précédent, mais que, pour simplifier, nous énoncerons pour le cas de H-espaces) :

LEMME.- *Soient X et Y deux H-espaces connexes, et* $f : X \longrightarrow Y$ *une application continue compatible avec les lois de H-espaces. Si l'application induite*

$$\pi_*(f) \otimes \mathbb{Q} \ : \ \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \pi_*(Y) \otimes \mathbb{Q}$$

est injective, alors l'application

$$H(f,\mathbb{Q}) \ : \ H_*(X,\mathbb{Q}) \longrightarrow H_*(Y,\mathbb{Q})$$

est aussi injective.

Le Lemme se démontre en construisant un espace auxiliaire T , et une application $g : T \longrightarrow Y$, de telle sorte que l'application composée $X \times T \longrightarrow Y \times Y \longrightarrow Y$ définie à l'aide de la loi de H-espace de Y , induise un isomorphisme sur les groupes d'homotopie rationnels. On prend pour espace T un produit infini de sphères S^{2n+1} de dimension impaire, et d'espaces Ω_{2n} qui ont le type d'homotopie de l'espace des lacets de S^{2n+1}. On utilise ensuite le théorème de J. H. C. Whitehead modulo la classe des groupes abéliens de torsion (voir Serre [8]). Comme X et Y sont des H-espaces, on peut se ramener aux hypothèses du théorème de Whitehead concernant les groupes fondamentaux.

REMARQUE.- On peut montrer que les H-lois de $|BO|$ et $|BTOP|$ sont homotopiquement associatives. On aurait donc pu démontrer la Proposition 3 à l'aide d'un théorème de Milnor et Moore ([5] page 263).

§ 4. Démonstration du Théorème 1.

Le Théorème se démontre par récurrence sur k. Pour $k = 1$, la démonstration n'est autre que celle du théorème principal de la thèse de L. C. Siebenmann ([9]). Elle occupe cinq chapitres de sa thèse, et nous ne pouvons pas l'exposer ici. Signalons seulement qu'on construit, par chirurgie, une sous-variété connexe V de W, à bord bV connexe, qui contienne un ouvert de la forme $M \times]a,\infty[\subset W$, telle que $\pi_1(bV) \longrightarrow \pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(W)$ soient des isomorphismes, et que, pour tout $i \geq 2$, $H_i(\tilde{V}, b\tilde{V}) = 0$, (où $\tilde{V}$ et $b\tilde{V}$ sont les revêtements universels de V et bV). Il est ensuite facile à voir, à l'aide du Théorème du s-cobordisme (voir [2]), que W est difféomorphe à $bV \times R$. Signalons aussi que la même démonstration s'applique à un cas un peu plus général, et permet de démontrer le

LEMME.- Soit W une variété différentiable connexe sans bord, qui est le revêtement de groupe Z d'une variété topologique compacte connexe sans bord. Si $\tilde{K}^0(Z\pi_1(W))$

<u>est nul, alors</u> W <u>est difféomorphe à un produit</u> $N \times R$.

Ce Lemme nous servira au cours de la récurrence. Il a aussi été démontré, d'une manière différente, par S. P. Novikov.

Remarquons tout de suite que, comme $\tilde{K}^{o}(Z(-))$ est un foncteur de la catégorie des groupes dans celle des groupes abéliens, l'hypothèse

$$\tilde{K}^{o}(Z(G \times \underbrace{Z \times Z \times \ldots \times Z}_{(k-1)\text{ fois}})) = 0$$

entraîne (par rétraction)

$$\tilde{K}^{o}(Z(G \times \underbrace{Z \times \ldots \times Z}_{p \text{ fois}})) = 0 \qquad \text{pour } 0 \leq p \leq k-1 .$$

<u>Récurrence.</u>

Supposons le Théorème établi jusqu'à l'ordre $k-1$. Soit W vérifiant les hypothèses du théorème. Soient S le cercle unité du plan $(x_3 = x_4 = \ldots = x_k = 0)$ de R^k , et $T \subset R^k$ le complémentaire de l'hyperplan $(x_1 = x_2 = 0)$. L'espace T est homéomorphe à $S \times R^{k-1}$. Si W' est l'ouvert de W , image de $M \times T$ par l'homéomorphisme de $M \times R^k$ sur W , comme $\pi_1(W') = \pi_1(W) \times Z$, W' est difféomorphe à un produit $V \times R^{k-1}$, d'après l'hypothèse de récurrence.

Au revêtement évident de $M \times S \times R^{k-1}$ par $M \times R \times R^{k-1}$, correspond par homéomorphisme un revêtement $p : \hat{W}' \longrightarrow W'$. On munit $\hat{W}'$ de la structure différentiable image réciproque de celle de W' par p . Notons V la sous-variété $V \times 0$ de W' , et soit $\hat{V} = p^{-1}(V)$.

1) <u>Il existe une variété différentiable</u> N <u>telle que</u> $\hat{V}$ <u>soit difféomorphe à</u> $N \times R$.
C'est une conséquence immédiate de la définition de $\hat{V}$, et du Lemme précédent.

2) $\hat{W}'$ <u>est difféomorphe à</u> $\hat{V} \times R^{k-1}$. Considérons, en effet, le revêtement $(p|\hat{V} \times id) : \hat{V} \times R^{k-1} \longrightarrow V \times R^{k-1} = W'$. Il correspond à l'homomorphisme $\pi_1(V \times R^{k-1}) \longrightarrow Z$ obtenu par la composition :

$$\pi_1(V \times R^{k-1}) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(V) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(W') \longrightarrow Z$$

(où la dernière flèche correspond au revêtement $p : \hat{W}' \longrightarrow W'$). Par suite, ces deux revêtements sont isomorphes, et $\hat{W}'$ est difféomorphe à $\hat{V} \times R^{k-1}$.

3) W <u>est difféomorphe à</u> $\hat{W}'$.

LEMME.- <u>Soit</u> W <u>une variété différentiable homéomorphe à</u> $M \times R^k$, $k \geqslant 2$, <u>où</u> M <u>est une variété topologique compacte connexe sans bord, et soit</u> B <u>un</u> <u>k-disque ouvert de</u> R^k. <u>L'espace</u> $B \times M$ <u>s'identifie à un ouvert de</u> W ; <u>celui-ci (muni de la structure différentiable induite par</u> W) <u>est difféomorphe à</u> W, <u>si</u> $\tilde{K}^0(Z\pi_1(W)) = 0$.

Admettons ce lemme ; soit B un k-disque contenu dans T. La variété $B \times M$ est difféomorphe à W. Soit $\hat{B}$ un k-disque relèvement de B dans le revêtement R^k de T. Pour la même raison $\hat{B} \times M$ est difféomorphe à $\hat{W}'$. Enfin, p induit un difféomorphisme de $\hat{B} \times M$ sur $B \times M$. Ceci achève la démonstration du Théorème 1.

<u>Démonstration du Lemme.</u>

$W - (B \times M)$ est homéomorphe à $S^{k-1} \times M \times R$, et possède donc une structure différentiable $F \times R$ (identifions F et $(F \times 0) \subset W$). Si P est un point de B, il en est de même pour $(B - \{P\}) \times M$, qui est difféomorphe à $F' \times R$. Soit U la sous-variété de W bordée par F et F', U est un h-cobordisme entre F et F'. Il n'y a pas de difficulté à rétracter U sur F ou F'. Soit $A = (B \times M) - U$;

c'est l'intérieur d'une variété de bord F' .

A <u>est difféomorphe à</u> $B \times M$: $(B \times M) - A$ est en effet difféomorphe à $F' \times [0,1[$; il suffit alors d'appliquer le théorème d'unicité des voisinages tubulaires.

$A \cup (U - F)$ <u>est difféomorphe à</u> W , pour la même raison.

A <u>est difféomorphe à</u> $A \cup (U - F)$: encore pour la même raison, et parce que $(U - F)$ est difféomorphe à $F' \times [0,1[$ d'après un théorème classique sur les h-cobordismes (voir [2]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. CARTAN - Séminaire, 9e année (1956/57). Exposés 1 et 4.

[2] M. KERVAIRE - Le théorème de Barden-Mazur-Stallings. Séminaire G. de Rham 1963/64, Lausanne.

[3] M. KERVAIRE et J. MILNOR - Groups of homotopy-spheres (Part 1), Ann. of Math. Vol. 77 (1963), 504-537.

[4] J. MILNOR - Microbundles. Topology, Vol. 3 supp. 1 (juillet 64), 53-80.

[5] J. MILNOR et J. MOORE - On the structure of Hopf algebras. Ann. of Math. Vol. 81 (1965), 211-264.

[6] S. P. NOVIKOV - Topological invariance of rational Pontrjagin classes. Dokl. Akad. Nauk URSS, 163 (1965), 298-300.

[7] V. ROHLIN et A. ŠVARČ - Combinatorial invariance of the Pontrjagin classes. Dokl. Akad. Nauk URSS, 114 (1957), 490-493.

[8] J.-P. SERRE - Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. Ann. of Math. Vol. 58 (1953), 258-294.

[9] L. SIEBENMANN - The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five. Thèse Princeton (multigraphié).

[10] R. THOM - Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Vol. 69 (1952), 109-182.

[11] R. THOM - Les classes caractéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées. Symp. Intern. de Top. alg. (Mexico 1956), 54-67.

[12] C. T. C. WALL - Finiteness conditions for CW-complexes. Ann. of Math. Vol. 81 (1965), 56-69.

-:-:-:-

ERRATA

<u>Page 304-06</u> - Lignes 2 et 3 après le diagramme, remplacer "c'est la somme de Whitney...et du fibré trivial de rang k." par "c'est l'image réciproque $p^*(\xi \oplus T(S^n))|W$ de la somme de Whitney de ξ et du fibré tangent à S^n."

Ligne 5, remplacer "et d'un fibré trivial." par "et d'un fibré stablement trivial."

<u>Pages 304-12 et 304-14</u> - Dans les lemmes, ajouter l'hypothèse "$\dim(W) \geqslant 6$."

-:-:-:-