Séminaire N. Bourbaki

Pierre Cartier

Diviseurs amples

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. n° 301, p. 351-366

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__351_0>

Séminaire BOURBAKI
18e année, 1965/66, n°301 Février 1966

DIVISEURS AMPLES

par Pierre CARTIER

1. Énoncé des résultats.

Soit X une variété algébrique complète([1]) définie sur un corps de caractéristique quelconque, qu'on peut supposer algébriquement clos. Comme X peut avoir des singularités, le mot "diviseur" a le sens défini dans ma thèse [1]. On choisit un tel diviseur D sur X. On dira que D est ample s'il existe un entier $n > 0$ et un plongement projectif de X pour lesquels $n.D$ soit linéairement équivalent à une section hyperplane de X. La notation $D > 0$ signifie que l'indice $[D.C]_X$ est positif pour toute courbe C sur X (cf. N°2, D). Enfin, on dit qu'une variété S est divisorielle si pour tout couple de points distincts s et s' de S, il existe un diviseur positif sur S dont le support contient s mais non s' ; ce sera le cas si S est projective ou non singulière.

THÉORÈME 1. Pour que D soit ample, il faut et il suffit que l'on ait $[D^s.Y]_X > 0$ pour tout entier $s \geqslant 1$ et toute sous-variété Y de X, de dimension s.

Ce critère a été d'abord établi par Nakai [1] dans le cas des surfaces non singulières, puis en toute généralité par Moishezon [6] ; il a été étendu au cas des schémas par Nakai [8] et Kleiman [5].

THÉORÈME 2. Si D est ample, il satisfait à la condition suivante :

([1]) Au sens de Weil, donc en particulier irréductible.

(G) Pour toute sous-variété Y de X, on peut trouver un diviseur E induisant un diviseur positif non nul sur Y, et linéairement équivalent à un multiple n.D de D avec $n > 0$.

Réciproquement, si D satisfait à la condition (G') obtenue en remplaçant l'équivalence linéaire par l'équivalence algébrique dans l'énoncé de (G), c'est un diviseur ample.

Dans le cas des variétés algébriques complexes, la caractérisation des diviseurs amples par la condition (G) est due à Grauert [3].

THÉORÈME 3. Supposons X divisorielle. Pour que D soit ample, il faut et il suffit que, pour tout diviseur E, il existe un entier $m > 0$ avec $E + m.D > 0$.

THÉORÈME 4. Supposons que X soit divisorielle (par exemple non singulière) et que tout diviseur sur X soit de la forme $D' - D''$ avec $D' > 0$ et $D'' > 0$. Alors X est projective.

THÉORÈME 5. Pour que X soit projective, il faut et il suffit que tout sous-ensemble fini de X soit contenu dans un ouvert affine, dont le complémentaire soit le support d'un diviseur positif.

Ces résultats ont été établis par Kleiman dans une thèse faite à Harvard et non encore publiée. Supposons X non singulière ; le complémentaire d'un ouvert affine dans X est le support d'un diviseur positif ; par suite, le théorème 5 résout un problème de Chevalley en prouvant que, si X est non singulière et tout sous-ensemble fini de X contenu dans un ouvert affine, alors X est projective.

2. Préliminaires.

Nos démonstrations utilisent les méthodes de la théorie des faisceaux, selon le modèle bien connu de Serre [9]. Nous allons d'abord rappeler quelques définitions et résultats.

A) Par faisceau, nous entendons un faisceau algébrique cohérent ; le faisceau fondamental d'une variété X est noté $\underline{O}_X$. Si D est un diviseur, la fibre en un point x du faisceau $\underline{O}(D)$ se compose des fonctions rationnelles f telles que le diviseur $(f) + D$ soit positif au voisinage de x. Pour tout faisceau $\underline{F}$, on pose $\underline{F}(D) = \underline{F} \otimes \underline{O}(D)$. Le <u>support</u> d'un faisceau $\underline{F}$ est l'ensemble fermé S composé des x tels que $\underline{F}_x \neq 0$; la <u>dimension</u> de $\underline{F}$ est le maximum des dimensions des composantes irréductibles de S.

B) On dit qu'un faisceau $\underline{F}$ sur X est <u>D-acyclique</u> s'il existe un entier $n_{\underline{F}}$ tel que $\underline{F}(n.D)$ soit engendré par ses sections et ait une cohomologie nulle en dimension $\geqslant 1$, quel que soit $n \geqslant n_{\underline{F}}$.

LEMME 1. <u>Soit</u> D <u>un diviseur sur une variété complète</u> X.

a) <u>Si</u> D <u>est ample, tout faisceau sur</u> X <u>est</u> <u>D-acyclique</u>.

b) <u>Supposons donnée une suite décroissante de faisceaux</u>

$$\underline{F} = \underline{F}_0 \supset \underline{F}_1 \supset \ldots \supset \underline{F}_{j-1} \supset \underline{F}_j \supset \ldots \supset \underline{F}_{m-1} \supset \underline{F}_m = 0 .$$

<u>Si les faisceaux</u> $\underline{F}_{j-1}/\underline{F}_j$ <u>pour</u> $j = 1,\ldots,m$ <u>sont</u> <u>D-acycliques, il en est de même de</u> $\underline{F}$.

La propriété a) n'est qu'une reformulation des résultats de Serre sur la cohomologie de l'espace projectif ; on démontre b) par récurrence sur m, en se ramenant à la situation $\underline{F} \supset \underline{G}$ avec $\underline{G}$ et $\underline{F}/\underline{G}$ des faisceaux D-acycliques ; la suite exacte de cohomologie montre alors que $\underline{F}$ est D-acyclique.

C) Soit $\underline{F}$ un faisceau. Les groupes de cohomologie de X à valeurs dans $\underline{F}$ sont notés $H^i(X,\underline{F})$ ou simplement $H^i(\underline{F})$; la dimension de l'espace vectoriel $H^i(\underline{F})$ sur le corps de base est finie, elle sera notée $h^i(\underline{F})$. Si d est la dimension de X, on a $h^i(\underline{F}) = 0$ pour $i > d$; la caractéristique du faisceau $\underline{F}$ est le nombre

(1) $$\chi(\underline{F}) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i . h^i(\underline{F}) .$$

Il est bien connu que l'on a

(2) $$\chi(\underline{F}) = \chi(\underline{G}) + \chi(\underline{F}/\underline{G})$$

pour tout sous-faisceau $\underline{G}$ de $\underline{F}$.

D) Soient $D_1,\ldots,D_s$ des diviseurs sur X et Y une sous-variété de dimension s de X. L'indice de Kronecker $[D_1\ldots D_s.Y]_X$ est défini par la formule

(3) $$[D_1\ldots D_s.Y]_X = \sum_{t=0}^{s} (-1)^{s-t} \sum_{j_1<\ldots<j_t} \chi(\underline{O}_Y(D_{j_1} + \ldots + D_{j_t})).$$

Le lemme suivant résume les propriétés essentielles de l'indice (cf. [2] et [10]).

LEMME 2. a) L'indice $[D_1\ldots D_s.Y]_X$ est fonction linéaire de chacun des diviseurs D_j et ne dépend que de leurs classes d'équivalence algébrique.

b) On suppose que le diviseur D_s induit un diviseur Δ sur Y. Soient $T_1,\ldots,T_m$ les composantes irréductibles du support de Δ (elles sont de dimension $s-1$). On peut leur attacher des coefficients non nuls $a_1,\ldots,a_m$, ne dépendant que de Δ, et positifs si Δ est positif, et tels que

(4) $$[D_1 \ldots D_s.Y]_X = \sum_{j=1}^{m} a_j.[D_1 \ldots D_{s-1}.T_j]_X .$$

c) On suppose que, pour $j = 1,\ldots,s$, le diviseur D_j induit un diviseur D'_j

sur une sous-variété X' de X contenant Y. On a alors

(5) $$[D_1 \dots D_s.Y]_X = [D'_1 \dots D'_s.Y]_{X'} \quad .$$

d) Soit $f : \bar{X} \to X$ un morphisme surjectif ($\bar{X}$ est une variété complète), et soit $\bar{Y}$ une sous-variété de dimension s de $\bar{X}$. On note $\bar{D}_j$ le diviseur sur $\bar{X}$ image réciproque de D_j par f, et l'on pose $Y = f(\bar{Y})$. Si Y est de dimension $< s$, on a $[\bar{D}_1 \dots \bar{D}_s.\bar{Y}]_{\bar{X}} = 0$; si Y est de dimension s, on a

(6) $$[\bar{D}_1 \dots \bar{D}_s.\bar{Y}]_{\bar{X}} = \delta[D_1 \dots D_s.Y]_X$$

le nombre δ étant le degré de $\bar{Y}$ sur Y.

e) Si X est non singulière, et si le produit d'intersection $D_1 \dots D_s.Y$ est défini, on a $[D_1 \dots D_s.Y]_X = n_1 + \dots + n_p$ où $n_1, \dots, n_p$ sont les multiplicités attachées aux divers points de $S_1 \cap \dots \cap S_s \cap Y$ (on note S_j le support de D_j).

f) Si $\underline{F}$ est un faisceau de dimension s, il existe un polynôme P de degré $\leqslant s$ tel que $\chi(\underline{F}(n.D)) = P(n)$ pour tout entier n. Lorsque $\underline{F} = \underline{O}_Y$, le coefficient du monôme de degré s dans P est égal à $[D^s.Y]_X/s!$ (avec la convention $[D^0,Y]_X = 1$ si $s = 0$).

3. Démonstration des théorèmes 1 et 2.

Supposons D ample ; on peut supposer que X est plongée dans un espace projectif et que les sections hyperplanes de X sont linéairement équivalentes à $n.D$ (avec $n > 0$). La sous-variété Y étant donnée, choisissons un point a de Y et une section hyperplane E de X ne passant pas par a. Il est clair que E répond aux conditions imposées dans (G).

Il est clair que (G) entraîne (G').

Supposons maintenant que D satisfasse à (G'). Montrons par récurrence sur la dimension s de Y que l'on a $[D^s.Y]_X > 0$. Choisissons E de manière à satisfaire à (G'). D'après le lemme 2,a) et b), on a alors

$$n.[D^s.Y]_X = [D^{s-1}.E.Y]_X = \sum_{j=1}^{m} a_j.[D^{s-1}.T_j]_X$$

avec $m > 0$, $a_1 > 0, \ldots, a_m > 0$. Comme T_j est de dimension $s-1$, on a $[D^{s-1}.T_j]_X > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence, d'où $[D^s.Y]_X > 0$.

Pour prouver les théorèmes 1 et 2, il suffit donc de montrer qu'un diviseur D satisfaisant aux inégalités $[D^s.Y]_X > 0$ est ample. Le théorème est trivial si X est de dimension 0. Raisonnant par récurrence, nous pouvons donc supposer que X est de dimension $d > 0$ et que le théorème est prouvé pour les variétés de dimension $< d$.

LEMME 3. Tout faisceau de dimension $< d$ sur X est D-acyclique.

Considérons une sous-variété X' de X, distincte de X, et le faisceau d'idéaux $\underline{A}$ associé à X', dont la fibre en un point x se compose des fonctions rationnelles sur X, régulières en x et induisant 0 sur X' au voisinage de x. Il existe un diviseur sur X linéairement équivalent à D et induisant un diviseur D' sur X' ; d'après la formule (5), on a $[D'^s.Y]_{X'} = [D^s.Y]_X > 0$ pour toute sous-variété Y de X', de dimension s, et comme X' est de dimension $< d$, ceci entraîne que D' est un diviseur ample sur X'.

Soit alors $\underline{F}$ un faisceau sur X annulé par $\underline{A}$; le faisceau $\underline{F}$ est donc nul en dehors de X' et induit sur X' un faisceau algébrique cohérent $\underline{F}'$. Pour tout entier n, le faisceau $\underline{F}(n.D)$ sur X est annulé par $\underline{A}$, et l'on voit facilement que le faisceau qu'il induit sur X' est isomorphe à $\underline{F}'(n.D')$. On en déduit, pour tout entier $i \geqslant 0$, un isomorphisme

$$H^i(X,\underline{F}(n.D)) \simeq H^i(X',\underline{F}'(n.D')) \ ;$$

comme D' est ample, le faisceau $\underline{F}'$ sur X' est D'-acyclique, et l'isomorphisme précédent montre facilement que $\underline{F}$ est D-acyclique sur X.

Considérons maintenant un faisceau $\underline{G}$ de dimension $< d$ sur X. Soient S le support de $\underline{G}$, $S_1,\dots,S_m$ les composantes irréductibles de S, et $\underline{A}_j$ le faisceau d'idéaux associé à S_j. On sait qu'il existe un entier $h > 0$ tel que le faisceau d'idéaux $(\underline{A}_1 \dots \underline{A}_m)^h$ annule $\underline{G}$; autrement dit, il existe une suite finie $\underline{B}_1,\dots,\underline{B}_p$ de faisceaux d'idéaux, dont chacun est égal à l'un des $\underline{A}_j$, avec $\underline{B}_1 \dots \underline{B}_p.\underline{G} = 0$. Si l'on pose $\underline{G}_j = \underline{B}_1 \dots \underline{B}_j.\underline{G}$ pour $1 \leq j \leq p$, on aura

$$\underline{G} = \underline{G}_0 \supset \underline{G}_1 \supset \underline{G}_{j-1} \supset \underline{G}_j \supset \dots \supset \underline{G}_p = 0 \ ;$$

pour chaque $j = 1,\dots,p$, le faisceau $\underline{G}_{j-1}/\underline{G}_j$ est annulé par $\underline{B}_j$, donc est D-acyclique d'après la première partie de la démonstration. Il en résulte que $\underline{G}$ est D-acyclique d'après le lemme 1,b).

Dans les deux lemmes suivants, on note $\underline{I}$ un faisceau non nul d'idéaux sur X, et l'on pose $\underline{F}_n = \underline{F}(n.D)$.

LEMME 4. <u>Il existe un entier</u> $n_{\underline{I}}$ <u>tel que pour tout</u> $n \geq n_{\underline{I}}$ <u>et</u> $i \geq 2$, <u>les nombres</u> $h^i(\underline{I}_n)$ <u>soient égaux à un même nombre</u> c_i .

Les faisceaux $\underline{I}_n$ sont tous des sous-faisceaux du faisceau (non cohérent) $\underline{K}$ des fonctions rationnelles sur X. Le faisceau $\underline{A} = \underline{I} \cap \underline{I}_1$ est donc défini ainsi que les faisceaux $\underline{F} = \underline{I}/\underline{A}$ et $\underline{G} = \underline{I}_1/\underline{A}$. On sait que tout sous-faisceau cohérent non nul de $\underline{K}$ coïncide avec $\underline{O}_X$ sur un ouvert non vide de X, donc $\underline{A}$, $\underline{I}$ et $\underline{I}_1$ coïncident sur un ouvert non vide de X, et par conséquent, $\underline{F}$ et $\underline{G}$ sont de dimension $< d$. D'après le lemme 3, on peut donc choisir $n_{\underline{I}}$ de manière à avoir

$$H^i(\underline{F}_n) = H^i(\underline{G}_n) = 0 \qquad \text{pour } i \geq 1 \text{ et } n \geq n_{\underline{I}} \ .$$

La suite exacte de faisceaux $0 \to \underline{A}_n \to \underline{I}_n \to \underline{F}_n \to 0$ entraîne la suite exacte de cohomologie

$$H^{i-1}(\underline{F}_n) \to H^i(\underline{A}_n) \to H^i(\underline{I}_n) \to H^i(\underline{F}_n) ;$$

pour $i \geqslant 2$ et $n \geqslant n_{\underline{I}}$, les deux termes extrêmes de cette suite sont nuls, d'où la formule

$$h^i(\underline{A}_n) = h^i(\underline{I}_n) \quad \text{pour} \quad i \geqslant 2 \quad \text{et} \quad n \geqslant n_{\underline{I}} \quad . \tag{7}$$

De même, par considération de la suite exacte $0 \to \underline{A}_n \to \underline{I}_{n+1} \to \underline{G}_n \to 0$, on démontre la formule

$$h^i(\underline{A}_n) = h^i(\underline{I}_{n+1}) \text{ pour } \quad i \geqslant 2 \quad \text{et} \quad n \geqslant n_{\underline{I}} \quad . \tag{8}$$

Le lemme 4 résulte évidemment des formules (7) et (8).

LEMME 5. <u>L'entier</u> $h^0(\underline{I}_n)$ <u>tend vers l'infini avec</u> n.

Le support du faisceau $\underline{B} = \underline{0}/\underline{I}$ est différent de X, donc $\underline{B}$ est de dimension $< d$. D'après le lemme 2,f), $\chi(\underline{B}_n)$ est un polynôme de degré $< d$ en n et $\chi(\underline{0}_n)$ est un polynôme de degré $\leqslant d$ en n ; par suite $\chi(\underline{I}_n) = \chi(\underline{0}_n) - \chi(\underline{B}_n)$ est un polynome de degré $\leqslant d$ en n, et le coefficient de son monôme de degré d est le même que celui de $\chi(\underline{0}_n)$, donc est égal à $[D^s.X]_X > 0$. Par conséquent, $\chi(\underline{I}_n)$ tend vers l'infini avec n.

Par ailleurs, posons $c = \sum_{i=2}^{d} (-1)^{i+1}.c_i$ avec les notations du lemme 4 ; on a

$$h^0(\underline{I}_n) = \chi(\underline{I}_n) + h^1(\underline{I}_n) + c \geqslant \chi(\underline{I}_n) + c \tag{9}$$

et par suite $h^0(\underline{I}_n)$ tend vers l'infini avec n, tout comme $\chi(\underline{I}_n)$.

LEMME 6. <u>Soient</u> a <u>un point de</u> X <u>et</u> F <u>une partie fermée de</u> X <u>ne contenant pas</u> a. <u>Il existe un diviseur positif</u> E, <u>linéairement équivalent à un multiple</u> n.D <u>de</u> D (<u>avec</u> $n > 0$), <u>dont le support contient</u> F, <u>mais ne passe pas par</u> a.

Soit $\underline{I}$ le faisceau d'idéaux associé à F. Choisissons un entier $m > 0$ et une fonction $f \neq 0$ section de $\underline{I}_m$, ce qui est possible d'après le lemme 5. Dire que f est une section de $\underline{I}_m = \underline{I}(m.D)$ signifie que le diviseur $D' = m.D + (f)$ est positif et que son support S contient F. Si a n'appartient pas à S, le diviseur D' fait l'affaire.

Supposons donc désormais $a \in S$ et abrégeons $\underline{F}(p.D')$ en $\underline{F}(p)$. Comme le diviseur D' est positif, on a $\underline{I}(p-1) \subset \underline{I}(p)$ pour tout p, et si l'on note $\underline{C}$ le faisceau $\underline{I}/\underline{I}(-1)$ de support S, on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \underline{I}(p-1) \to \underline{I}(p) \to \underline{C}(p) \to 0 . \tag{10}$$

Comme $\underline{C}$ est de dimension $< d$ et que $\underline{C}(p)$ est isomorphe à $\underline{C}(pm.D)$, on peut choisir p_o de sorte que, pour $p \geq p_o$, on ait $H^1(\underline{C}(p)) = 0$ et que $\underline{C}(p)$ soit engendré par ses sections. Dans ces conditions, la suite exacte de cohomologie associée à (10) montre que l'homomorphisme naturel α_p de $H^1(\underline{I}(p-1))$ dans $H^1(\underline{I}(p))$ est surjectif, d'où l'inégalité

$$h^1(\underline{I}(p)) \leqslant h^1(\underline{I}(p-1)) \qquad (p \geq p_o) . \tag{11}$$

La suite des entiers positifs $h^1(\underline{I}(p))$ est donc stationnaire à partir d'un certain entier $p_1 \geq p_o$. Pour $p \geq p_1$, on a égalité dans (11) et α_p est bijectif ; mais la suite exacte de cohomologie

$$H^o(\underline{I}(p)) \xrightarrow{\beta_p} H^o(\underline{C}(p)) \to H^1(\underline{I}(p-1)) \xrightarrow{\alpha_p} H^1(\underline{I}(p))$$

montre que β_p est surjectif, c'est-à-dire que toute section de $\underline{I}(p)/\underline{I}(p-1)$ se remonte en une section de $\underline{I}(p)$.

Comme a n'appartient pas à F, la fibre $\underline{I}_a$ de $\underline{I}$ en a est égale à l'anneau local $\underline{O}_a$ de a. Choisissons une fonction rationnelle g telle que D' soit égale à (g) au voisinage de a ; on a $g \in \underline{O}_a$ et $g(a) = 0$ puisque D' est positif et que

a appartient au support de D'. On a alors

$$g^{1-p_1}.\underline{O}_a = \underline{I}(p_1-1)_a \ , \quad g^{-p_1}.\underline{O}_a = \underline{I}(p_1)_a \quad .$$

Comme $\underline{I}(p_1)/\underline{I}(p_1-1)$ est engendré par ses sections qui se relèvent en des sections de $\underline{I}(p_1)$, on peut trouver une fonction rationnelle h, section de $\underline{I}(p_1)$ et telle que $h.g^{p_1}$ soit régulière et non nulle en a. Le diviseur $E = p_1.D' + (h) = p_1.m.D + (h.f^{p_1})$ satisfait aux conditions imposées.

Le lemme 6 entraîne que D est ample (cf. par exemple [4, page 83]).

4. Une inégalité.

Soient $D_1,\ldots,D_s$ des diviseurs sur X tels que $D_1 \succ 0,\ldots, D_s \succ 0$; nous nous proposons d'établir l'inégalité

$$[D_1 \ldots D_s.Y]_X \geq 0 \tag{12}$$

pour toute sous-variété Y de X, de dimension s.

A) Supposons d'abord que $D_2,\ldots,D_s$ soient amples(1). La propriété (G) et le lemme 2,b) entraînent l'existence d'une relation de la forme

$$n.[D_1 \ldots D_s.Y]_X = \sum_{j=1}^{m} a_j.[D_1 \ldots D_{s-1}.T_j]_X \tag{13}$$

avec $a_1 \geq 0,\ldots, a_m \geq 0$. Ceci démontre (12) par récurrence sur s, le cas $s = 1$ résultant de la définition de la relation $D_1 \succ 0$.

B) <u>Soient</u> D <u>et</u> H <u>deux diviseurs, avec</u> $D \succ 0$ <u>et</u> H <u>ample, et</u> a,b <u>deux entiers strictement positifs</u>. <u>Nous allons prouver que le diviseur</u> $a.D + b.H$ <u>est ample</u>.

(1) On a $D \succ 0$ pour tout diviseur ample D, d'après le théorème 1.

Soit d la dimension de X. Le cas $d = 0$ étant trivial, nous supposerons notre assertion démontrée pour les variétés de dimension $< d$. Considérons une sous-variété Y de X, de dimension $s < d$. Quitte à remplacer D et H par des diviseurs qui leur sont linéairement équivalents, on peut supposer qu'ils induisent respectivement des diviseurs D' et H' sur Y. Pour toute courbe C contenue dans Y, on a $[D'.C]_Y = [D.C]_X \geq 0$ d'après le lemme 2,c) d'où $D' \succ 0$; il est clair que H' est ample sur Y, donc par l'hypothèse de récurrence, le diviseur $a.D' + b.H'$ induit par $a.D + b.H$ sur Y est ample, et l'on a l'inégalité :

$$(14) \qquad [(a.D + b.H)^s.Y]_X = [(a.D' + b.H')^s.Y]_Y > 0 \ .$$

Si l'on a par ailleurs

$$(15) \qquad [(a.D + b.H)^d.X]_X > 0$$

le théorème 1 prouve que $a.D + b.H$ est ample, et d'après A), on aura

$$(16) \qquad [D.(a.D + b.H)^{d-1}.X]_X \geq 0 \ .$$

Or, il existe un polynôme P tel que $P(n) = [(H + n.D)^d.X]_X$; le premier membre de (15) vaut $a^d.P(\frac{a}{b})$ et celui de (16) vaut $a^{d-1}.P'(\frac{a}{b})$ où P' est la dérivée de P. On a donc prouvé que pour tout nombre rationnel $t > 0$ tel que $P(t) > 0$, on a $P'(t) \geq 0$; comme on a par ailleurs $P(0) > 0$ puisque H est ample, on a $P(t) > 0$ pour tout $t > 0$ (théorème de Rolle !), d'où l'inégalité (15), qui montre que $a.D + b.H$ est ample.

C) Comme Y est complète, il existe une variété projective $\bar{Y}$ et un morphisme birationnel f de $\bar{Y}$ sur Y. Quitte à modifier D_j dans sa classe d'équivalence linéaire, on peut supposer que son support ne contient pas Y ; le diviseur $\bar{D}_j$ sur $\bar{Y}$, image réciproque de D_j par f, est alors défini. Utilisant le lemme 2,c) et d), on voit facilement que l'on a $D_j \succ 0$ et

(17) $$[D_1 \dots D_s . Y]_X = [\bar{D}_1 \dots \bar{D}_s . \bar{Y}]_{\bar{Y}} \ .$$

Soit $\bar{H}$ un diviseur ample sur $\bar{Y}$; les diviseurs $\bar{H} + n.\bar{D}_j$ sont amples d'après B), d'où l'inégalité

(18) $$n^{-s}[n.\bar{D}_1 + \bar{H}) \dots (n.\bar{D}_s + \bar{H}).\bar{Y}]_{\bar{Y}} \geqslant 0$$

pour $n > 0$ entier, d'après A). Si l'on fait tendre n vers l'infini dans (18) et qu'on utilise (17), on trouve (12).

5. Démonstration du théorème 3.

La nécessité des conditions énoncées est bien connue. Supposons donc que pour tout diviseur E, il existe $m > 0$ avec $E + m.D \succ 0$; faisant $E = 0$, on a donc en particulier $D \succ 0$, d'où les inégalités

(19) $$[D^s.Y]_X \geqslant 0 \qquad (Y \text{ de dimension } s \geqslant 0) \ .$$

D'après le n°4, nous allons voir qu'on a une inégalité stricte dans (19) ; le cas $s = 0$ étant trivial, nous raisonnons par récurrence sur $s > 0$. Etant donnés deux points distincts y et y' de Y, on peut trouver un diviseur positif E dont le support contient y, mais non y' (on a supposé X divisorielle). Le diviseur E induit donc sur Y un diviseur positif non nul, et le lemme 2,b) fournit une relation de la forme

$$[D^{s-1}.E.Y]_X = \sum_j a_j.[D^{s-1}.T_j]_X$$

d'où immédiatement

(20) $$[D^{s-1}.E.Y]_X > 0$$

par l'hypothèse de récurrence. D'après les inégalités (19) et (20), le polynôme P, défini par $P(n) = [(n.D + E)^s.Y]_X$ pour n entier, a un coefficient dominant > 0, et il existe donc $m > 0$ avec $P(n) > 0$ pour $n \geqslant m$. D'après l'hypothèse faite sur

D, il existe des entiers $m' > 0$ et $m'' > 0$ tels que les diviseurs

$$D' = m'.D + (m.D + E), \quad D'' = m''.D - E \tag{21}$$

vérifient $D' \succ 0$, $D'' \succ 0$. On a $D' + D'' = p.D$ avec $p = m + m' + m''$, d'où

$$p^s.[D^s.Y]_X = [D'^s.Y]_X + \sum_{j=1}^{s} \binom{s}{j}[D'^{s-j}.D''^j.Y]_X \quad . \tag{22}$$

On a $[D'^s.Y]_X > 0$ par construction de m, et tous les termes de la somme dans (22) sont positifs d'après l'inégalité (12). On a donc $[D^s.Y]_X > 0$.

6. Démonstration des théorèmes 4 et 5.

Rappelons qu'un diviseur est dit numériquement égal à 0, notation $D \approx 0$, si l'on a $[D.C]_X = 0$ pour toute courbe C sur X, autrement dit si l'on a $D \succ 0$ et $-D \succ 0$. Il a été démontré par Severi et Néron (du moins, on l'espère) que le groupe des classes d'équivalence numérique de diviseurs est un groupe abélien $N(X)$ de type fini, c'est-à-dire qu'il existe des diviseurs $E_1, \dots, E_r$ tels que tout diviseur soit numériquement équivalent à un diviseur de la forme $a_1.E_1 + \dots + a_r.E_r$. Supposons que chacun des diviseurs E_j soit de la forme $E'_j - E''_j$ avec $E'_j \succ 0$ et $E''_j \succ 0$; il est clair que le diviseur $D = E'_1 + \dots + E'_r + E''_1 + \dots + E''_r$ satisfait au critère énoncé dans le théorème 3, donc est ample. Ceci démontre le théorème 4.

Avant de démontrer le théorème 5, nous aurons à interpréter de manière "géométrique" le théorème 3. Comme le groupe $N(X)$ est évidemment sans torsion, on peut l'identifier à un réseau dans un espace vectoriel réel V de dimension r. On note $\lambda(D)$ la classe d'équivalence numérique d'un diviseur D, et $\mu(C)$ l'élément du dual V^* de V associé à la courbe C par la relation $< \lambda(D), \mu(C) > = [D.C]_X$. Dans V, on considère le cône convexe fermé Γ défini par les inégalités $< v, \beta(C) > \geqslant 0$ pour toute courbe C, et dans V^* le cône convexe fermé Γ^* engendré par les éléments

$\mu(C)$. Avec ces définitions, on transforme facilement l'énoncé du théorème 4 de la manière suivante : <u>si</u> X <u>est divisorielle, les diviseurs amples sont les diviseurs</u> D <u>tels que</u> $\lambda(D)$ <u>soit intérieur au cône</u> Γ.

On suppose désormais que tout sous-ensemble fini de X est contenu dans un ouvert affine dont le complémentaire est le support d'un diviseur positif ; ceci entraîne que X est divisorielle. La partie essentielle de la démonstration du théorème 5 est le lemme suivant.

LEMME 7. <u>Soit</u> T <u>un ensemble d'indices muni d'un ultrafiltre ; on suppose données des courbes</u> $C_i(t)$ <u>et des nombres</u> $a_i(t) \geq 0$ (<u>pour</u> $1 \leq i \leq 2r$ et $t \in T$) <u>et un élément</u> v^* <u>de</u> V^* <u>satisfaisant à la relation</u>

$$v^* = \lim_t \sum_{i=1}^{r} a_i(t).\mu(C_i(t)) = -\lim_t \sum_{i=1}^{r} a_{i+r}(t).\mu(C_{i+r}(t)) \ . \tag{23}$$

<u>Dans ces conditions, on a</u> $v^* = 0$.

L'ensemble $\underline{X}$ des sous-variétés de X est muni de la topologie de Zariski dans laquelle un ouvert est l'ensemble des sous-variétés de X rencontrant un ouvert donné de X. On sait que $\underline{X}$ est quasi-compact, et par suite les $C_i(t)$ ont au moins une limite Y_i. Choisissons un point y_i dans Y_i. L'hypothèse faite sur X montre qu'il existe des diviseurs positifs $D_1,\ldots,D_n$, ayant respectivement pour supports $S_1,\ldots,S_n$, et tels que l'ouvert $X - S_i$ soit affine et contienne les points $y_1,\ldots,y_{2r}$. Le support du diviseur $D = D_1 + \ldots + D_n$ est égal à $S = S_1 \cup \ldots \cup S_n$; l'ensemble ouvert $U = X - S$ contient chacun des points y_i , donc rencontre chacun des ensembles Y_i . D'après la définition de la topologie dans $\underline{X}$, cela signifie qu'en se restreignant au besoin à un ensemble de l'ultrafiltre sur T, on peut faire l'hypothèse

$$(24) \qquad C_i(t) \cap U \neq \emptyset \qquad (t \in T,\ 1 \leqslant i \leqslant 2r) .$$

Par ailleurs, d'après un lemme bien connu de Chow, on peut trouver une variété projective $\bar{X}$ et un morphisme f de $\bar{X}$ sur X tels que $\bar{U} = f^{-1}(U)$ soit le complémentaire d'une section hyperplane $\bar{H}$ de $\bar{X}$ et que f induise un isomorphisme de $\bar{U}$ sur U. Soient E un diviseur sur X et $\bar{E}$ (resp. $\bar{D}$) l'image réciproque de E (resp. D) dans $\bar{X}$; on peut trouver des entiers $m' > 0$ et $m'' > 0$ tels que le diviseur $m'.\bar{D} - \bar{H}$ soit positif et que $\bar{E} + m''.\bar{H}$ soit linéairement équivalent à une section hyperplane de $\bar{X}$ dans un plongement projectif convenable. Utilisant le lemme 2,d), on voit facilement que (24) entraîne

$$(25) \qquad < \lambda(E + m.D),\ \mu(C_i(t)) > \ > 0 \qquad (t \in T,\ 1 \leqslant i \leqslant 2r,\ m \geqslant m'm'') .$$

Multipliant ces inégalités par $a_i(t)$, sommant et passant à la limite sur t, on obtient d'après (23)

$$(26) \qquad < \lambda(E + m.D),\ v^* > = 0 \qquad (m \geqslant m'm'')$$

d'où immédiatement $v^* = 0$.

La fin de la démonstration est facile. Tout d'abord, toute combinaison linéaire à coefficients positifs d'éléments de V^* de la forme $\mu(C)$ est égale à une combinaison analogue avec au plus r termes (facile), et le lemme 7 affirme donc que les hypothèses $v^* \in \Gamma^*$, $-v^* \in \Gamma^*$ entraînent $v^* = 0$. La théorie de la polarité des cônes convexes montre alors que le cône Γ engendre V, et comme V est de dimension finie, l'intérieur de Γ est un cône convexe ouvert non vide Γ_1. Un tel cône contient un point du réseau $N(X)$, de la forme $\lambda(D)$. Le théorème 4, nouvelle version, montre que D est ample, donc X projective.

C.Q.F.D.