SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PHILIPPE COURREGE

Problèmes aux limites elliptiques et principe du maximum

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. nº 302, p. 367-384
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__367_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
18e année, 1965/66, n° 302

Février 1966

PROBLEMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES ET PRINCIPE DU MAXIMUM.

par Philippe COURREGE

Reprenant un résultat de Wentzel (voir Wentzel [9] et Ueno [7]), on décrit, relativement à un opérateur elliptique du second ordre à coefficients continus, les problèmes aux limites donnant lieu au principe du maximum (voir en 0.5 ci-dessous). Pour un exposé plus complet, on renvoie à [2] .

§0 - Position du problème.

0.1- Dans toute la suite, on désigne par M une variété à bord compacte et connexe de classe C^∞ et de dimension n $(n \geq 1)$, et par ∂M son bord (supposé non vide).

On ne considère que des cartes locales (U,X) de M pour lesquelles $X(U) \subset \overline{R^{n+}} = \{z \mid z \in R^n \text{ et } z^1 \geq 0\}$ de telle sorte que, au voisinage du bord, c'est la coordonnée X^1 qui le définit : $x \in U \setminus \partial M \Longleftrightarrow x \in U$ et $X^1(x) > 0$.

Les espaces $C(M) = C^0(M)$ et $C(\partial M) = C^0(\partial M)$ sont toujours munis de la norme uniforme $\| \ \|_\infty$.

On désigne, par ailleurs, par P un opérateur différentiel du second ordre sur M à coefficients réels et continus : ainsi P applique $C^2(M)$ dans $C(M)$. Notant Π la partie principale d'ordre 2 de P, on fait, une fois pour toute ici, sur P les deux hypothèses suivantes :

(A) P est fortement elliptique en ce sens que, pour chaque $x \in M$, et chaque $\omega \in T_x^*(M)$ (espace cotangent en x à M),

$$\omega \neq 0 \Longrightarrow \Pi_x(\omega,\omega) > 0$$

(B) La fonction continue $a = -P1$ est ≥ 0 sur M.

0.2.- On appellera <u>domaine de résolution</u> tout sous espace vectoriel $\underline{U}$ de l'espace $C^2(M)$, <u>dense dans $C(M)$</u> (pour la topologie de la norme uniforme). <u>Le problème aux limites</u> (homogène) relatif à $\underline{U}$ et à P consiste alors en l'étude de l'opérateur non borné sur $C(M)$ (que l'on notera $(\underline{U},P)$) obtenu en prenant la restriction de P à $\underline{U}$.

En particulier, on dira que $\underline{U}$ <u>est riche par rapport à</u> P si,

(R) pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda - P$ applique $\underline{U}$ sur un sous espace dense de $C(M)$.

0.3.- On appellera <u>opérateur frontière</u> toute application linéaire Γ de $C^2(M)$ dans l'espace $B(\partial M)$ des fonctions numériques boréliennes bornées sur ∂M.

On dira qu'un tel opérateur Γ est <u>consistant</u>, si

(C) pour tout $x \in \partial M$, il existe $u \in C^2(M)$ tel que $\Gamma u(x) \neq 0$.

On dira que Γ est (de type) <u>local</u> si,

(L) pour tout $u,v \in C^2(M)$, et tout ouvert U de ∂M $(U \cap \partial M \neq 0)$,
$u(y) = v(y)$ pour tout $y \in U \Longrightarrow \Gamma u(x) = \Gamma v(x)$ pour tout $x \in U \cap \partial M$.

On dira que Γ est (de type) <u>quasi local</u> si,

(QL) pour tout $u,v \in C^2(M)$ et tout ouvert U de M <u>contenant</u> ∂M,
$u(y) = v(y)$ pour tout $y \in U \Longrightarrow \Gamma u(x) = \Gamma v(x)$ pour tout $x \in \partial M$.

Pour chaque opérateur frontière Γ, on posera,

$$(0.2) \qquad \underline{U}_\Gamma = \{u \mid u \in C^2(M) \text{ et } \Gamma u = 0\}.$$

<u>Exemple</u>. <u>Le problème aux dérivées obliques</u> : Si, on pose,

$\Gamma u = \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma . \gamma^o u$ (1) $(u \in C^2(M))$, où n est un champ de vecteurs sur ∂M strictement dirigé vers l'extérieur et σ une fonction $\geqq 0$ sur ∂M, tous deux assez réguliers, $\underline{U}_\Gamma$ est un domaine de résolution riche par rapport à P (2).

<u>Remarque</u> Par contre, le <u>problème de Dirichlet</u> ne rentre pas dans le cadre étudié ici, puisque $\underline{U}_{\gamma o} = \{u \mid u \in C^2(M) \text{ et } \gamma^o u = 0\}$ n'est pas dense dans $C(M)$.

0.4.- Si $\underline{U}$ est un domaine de résolution, on dira que P <u>satisfait au principe du maximum sur</u> $\underline{U}$, si,

(M) pour tout $u \in \underline{U}$, et tout $x \in M$,

$$(0.3) \qquad u(x) = \operatorname{Sup} u \geqq 0 \Longrightarrow Pu(x) \leqq 0 \quad (3)$$

---

(1) $\gamma^o u$ désignant la restriction de u à δM

(2) Voir Hörmander [3] p. 265, ou Ladyzenskaya [4] p. 163

(3) $\operatorname{Sup} u = \operatorname{Sup}_{x \in M} u(x)$.

0.5 - L'objet de cet exposé est alors, d'une part, de montrer (voir en 2.4) que tout domaine de résolution riche par rapport à P et sur lequel P satisfait au principe du Maximum [1] est contenu dans un domaine de résolution de la forme $\underline{U}_\Gamma$, où Γ appartient à une classe d'opérateurs frontière consistants qui sera décrite au §2 ci-dessous ; d'autre part, et inversement, de montrer que pour certains de ces opérateurs Γ les propriétés requises pour le domaine $\underline{U}_\Gamma$ sont effectivement satisfaites (voir en 3.3).

§1. Principe du maximum et semi groupes de Feller.

1.1- Désignant par E un espace compact, un semi groupe de Feller sur l'espace de Banach $C(E)$ est un semi groupe $(N_t)_{t\geq 0}$ $(N_o = 1)$ d'opérateurs linéaires bornés sur $C(E)$ $(N_t N_s = N_{t+s}\ ,\ t,s\geq 0)$, fortement continu $(\lim_{t\downarrow o} ||N_t f-f||_\infty = 0 \quad \forall f \in C(E))$ et tel que, pour tout $t \geq 0$

(1.1) $\quad f \in C(E)$ et $0 \leq f \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq N_t f \leq 1.$

Ceci étant, voici une forme du Théorème de Hille Yosida utile ici :

THÉORÈME de Hille-Yosida-Ray. Soit $(\underline{D}, D)$ un opérateur linéaire (non borné) sur $C(E)$ préfermé et de domaine $\underline{D}$ dense tel que,

1) Pour chaque $\lambda > 0$, $(\lambda-D)(\underline{D})$ est dense dans $C(E)$,

2) Si $u \in \underline{D}$ est telle que $\operatorname{Sup} u > 0$, il existe au moins un point $x \in E$ tel que $u(x) = \operatorname{Sup} u$ et $Du(x) \leq 0$.

Alors il existe un semi groupe de Feller (N_t) sur $C(E)$, et un seul, dont le générateur infinitésimal $(\underline{D}_A, A)$ coïncide avec la fermeture de l'opérateur $(\underline{D}, D)$.

On va déduire ce résultat du Théorème classique de Hille-Yosida : D'abord l'hypothèse (2) entraîne que, si $\lambda > 0$, $u \in \underline{D}$ et $f = \lambda u - Du$,

(1.2) $\qquad -(\inf f)^- \leq \lambda u \leq (\sup f)^+ .$

---

(1) D'après le principe du maximum élémentaire (Lemme A1-1, Appendice 1) la relation (0.3) est satisfaite pour tout $x \in M \setminus \partial M$. La question est donc de savoir pour quels $\underline{U}$ elle l'est aussi pour $x \in \partial M$.

En effet, si, par exemple, $\inf u < 0$ et $\sup u > 0$, il existe, d'après (2), $x_o \in E$ et $x_1 \in E$ tels que,

$$u(x_o) = \sup u \quad , \quad u(x_1) = \inf u \quad , \quad Du(x_o) \leqq 0 \quad \text{et} \quad Du(x_1) \geqq 0 \ ; \text{ et}$$

on a, pour $y \in E$,

$$\inf f \leqq f(x_1) \leqq f(x_1) + Du(x_1) = \lambda u(x_1) \leqq \lambda u(y), \text{ et}$$

$$\lambda u(y) \leqq \lambda u(x_o) = f(x_o) + Du(x_o) \leqq f(x_o) \leqq \operatorname{Sup} f.$$

De (1.2) et de l'hypothèse (1), il résulte ensuite que, pour chaque $\lambda > 0$, il existe un opérateur <u>positif</u> V_λ de $C(E)$ dans lui-même, et un seul, tel que

$$||V_\lambda|| \leqq \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V_\lambda(\lambda - D)u = u \quad \text{pour tout} \quad u \in \underline{D}$$

Désignant enfin par $(\hat{\underline{D}}, \hat{D})$ la fermeture de l'opérateur $(\underline{D}, D)$, on vérifie sans difficulté que, pour chaque $\lambda > 0$,

(1.4) $\quad V_\lambda \ (\lambda - \hat{D})u = u$ pour tout $u \in \hat{\underline{D}}$, et

(1.5) $\quad V_\lambda \ f \in \hat{\underline{D}}$ et $(\lambda - \hat{D})V_\lambda f = f$ pour tout $f \in C(E)$.

Le théorème de Hille-Yosida appliqué à l'opérateur fermé $(\hat{\underline{D}}, \hat{D})$ et à la famille $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$ permet de conclure.

CQFD.

1.2- Le résultat suivant exprime alors que les domaines de résolution qui sont en cause ici (Voir en 0.5), sont exactement ceux sur lesquels P coïncide avec le générateur infinitésimal d'un semi groupe de Feller :

<u>THÉORÈME</u>. Soit $\underline{U}$ un domaine de résolution riche par rapport à P (1). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(M) P satisfait au principe du Maximum sur $\underline{U}$ (2).

(F) Il existe un semi-groupe de Feller $(N_t)_{t \geqq 0}$ sur l'espace $C(M)$ dont le générateur infinitésimal coïncide avec la fermeture (dans $C(M)$) de l'opérateur $(\underline{U}, P)$.

---

(1) Voir en 0.2

(2) Voir en 0.4

$(F) \Longrightarrow (M)$ résulte immédiatement de la propriété (1.1) d'un semi-groupe de Feller. $(M) \Longrightarrow (F)$ est conséquence du théorème de Hille-Yosida-Ray (voir en 1.1), compte tenu de ce que l'opérateur $(\underline{U},P)$ est préfermé dans $C(M)$ comme $(C^2(M),P)$.

Cette dernière propriété se déduit comme suit (1) du principe du maximum élémentaire (Lemme A1-1, Appendice 1) : Soit (u_n) une suite de fonctions de $C^2(M)$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} Pu_n = g$; il suffit de montrer que $g(x) = 0$ pour chaque $x \in M \setminus \partial M$. Raisonnant par l'absurde, soient $x \in M\setminus\partial M$ tel que $g(x) > 0$, (U,χ) une carte locale de M au voisinage de x $(x \in U \subset M \setminus \partial M)$, et $\psi \in C^2(M)$ telle que $\psi(y) = |\chi(y)-\chi(x)|^2$ pour y assez voisin de x. Désignant par P_o l'opérateur différentiel $u \to Pu-Pl.u$, on note que $P_o 1 = 0$, $||P_o\psi||_\infty > 0$, et $\lim_{n\to\infty} P_o U_n = g$. Il résulte alors de l'hypothèse sur g, l'existence de $\varepsilon > 0$, $r > 0$ et d'un entier n_o tels que, si on pose $u'_n = u_n - \frac{\varepsilon}{||P_o\psi||_\infty}\psi$, $P_o u'_n(y) > 0$ et $\psi(y) = |\chi(y)-\chi(x)|^2$, pour $|\chi(y)-\chi(x)| \leqq r$ et $n \geqq n_o$. Il résulte donc du lemme A1 appliqué à P_o que, pour $n \geqq n_o$, $u_n(x) + \frac{\varepsilon r^2}{||P_o\psi||_\infty} < \sup_{|\chi(y)-\chi(x)|=r} u_n(y)$; relation qui contredit la convergence uniforme de la suite (u_n) vers 0.

CQFD.

§2. Opérateurs et condition frontière de Wentzel.

2.1- Opérateurs frontière de Wentzel de type local. Soient :

- α, σ, δ des frontières $\geqq 0$ boréliennes bornées sur ∂M,
- n un champs de vecteurs sur ∂M, borélien borné, et "strictement dirigé vers l'extérieur de M" : autrement dit, pour toute carte locale (U,χ) de M telle que $U \cap \partial M \neq \emptyset$, les fonctions $x \to \langle n_x, d_x\chi^j \rangle$ $(1 \leqq j \leqq n)$ sont boréliennes bornées sur $U \cap \partial M$, et

(2.1) $\langle n_x, d_x^1 \chi \rangle < 0$ pour tout $x \in U \cap \partial M$.

(1) Voir aussi Wentzel [9] Lemme 1.

- B un opérateur différentiel du second ordre sur la variété ∂M, à coefficients réels boréliens bornés [1] ayant les propriétés suivantes :

(2.2) $\qquad Bl = 0$

(2.3) $\qquad \beta_x(\omega,\omega) \geqq 0$ pour tout $x \in \partial M$, et $\omega \in T_x^*(\partial M)$, où β est la partie principale d'ordre 2 de B (On notera que la forme bilinéaire β_x peut être dégénérée et même nulle).

<u>Un opérateur frontière de Wentzel de type local relatif à</u> P est alors, par définition, de la forme,

(2.4) $\qquad \Lambda u = \alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma \circ \gamma^o u - B(\gamma^o u) + \delta \circ \gamma^o Pu \quad (u \in C^2(M))$ [2]

2.2 - On appellera <u>noyau singulier à la frontière</u>, toute application $(x,W) \to N(x,W)$ de $\partial M \times \mathscr{C}_M$ [3] dans $[0,+\infty]$ telle que,

(2.5) pour tout $W \in \mathscr{C}_M$, $N(\circ,W)$ est une fonction borélienne sur ∂M.

(2.6) pour tout $x \in \partial M$, $N(x,\circ)$ est une mesure $\geqq 0$ [4] sur la tribu $\mathscr{C}_M$ telle que $N(x,\{x\}) = 0$ et dont la restriction à la tribu $\mathscr{C}_{M\setminus\{x\}}$ est une mesure de Radon [5]

On dira que N <u>est un noyau singulier (à la frontière) de Wentzel</u> si, pour chaque carte locale (U,χ) de M telle que $U \cap \partial M \neq \emptyset$,

(2.7) $$\sup_{x \in U \cap \partial M} \int_U [\chi^1(y) + \sum_{j=2}^{n} (\chi^j(y) - \chi^j(x))^2] \, N(x,dy) < +\infty \quad (6) .$$

[La formule de Taylor appliquée aux fonctions χ^i $(1 \leqq i \leqq n)$ permet de vérifier l'invariance de (2.7) par changement de carte locale].

On dira que N est <u>quasi local</u>, si $N(x, M \setminus \partial M) = 0$ pour tout $x \in \partial M$.

2.3 - <u>Un opérateur frontière de Wentzel de type intégral</u> est alors un opérateur

---

(1) Autrement dit, B applique $C^2(\partial M)$ dans $B(\partial M)$.

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial n}(x) = \langle n_x, d_x u \rangle (x \in \partial M)$; et $\gamma^o u$ est la restriction de u à ∂M.

(3) $\mathscr{C}_X$ désigne la tribu borélienne de l'espace topologique X.

(4) pas nécessairement finie sur les compacts au voisinage de x.

(5) $N(x,K) < +\infty$ pour tout compact K de M tel que $x \notin K$.

(6) Avec la convention sur (U,χ) faite en (0.1) : $\chi^1(y) > 0$ si $y \in U \setminus \partial M$, et $\chi^1(y) = 0$ si $y \in U \cap \partial M$.

frontière [1] S pour lequel, d'une part

(2.8) $$S\,1 \geqq 0 \quad ;$$

d'autre part, il existe un noyau singulier de Wentzel N tel que,

(W_1) pour tout $x \in \partial M$, et tout $u \in C^2(M)$ à support dans $M \setminus \{x\}$,

(2.9) $$Su(x) = -\int_M u(y)N(x,dy).$$

(W_2) pour toute carte locale (U,χ) de M telle que $U \cap \partial M \neq \emptyset$, il existe des fonctions numériques boréliennes bornées, $\sigma_\chi, \sigma_\chi^2, \ldots, \sigma_\chi^n$ sur $U \cap \partial M$ telles que, pour tout $x \in U \cap \partial M$, et tout $u \in C^2(M)$ à support dans U, on ait,

$$Su(x) = \sigma_\chi(x)u(x) + \sum_{j=2}^{n} \sigma_\chi^j(x) \frac{\partial u}{\partial \chi^j}(x)$$

(2.10) $$- \int_U \Big[u(y)-u(x) - \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial u}{\partial \chi^j}(x)\,(\chi^j(y)-\chi^j(x))\Big] N(x,dy)\,. \quad [2]$$

Le noyau singulier N, qui est entièrement déterminé par la donnée de S d'après (2.6) et (2.9), est appelé le noyau singulier de l'opérateur S. Pour que S soit quasi-local, il faut et il suffit que son noyau singulier le soit, et S est alors de la forme $u \to S^*(\gamma^o u)$ où S^* est une application linéaire de $C^2(\partial M)$ dans $B(\partial M)$.

2.4 - Un opérateur frontière de Wentzel relatif à P est, par définition, un opérateur frontière L de la forme $L = \Lambda + S$, où Λ est un opérateur de Wentzel de type local relatif à P, et S un opérateur de Wentzel de type intégral. Ceci étant :

---

(1) Voir en 0.3

(2) La formule de Taylor appliquée à u jusqu'à l'ordre 2 assure que cette intégrale a un sens, compte tenu de la propriété (2.7) de N.

THÉORÈME. Soit $\underline{U}$ un domaine de définition riche par rapport à P [1].
Alors, si P satisfait au principe du maximum sur $\underline{U}$ [2], il existe un opérateur frontière de Wentzel L relatif à P et consistant [3], pour lequel

(2.11) $\quad u \in \underline{U} \Longrightarrow Lu = 0 \quad$ (autrement dit, $\underline{U} \subset \underline{U}_L$).

2.5. Démonstration du Théorème 2.4. Grâce au Théorème 1.2, on est ramené à établir le résultat suivant qui précise la "mesurabilité" de la condition obtenue par Wentzel (voir [9] Théorème 1) :

THÉORÈME. Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de Feller sur $C(M)$. Il existe un opérateur frontière de Wentzel L relatif P et consistant tel que, pour tout $x \in \partial M$, et tout $u \in C^2(M)$,

(2.12) $$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (N_t u(x) - u(x)) = Pu(x) \Longrightarrow Lu(x) = 0.$$

En particulier, si $(\underline{D}_A, A)$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe (N_t), on a ,

(2.13) $\quad u \in \underline{D}_A \cap C^2(M)$ et $Au = Pu \Longrightarrow Lu = 0.$

Voici les grandes lignes d'une démonstration, pour plus de détails on renvoie à [2] :

α) On désigne par (E_k) une partition finie de ∂M formée d'ensembles boréliens et, pour chaque k, par χ_k une application de classe C^∞ de M dans R^{n+}, telle que

(2.14) il existe un ouvert U_k de M, contenant E_k et tel que (U_k, χ_k) soit une carte locale de M.

(2.15) $$\chi_k^1(y) + \sum_{j=2}^{n} (\chi_k^j(y) - \chi_k^j(x))^2 > 0 \text{ pour tout } x \in E_k \text{ et } y \in M \setminus \{x\} .$$

On va déterminer L sous la forme suivante : pour chaque $u \in C^2(M)$, chaque k, et chaque $x \in E_k$,

---

(1) Voir en 0.2

(2) Voir en 0.4

(3) Voir en 0.3

$$Lu(x) = -\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_k^1}(x) - \sum_{i,j=2}^{n} \beta^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^i \partial x_k^j}(x) + \delta(x)Pu(x)$$

$$+ \sigma(x)u(x) + \sum_{j=2}^{n} \sigma^j(x)\frac{\partial u}{\partial x^j}(x)$$

$$-\int_M \Big[u(y)-u(x) - \sum_{j=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k^j}(x)\,(x_k^j(y) - x_k^j(x))\Big]\, N(x,dy),$$

où N est un noyau singulier de Wentzel, et où $\alpha,\sigma,\delta,\sigma^j$ $(2 \leqq j \leqq n)$, β^{ij} $(2 \leqq i,\ j \leqq n)$ sont des fonctions numériques sur ∂M, boréliennes bornées de telle sorte que, pour tout $x \in \partial M$,

$$(2.16)\begin{cases} \alpha(x) \geqq 0,\ \sigma(x) \geqq 0,\ \delta(x) \geqq 0, \quad \beta^{ij}(x) = \beta^{ji}(x) \quad (2 \leqq i,\ j \leqq n) \text{ et} \\ \sum_{i,j=2}^{n} \beta^{i,j}(x)\xi^i\xi^j \geqq 0 \quad \text{pour tout} \quad (\xi^i) \in R^{n-1} \end{cases}$$

$$(2.17)\begin{cases} \text{si } \sigma(x) = \delta(x) = \sigma^j(x) = 0 \ (2 \leqq j \leqq n) \text{ et } N(x,.) = 0, \text{ alors} \\ \alpha(x) + 2\sum_{i=2}^{n} \beta^{ii}(x) = 1 \end{cases}$$

β) Pour chaque $u \in C^2(M)$, $x \in E_k$, et $t > 0$, on écrit,

$$(2.18)\begin{cases} \frac{1}{t}(N_t u\,(x) - u(x)) = -\sigma_t(x)u(x) - \sum_{j=2}^{n} \sigma_t^j(x)\frac{\partial u}{\partial x_k^j}(x) \\ \qquad + \ell_t(x)\int_{M\setminus\{x\}} \tilde{u}\,(x,y)\, R_t(x,dy)\ , \quad \text{où on a posé,} \end{cases}$$

$$\sigma_t(x) = \frac{1}{t}\,(1-N_t(x,M)), \quad \sigma_t^j(x) = -\frac{1}{t}\int_M (x_k^j(y) - x_k^j(x))\, N_t\,(x,dy)$$

$$\ell_t(x) = \frac{1}{t}\int_M \Big[x_k^1(y) + \sum_{j=2}^{n}(x_k^j(y) - x_k^j(x))^2\Big]\, N_t\,(x,dy) \quad \text{et,}$$

$$\tilde{u}(x,y) = \frac{u(y) - u(x) - \sum_{j=2}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k^j}(x)\,(x_k^j(y) - x_k^j(x))}{x_k^1\,(y) + \sum_{j=2}^{n}(x_k^j\,(y) - x_k^j(x))^2} \quad (y \neq x) \quad ;$$

et où $R_t(x,\cdot)$ est la mesure $\geqq 0$, de masse 1 sur M et ne chargeant pas le point x, définie par

$$R_t(x,W) = \frac{1}{t\ell_t(x)} \int_W \left[\chi_k^1(y) + \sum_{j=2}^{n} (\chi_k^j(y) - \chi_k^j(x))^2\right] N_t(x,dy). \quad (1)$$

On pose, en outre, pour $x \in E_k$, $y \in M\setminus\{x\}$,

$$w(x,y) = \frac{\chi_k^1(y)}{\chi_k^1(y) + \sum_{j=2}^{n} (\chi_k^j(y) - \chi_k^j(x))^2}, \text{ et } \xi^{ij}(x,y) = \frac{(\chi_k^i(y)-\chi_k^i(x))(\chi_k^j(y)-\chi_k^j(x))}{\chi_k^1(y) + \sum_{j=2}^{n} (\chi_k^j(y)-\chi_k^j(x))^2}$$

$(2 \leqq i,j \leqq n)$; et on note que, $0 \leqq w(x,y) \leqq 1$, $-1 \leqq \xi^{ij}(x,y) \leqq 1$,

(2.19) $w(x,y) + \sum_{i=2}^{n} \xi^{ii}(x,y) = 1$, et que la matrice $\xi(x,y) = (\xi^{ij}(x,y))$ est $\geqq 0$.

γ) Désignant alors par $\mathfrak{M}$ l'espace compact des matrices carrées $(n-1)\times(n-1)$ symétriques $\geqq 0$ et à coefficients dans $[-1,1]$, on considère, pour chaque $x \in E_k$, l'injection $\phi_x : y \to (y,w(x,y), \xi(x,y))$ de $M\setminus\{x\}$ dans le sous espace compact H de $M \times [0,1] \times \mathfrak{M}$ formé des $h = (y,w,\xi)$ tels que (2.20) $W + \sum_{i=2}^{n} \xi^{ii} = 1$. La fonction $\tilde{u}(x,\phi_x^{-1}(\cdot))$ sur $\phi_x(M\setminus\{x\})$ transportée par ϕ_x de la fonction $\tilde{u}(x,\cdot)$, se prolonge en une fonction continue $\hat{u}(x,\cdot)$ sur l'adhérence H_x de $\phi_x(M\setminus\{x\})$ dans H : en effet, en vertu de la formule de Taylor, lorsque $\phi_x(y)$ tend vers le point $h = (x,w,\xi)$ de $H_x\setminus\phi_x(M\setminus\{x\})$, $\tilde{u}(x,y)$ tend vers la limite

(2.21) $$\hat{u}(x,h) = w \frac{\partial u}{\partial \chi_k^1}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^{n} \xi^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial \chi_k^i \partial \chi_k^j}(x) \quad (2) .$$

Ceci étant, on pose $\theta_t(x) = \sigma_t(x) + \sum_{j=2}^{n} |\sigma_t^j(x)| + \ell_t(x)$ $(x \in E_k,\ t > 0)$,

$E_k' = \{x \mid x \in E_k \text{ et } \liminf_{m\to\infty} \theta_{1/m}(x) > 0\}$, et on désigne par $\hat{R}_t(x,\cdot)$ la mesure de Radon $\geqq 0$ sur H image de $R_t(x,\cdot)$ par ϕ_x. Les coefficients de L annoncés en α) peuvent alors être obtenus comme suit :

---

(1) Si $\ell_t(x) = 0$, on pose $R_t(x,\cdot) = \varepsilon_{y_0}$; $(y_0 \in M\setminus\partial M)$.

(2) C'est ici qu'apparaissent le terme transversal $\frac{\partial}{\partial n}$ et l'opérateur B sur ∂M.

Si $x \in E_k \setminus E'_k$, on pose simplement $Lu(x) = Pu(x)$.

Si $x \in E'_k$, extrayant au moyen du Lemme de mesurabilité (2) une suite $(t_p(x))$ telle que $\lim_{p\to\infty} \theta_{t_p(x)}(x) = \theta(x) > 0$, et divisant les deux membres de (2.18) par $\theta_{t_p(x)}(x)$, on obtient une relation de la forme

$$(2.22)\quad \begin{cases} \tilde{\delta}_p(x) \dfrac{1}{t_p(x)} (N_{t_p(x)}u(x) - u(x)) = - \tilde{\sigma}_p(x)u(x) - \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \tilde{\sigma}^j_p(x) \dfrac{\partial u}{\partial x^j_k}(x) \\ \qquad\qquad + \tilde{\ell}_p(x) \displaystyle\int_H \hat{u}(x,h)\, \tilde{R}_p(x,dh), \qquad \text{où} \end{cases}$$

les fonctions $\tilde{\delta}_p$, $\tilde{\sigma}_p$, $\tilde{\sigma}^j_p$, $\tilde{\ell}_p$ et $x \to \tilde{R}_p(x,.)$ sont <u>boréliennes</u> sur E'_k (cette dernière lorsqu'on munit l'espace compact métrisable $\mathcal{M}^1(H)$ de la tribu borélienne associée à la topologie vague). Il reste alors à appliquer une nouvelle fois le Lemme de mesurabilité (2) aux suites $(\tilde{\delta}_p)$, $(\tilde{\sigma}_p)$, $(\tilde{\sigma}^j_p)$, $(\tilde{\ell}_p)$ et $(\tilde{R}_p)$ à valeurs respectivement dans les espaces compacts métrisables $[0,+\infty]$, $[0,1]$, $[-1,1]$, $[0,1]$ et $\mathcal{M}^1(H)$; puis à répartir la mesure $\tilde{R}(x,.)$ obtenue sur H entre sa partie sur $\phi_x(M\setminus\{x\})$ qui donne $N(x,.)$ par image inverse et normalisation, et sa partie sur $H_x\setminus\phi_x(M\setminus\{x\})$ qui donne les coefficients α et β^{ij} en intégrant la relation (2.21) ; le caractère consistant de l'opérateur obtenu résultant de (2.17), elle-même conséquence de (2.19) et de la définition de H (relation (2.20)). Enfin, pour chaque $u \in C^2(M)$ et $x \in \delta M$ tels que $\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(N_t u(x)-u(x)) = Pu(x)$, on obtient la condition frontière $Lu(x)$ par passage à la limite dans (2.22) lorsque $p\to\infty$.

CQFD

<u>Remarque</u> La démonstration précédente subsiste si on substitue à P un opérateur linéaire quelconque de $C^2(M)$ dans $C(M)$; en particulier un de ces opérateurs intégro-différentiels qui constituent les générateurs infinitésimaux des semi-groupes de Feller sur M dont le domaine de définition contient "suffisamment" de fonctions de classe C^2 (Voir [2] à ce sujet).

---

(2) Voir l'appendice 2.

§3 - Propriété des domaines de résolution définis par certains opérateurs de Wentzel de classe $C^{o,\mu}$.

3.1- Opérateurs de classe $C^{r,\mu}$. Soient r un entier ≥ 0 et $0 < \mu < 1$. On désigne par $C^{r,\mu}(M)$ (resp $C^{r,\mu}(\partial M)$) l'espace des fonctions de classe C^r sur M (resp ∂M) dont les dérivées d'ordre r (dans chaque carte locale) vérifient une condition de Hölder d'exposant μ, muni de la topologie d'espace de Frechet "Banachisable" associée à l'une quelconque des normes Hölderiennes $\| \ \|_{r,\lambda}$ (1).

On dira que P est de classe $C^{r,\mu}$ s'il applique $C^{r+2,\mu}(M)$ dans $C^{r,\mu}(M)$. Si Γ est un opérateur frontière, on dira que Γ est de classe $C^{r,\mu}$ s'il applique $C^{r+2,\mu}(M)$ dans $C^{r,\mu}(\partial M)$.

3.2- On dira qu'un opérateur de Wentzel Λ de type local est standard, s'il est de la forme,

$$\Lambda u = \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma\gamma^o u - B(\gamma^o u) + \delta\gamma^o Pu \qquad (u \in C^2(M)),$$ où le champ de vecteurs n sur ∂M (strictement dirigé vers l'extérieur de M, voir en 2.1) est de classe C^1 au moins.

Pour qu'un tel opérateur soit de classe $C^{o,\mu}(0 < \mu < 1)$ (2), il faut et il suffit que σ, B et δ le soient ; en outre, une fois n donné, σ, B et δ sont déterminés de façon unique par le domaine $\underline{U}_\Lambda$ (3).

On dira, par ailleurs, que Λ est non dégénéré, si B est un opérateur fortement elliptique sur ∂M (autrement dit si, avec les notations de 2.1, $\beta_x(w,w) > 0$ pour tout $x \in \partial M$ et $w \in T_x^*(\partial M)$).

---

(1) Voir Miranda [6] p.2 et Ladyzenskaya [4] p. 21.

(2) Voir en 3.1.

(3) Démonstration utilisant un collier de M de façon analogue à celle du lemme 3.6 ci-dessous.

3.3- Un résultat complet pour des opérateurs de Wentzel standards non dégénérés et quasi locaux de classe $C^{o,\mu}$:

THÉORÈME - On suppose donnés un opérateur frontière de Wentzel Λ de type local standard relatif à P, et un opérateur de Wentzel S de type intégral. On suppose que,

(1) Λ est non dégénéré et S quasi local.

(2) Il existe un nombre μ , $0 < \mu < 1$ tel que P et Λ soient de classe $C^{o,\mu}$, et S applique continuement $C^2(M)$ dans $C^{o,\mu}(\partial M)$.

Alors, si $L = \Lambda + S$, et $\underline{U}_L = \{ u | u \in C^2(M)$ et $Lu = 0\}$,

(a) $\underline{U}_L$ est dense dans $C(M)$.

(b) $\underline{U}_L$ est riche par rapport à P.

(c) P satisfait au principe du maximum sur $\underline{U}_L$.

Sous les conditions de régularité qu'il comporte, ce résultat apparaît comme une réciproque du théorème 2.4. Il entraîne, en vertu du théorème 1.2, l'existence d'un semi-groupe de Feller dont le générateur infinitésimal coïncide avec la fermeture de $(\underline{U}_L, P)$. En voici une démonstration :

3.4- $\underline{U}_L$ est riche par rapport à P :

THÉORÈME - On suppose que [1],

(I) Λ est non dégénéré et les fonctions L1 et P1 ne sont pas toutes deux identiquement nulles.

(II) Λ , S et P sont de classe $C^{o,\mu}(0 < \mu < 1)$, et S est complètement continue de $C^{2,\mu}(M)$ dans $C^{o,\mu}(\partial M)$.

Alors l'application $u \to (Pu, Lu)$ est un isomorphisme (d'espaces de Frechet) de $C^{2,\mu}(M)$ sur $C^{o,\mu}(M) \times C^{o,\mu}(\partial M)$.[2]

Démonstration - α) L'injectivité de $u \to (Pu, Lu)$ va résulter de

(3.2) $u \in C^2(M)$, $Lu = 0$ et $Pu \geqq 0 \implies u \leqq 0$.

Raisonnant par l'absurde, on suppose que $u \in C^2(M)$ est telle que

---

(1) Avec les notations du théorème 3.4.

(2) Pour un résultat du même type (mais avec $S = 0$), dans C^∞ ou L^2, voir Hörmander [3] p.264, Lions [5] p.23, et Visik [8].

$Pu \geqq 0$, $Lu = 0$ et $\operatorname{Sup} u > 0$. Si $x \in M$ est tel que $u(x) = \operatorname{Sup} u$, il existe un voisinage ouvert connexe Ω de x tel que $u(y) \geqq 0$, donc aussi $P_o u(y) \geqq a(y)\, u(y) \geqq 0$ pour tout $y \in \Omega$.(1) Le lemme A1-2(2) appliqué à P_o et Ω entraîne alors que u est constant sur Ω : En effet, si $x \in M \setminus \partial M$, c'est exactement l'alinéa 1) du lemme. Si $x \in \partial M$, cela résulte de l'alinéa 2, car, $u(x) = \operatorname{Sup} u \geqq 0$ entraîne que,

$\frac{\partial u}{\partial n}(x) \geqq 0$, $\sigma(x)u(x) - B(\gamma^o u)(x) \geqq 0$, et aussi $Su(x) \geqq 0$ (On le vérifie en tenant compte de la propriété (2.8) de S) ; donc $Pu(x) \geqq 0$ et $Lu(x) = 0$ entraînent que

$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \sigma(x)u(x) = B(\gamma^o u)(x) = \delta(x)\, Pu(x) = 0$, ce qui contredit l'alinéa 2) du lemme, sauf si u est constante dans Ω.

Ainsi, l'ensemble des $x \in M$ tels que $u(x) = \operatorname{Sup} u$ est ouvert dans M, et, puisqu'il est fermé et M connexe, $u = cte = \theta$. Mais alors, on devrait avoir $\theta = \operatorname{Sup} u > 0$, ce qui contredit l'hypothèse sur L1 et P1 et achève d'établir (3.2).

β) Il reste à résoudre, pour $f \in C^{o,\mu}(M)$ et $\phi \in C^{o,\mu}(\partial M)$, le système,

(3.3) $u \in C^{2,\mu}(M)$, $Pu = f$ et $Lu = \phi$.

Pour cela, on désigne par H et G respectivement <u>l'opérateur harmonique et l'opérateur de Green du problème de Dirichlet</u> sur M relatif à P : H applique $C^{2,\mu}(\partial M)$ dans $C^{2,\mu}(M)$, G applique $C^{o,\mu}(M)$ dans $C^{2,\mu}(M)$, et, pour $w \in C^{2,\mu}(M)$ et $g \in C^{o,\mu}(M)$, $PHw = 0$, $\gamma^o Hw = w$, $PGg = -g$ et $\gamma^o Gg = 0$.(3)

Posant, $u = Gf + v$, (3.3) est équivalent à

$$v \in C^{2,\mu}(M),\ Pv = 0 \text{ et } Lv = \phi - LGf.$$

Ainsi, introduisant H, on est ramené à résoudre, pour $\psi \in C^{2,\mu}(\partial M)$;

$$w \in C^{2,\mu}(\partial M),\ -Bw + \frac{\partial}{\partial n} Hw + \sigma w + SHW = \psi.$$

---

(1) $P_o u = Pu - P1.u$

(2) Voir l'appendice 1.

(3) En vertu de la classe $C^{o,\mu}$ de P ; voir Miranda [6] p.128.

On conclut alors en utilisant l'unicité établie en α) et le fait que B, étant elliptique, est un opérateur d'indice 0 de $C^{2,\mu}(\partial M)$ dans $C^{0,\mu}(\partial M)$ et que l'hypothèse faite sur S et les propriétés de continuité de H entraînent que $w \to \frac{\partial}{\partial n} Hw + \sigma w + SHw$ est un opérateur complètement continu de $C^{2,\mu}(\partial M)$ dans $C^{0,\mu}(\partial M)$.

C.Q.F.D.

3.5- <u>Lemme</u>.(1) P satisfait au principe du maximum sur $\underline{U}_L$.(2)

En effet, soient $u \in C^2(M)$ et $x \in M$ tels que $u(x) = \operatorname{Sup} u \geqq 0$, et

(3.4) $Lu(x) = \frac{\partial u}{\partial n}(x) + \sigma(x)u(x) - B(\gamma^o u)(x) + \delta(x)\, Pu(x) + Su(x) = 0.$

D'abord, si $x \in M \setminus \partial M$, on a $Pu(x) = 0$ d'après le lemme A1.1.

Supposant ensuite que $x \in \partial M$, on remarque que,

(3.5) $\frac{\partial u}{\partial n}(x) \geqq 0$, $\sigma(x)\, u(x) - B(\gamma^o u)(x) \geqq 0$, et $Su(x) \geqq 0$, puisque $u(x) = \operatorname{Sup} u \geqq 0$.

Deux cas se présentent alors :

si $\delta(x) > 0$, on obtient $Pu(x) \leq 0$ en portant (3.5) dans (3.4).

si $\delta(x) = 0$, (3.5) et (3.4) impliquent que

(3.6) $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \sigma(x)u(x) - B(\gamma^o u)(x) = Su(x) = 0$; donc, en particulier, que $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0$

Ainsi, si (U,χ) est une carte locale de M au voisinage de x, on a $\frac{\partial u}{\partial \chi^i}(x) = 0$ pour $1 \leqq i \leqq n$. La formule de Taylor appliquée à u, et le fait que $u(x) = \operatorname{Sup} u$, entraînent alors que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \chi^i \partial \chi^j}(x)\, \xi^i \xi^j \leqq 0 \quad \text{pour tout} \quad \xi = (\xi^i) \in R^n \quad \text{tel que } \xi^1 \geqq 0;$$

donc aussi pour tout $\xi \in R^n$. D'où $Pu(x) \leqq 0$.

C.Q.F.D.

3.6- <u>Lemme</u>. Avec les notations, et sous les hypothèses du théorème 3.4, $\underline{U}_L$ est dense dans $C(M)$.

---

(1) Avec les notations du théorème 3.4.

(2) Λ est seulement supposé standard ; la conclusion subsiste même sous la seule hypothèse que $\alpha(x) > 0$ pour tout $x \in \partial M$.

On va utiliser un <u>collier de M</u> : on nomme ainsi un difféomorphisme $y \to (\eta(y), \phi(y))$ d'un voisinage ouvert W de ∂M dans M sur la variété produit $[0,1[\times\partial M$ tel que,

(3.7) $\eta(x) = 0$ et $\phi(x) = x$ pour tout $x \in \partial M$ et $\eta(y) > 0$ pour tout $y \in W \setminus \partial M$.

Si $u \in C^2(M)$, et $x \in \partial M$, on note $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(x)$ les dérivées de u par rapport à η au point x. On peut alors mettre d'une part l'opérateur frontière $u \to \gamma^o Pu$ sous la forme,

(3.8) $\gamma^o Pu = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial}{\partial \tau}(\frac{\partial u}{\partial \eta}) + B_1(\gamma^o u) + \theta \frac{\partial u}{\partial \eta} - a\gamma^o u \qquad (u \in C^2(M))$, où,

<u>sur la variété ∂M</u>, ρ et θ sont des fonctions numériques, avec $\rho(x) > 0$ pour tout $x \in \partial M$, τ est un champ de vecteurs tangent à ∂M, et B_1 un opérateur du second ordre elliptique ayant les propriétés (2.2) et (2.3) (voir en 2.1) ; tous ces termes étant de classe $C^{o,\mu}$ en même temps que P. Et, d'autre part, l'opérateur L sous la forme,

(3.9) $Lu = -\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \sigma\gamma^o u - B(\gamma^o u) + \delta\gamma^o Pu + S(\gamma^o u) \ (u \in C^2(M))$, où $\alpha(x) > 0$ pour tout $x \in \partial M$; α étant de classe C^1, et σ, B, δ de classe $C^{o,\mu}$ en même temps que Λ .

Ceci étant, soit $f \in C^2(M)$ et $\underline{\varepsilon} > 0$; on cherche $u \in C^2(M)$ telle que $Lu = 0$ et $||u - f||_\infty \leq \underline{\varepsilon}$. <u>Puisque S est quasi local</u>, il suffit pour cela de déterminer $v \in C^2(M)$ tel que,

(3.10) $Lv = 0$ et $||\gamma^o v - \gamma^o f||_\infty \leq \underline{\varepsilon}/2$. Ou encore, utilisant le fait que, si $\psi_o \in C^2(\partial M)$, $\psi_1 \in C^1(\partial M)$ et $\psi_2 \in C^o(\partial M)$ il existe $v \in C^2(M)$ tel que $\gamma^o v = \psi_o$, $\frac{\partial v}{\partial \eta} = \psi_1$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = \psi_2$, ainsi que (3.8) et (3.9), de déterminer $\psi_o \in C^2(\partial M)$, $\psi_1 \in C^1(\partial M)$ et $\psi_2 \in C^o(\partial M)$ de telle sorte que, $||\psi_o - \gamma^o f||_\infty \leq \varepsilon/2$,

$\psi_1 = \frac{1}{\alpha}(-B\psi_o + \sigma\psi_o + S\psi_o)$ et $\psi_2 = -\frac{1}{\rho}(\frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} + B_1\psi_o + \theta\psi_1 - a\,\psi_o)$.

Or, pour cela, il suffit, en vertu de l'hypothèse de classe $C^{o,\mu}$ de tous les coefficients, de construire $\psi_o \in C^2(\partial M)$ tel que

$$||\psi_o - \gamma^o f||_\infty \leq \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad -B\psi_o + \sigma\psi_o + S\psi_o \in C^1(\partial M).$$

Choisissant alors un nombre λ_2 tel que $0 < \lambda_2 < \mu = \lambda_1$, l'opérateur $\psi \to (\sigma + 1)\psi + S\psi$ est complètement continu de $C^{2,\lambda_i}(\partial M)$ dans $C^{o,\lambda_i}(\partial M)$ d'après l'hypothèse sur S, donc, B étant elliptique (1), l'opérateur $\psi \to - B\psi + (\sigma+1)\psi + S\psi$ est un isomorphisme (d'espaces de Frechet) de $C^{2,\lambda_i}(\partial M)$ dans $C^{o,\lambda_i}(\partial M)(i=1,2)$. Utilisant enfin le fait que $C^{o,\lambda_1}(\partial M)$ et $C^{\infty}(\partial M)$ ont même adhérence dans $C^{o,\lambda_2}(\partial M)$, on en déduit l'existence de la fonction ψ_o cherchée.

c.q.f.d.

BIBLIOGRAPHIE -

[1] L. BERS, F. JOHN, M. SCHECHTER. Partial differential equations. Lectures in appl Math, interscience Publ. N.Y. 1964.

[2] J.M. BONY, Ph. COURREGE, P. PRIOURET. Problèmes aux limites elliptiques et diffusion sur une variété à bord compacte (à paraître).

[3] L. HÖRMANDER. Linear partial differential operators. Springer 1964 (2° ed).

[4] O.A. LADYZENSKAYA, N.N. OURATZEVA. Equations linéaires et quasi-linéaires de type elliptique. Moscou 1964 (en russe).

[5] J.L. LIONS. Equations différentielles opérationnelles. Springer 1961.

[6] C. MIRANDA. Equazioni alle derivate parziali di tipo ellitico. Springer 1955.

[7] T. Ueno. The diffusions satisfying Wentzel's boundary condition and the Markov process on the boundary I. Proc Jap Acad 36 (1960) p. 533.

[8] I.M. VISIK. Sur les problèmes aux limites généraux pour les équations différentielles elliptiques. Troudi. Mosk. Mat. obv 1, (1952) p. 187.

[9] A.D. WENTZEL. On lateral conditions for multidimentional diffusion processes. Theory of prob and its appl 4 (1959) p. 172.

---

(1) Et de classe $C^{o,\mu}$, donc aussi de classe C^{o,λ_2}.

APPENDICE 1 - Deux formes classiques du principe du maximum.

Avec les notations et hypotèses de 0.2, on suppose que $P1 = 0$.

A1.1 Lemme. Si $u \in C^2(M)$, on a $Pu(x) \leq 0$ en tout point $x \in M \setminus \partial M$ en lequel u atteint un maximum relatif.

A1.2 Lemme. Soient Ω un ouvert connexe de M et $u \in C^2(\Omega)$ telle que $Pu(y) \geq 0$ pour tout $y \in \Omega$. Alors

1) Si $x \in M \setminus \partial M$ est tel que $u(x) = \sup_{y \in \Omega} u(y)$, u est constante dans Ω.

2) Si $x \in \partial M$ est tel que $u(x) = \sup_{y \in \Omega} u(y)$, et si (U, χ) est une carte locale de M au voisinage de x ($x \in U \subset \Omega$), ou bien $\frac{\partial u}{\partial \chi 1}(x) < 0$, ou bien u est constante dans Ω.(1)

APPENDICE 2 - Un lemme de mesurabilité.

Lemme. Soient $(X, \underline{X})$ un espace mesurable, K un espace compact métrisable, $\mathcal{E}_K$ sa tribu borélienne et $(\phi_n)_{n \in N}$ une suite d'applications mesurables de $(X, \underline{X})$ dans $(K, \mathcal{E}_K)$.

Alors il existe une application $\sigma : (p,x) \to \sigma_p(x)$ de $N \times X$ dans N telle que,

1) Pour chaque $p \in N$, et $n \in N$, $\{x \mid x \in X \text{ et } \sigma_p(x) = n\} \in \underline{X}$.

2) Pour chaque $x \in X$, la suite $(\sigma_p(x))_{p \in N}$ est strictement croissante, et

$\lim_{p \to \infty} \phi_{\sigma_p(x)}(x)$ existe dans K.

On construit σ en vérifiant que le procédé diagonal d'extraction de sous suites peut être "rendu mesurable" (ce qui est bien évident vu son caractère purement dénombrable).

---

(1) Pour une démonstration élémentaire, voir [1] p.151.