PAUL KRÉE

Intégrales singulières

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. nº 298, p. 309-321
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__309_0>

Séminaire BOURBAKI
18e année, 1965/66, n°298 Novembre 1965

INTÉGRALES SINGULIÈRES

par

Paul KRÉE

Considérons les groupes additifs $X = R^n_x$ et $\Xi = R^n_\xi$ mis en dualité par les caractères

$$e^{2\pi i x\xi} \qquad \text{avec} \quad x\xi = x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n \ .$$

Soit $|x| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$, Σ la sphère unité de X et $\dot{X}$ le complémentaire de l'origine dans X. Calderon et Zygmund ([2]) ont étudié les distributions v.p.k. définies de la façon suivante à partir d'une fonction $k : \dot{X} \to C$ telle que :

A') k est homogène de degré $-n$: $k(\lambda x) = \lambda^{-n} k(x)$

B') k a une intégrale nulle sur Σ : $\int_{|x|=1} k = 0$

C') k vérifie certaines conditions de régularité (ex. : $k \in L^\infty(\Sigma)$) .

Notant pour tout $\varepsilon > 0$, k_ε la restriction de k au complémentaire de la boule où $|x| \leq \varepsilon$, on a :

D') v.p.k. = lim dans $\mathcal{D}'(X)$ des distributions k_ε lorsque $\varepsilon \to 0$. On a pris l'habitude d'appeler intégrales singulières de Calderon-Zygmund les opérateurs de convolution par de telles distributions. De telles distributions sont très utiles en analyse. F. Jones ([11]) et Arnèse ([1]) ont introduit des distributions v.p.k. définies de la façon suivante à partir d'un noyau k tel que (on pose $x = (x', x_n)$; a_n est une constante positive donnée)

A") k vérifie certaines conditions d'homogénéité :

$$k(\lambda x', \lambda^{a_n} x_n) = \lambda^{-a_n - n + 1} \ k(x)$$

B") k est nulle si $x_n < 0$ et $\int k(x', 1)dx' = 0$.

C") La restriction de k à l'hyperplan $x_n = 1$ vérifie certaines inégalités.

Si k_ε désigne la restriction de k au demi-espace où $x_n \geqslant \varepsilon$, on a :

D") v.p.k. = lim dans $\mathcal{D}'(X)$ des distributions k_ε.

F. Jones a montré que ces distributions envoient par convolution $L^p(X)$ dans $L^p(X)$ si $1 < p < \infty$; et ce résultat a des applications aux équations paraboliques (voir ([7])). Nous nous sommes posé la question (voir [13])

- de voir le rapport qui existe entre ces deux types de distributions (par exemple en cherchant une classe qui les "contienne" ; voir § 2)
- d'étendre à cette classe les propriétés des distributions D') (voir §§ 3 et 4)
- de commencer l'étude des applications de ces distributions (voir § 5).

Il est facile d'écrire la condition A) généralisant A') et A"); pour trouver la condition B) contenant B') et B") nous avons été amenés à étudier les distributions sur R^n_x vérifiant des conditions d'homogénéité dissymétriques par rapport aux différentes variables :

§ 1. Distributions quasihomogènes.

On se donne une famille $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de n nombres $a_i > 0$. (Toutes les distributions ou fonctions sont supposées à valeurs complexes.)

Définition 1.

Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(X)$ (resp. $\mathcal{D}'(\dot{X})$) et tout $\lambda > 0$, notons ${}_\lambda T$ la distribution sur X (resp. $\dot{X}$) transportée par le difféomorphisme

$$x \to (\lambda^{-a_1} x_1, \ldots, \lambda^{-a_n} x_n). \tag{1}$$

1. Pour tout α complexe, $\Phi_\alpha(X)$ (resp. $\Phi_\alpha(\dot{X})$) désigne l'ensemble des distributions $T \in \mathcal{D}'(X)$ (resp. $\mathcal{D}'(\dot{X})$) qui sont quasihomogènes de degré α, c'est-à-dire telle que

$$\forall \lambda > 0, \qquad {}_\lambda T = \lambda^\alpha T \tag{2}$$

2. $F_\alpha(\dot{X})$ désigne l'ensemble des fonctions C^∞ sur $\dot{X}$ qui sont quasihomogènes de degré α.

3. Pour tout $\alpha \in C$, α' désignera toujours le nombre tel que

(3) $$\alpha + \alpha' + |a| = 0 \quad ; \quad \underline{\text{avec}} \quad |a| = \sum_{i=1}^{n} a_i \ .$$

L'étude de $\Phi_\alpha(X)$ s'effectue en s'inspirant de l'étude des distributions homogènes faite dans ([6]) par Gårding et en utilisant de "bonnes coordonnées polaires dans $\dot{X}$": soit γ une fonction de $F_1(\dot{X})$ à valeurs > 0 ; soit Σ la variété $\gamma^{-1}(1)$. Pour tout $x \in \dot{X}$, l'orbite de x (= l'ensemble des points $(\lambda^{a_1}x_1, \ldots, \lambda^{a_n}x_n)$ avec $\lambda \in R^+$) coupe Σ en un point y. Si $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ est un système de coordonnées locales sur Σ au voisinage du point y, on repère le point x par les n nombres $(\gamma(x), \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$.

On utilise une variante de la forme de J. Leray :

(4) $$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i d_i x \quad \text{avec} \quad d_i x = (-1)^{i-1}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

et les identités suivantes ($f \in F_\alpha(\dot{X})$ et $g \in F_\beta(\dot{X})$)

(5) $$d(fg\sigma) = (\alpha + \beta + |a|) fg dx.$$

(6) $$df \wedge \sigma = \alpha f dx$$

(7) $$dx = \gamma(x)^{|a|-1}\, d\gamma(x) \wedge \sigma(y)$$

(cette dernière formule donnerait en remplaçant les y_i par leurs expressions en fonction des θ_i, l'expression de l'élément de volume en coordonnées polaires).

§ 2.1. <u>Distributions quasihomogènes dans le complémentaire de l'origine</u>.

L'étude de $\Phi_\alpha(\dot{X})$ aboutit à la

<u>Proposition</u> 1.

1. <u>Pour toute</u> $f \in \Phi_\alpha(\dot{X})$, <u>on peut définir sa restriction</u> f <u>à</u> Σ. <u>On peut alors mettre des topologies sur</u> $\Phi_\alpha(\dot{X})$ <u>et</u> $F_\alpha(\dot{X})$ <u>puisque ces espaces sont naturellement isomorphes à</u> $\mathcal{D}'(\Sigma)$ <u>et</u> $\mathcal{D}(\Sigma)$.

2. La forme bilinéaire $< f,g >_\sigma : \Phi_\alpha(\dot{X}) \times F_\alpha(\dot{X}) \to C$ définie par :

$$< f,g >_\sigma = \int_{\gamma=1} f(y)g(y)\sigma(y) \tag{8}$$

met en dualité $\Phi_\alpha(\dot{X})$ et $F_\alpha(\dot{X})$.

3. Considérant l'application $H_\alpha : \mathcal{D}(\dot{X}) \to F_\alpha(\dot{X})$ définie par

$$(H_\alpha\varphi)(x) = \int_0^\infty r^{-\alpha-1} \varphi(r^{a_1}x_1, \dots, r^{a_n}x_n)dr \tag{9}$$

alors

$$< f,\varphi >_{\mathcal{D}'(\dot{X})\times\mathcal{D}(\dot{X})} = < f,H_\alpha\varphi >_\sigma . \tag{10}$$

Preuve : Prenant $\varphi\in\mathcal{D}(\dot{X})$, je cherche $< f,\varphi >$. Notons qu'à toute **partition** de l'unité (ψ_i) sur Σ est naturellement associée une partition de l'unité $(\dot{\psi}_i)$ sur $\dot{X}$.

Supposant la partition (ψ_i) subordonnée à un recouvrement de Σ par des ouverts à cartes, je suis ramené à étudier $< \dot{\psi}_i f,\varphi >$. Au lieu de lire $\dot{\psi}_i f$ à l'aide de la carte de $\dot{X}$ associée aux coordonnées $(r = \gamma(x),\theta)$, je lis $\gamma(x)^{-\alpha} f\dot{\psi}_i$ et la formule (2) prouve que c'est une distribution indépendante de r. Donc elle s'écrit $1(r) \otimes \tilde{\Theta}_i(\theta)$. La carte considérée permet de relever $\tilde{\Theta}_i$ en une distribution Θ_i sur Σ et il suffit de définir la "restriction" $f(y)$ de f à Σ comme étant la somme de ces distributions Θ_i .

D'ailleurs si f est C^∞, $f(y)$ est la restriction de f à Σ, au sens ordinaire. Le 2e et le 3e se prouvent en utilisant la densité de $F_\alpha(\dot{X})$ dans $\Phi_\alpha(\dot{X})$.

§ 1.2. Problème du prolongement.

On cherche à étudier l'opérateur $R : \Phi_\alpha(X) \to \Phi_\alpha(\dot{X})$ qui à toute distribution quasihomogène sur X fait correspondre sa restriction à $\dot{X}$ (image ? noyau ?).

La proposition suivante affirme que, si $\mathrm{Re}\,\alpha' <$ inf. des a_i non entiers, cet opérateur R est d'indice nul (c'est même un isomorphisme si $\alpha' \notin N$).

Le 2° de la proposition donne un sous-espace de l'image de R si $\alpha' \geqslant 0$.

Proposition 2.

1. Si $\mathrm{Re}\,\alpha' <$ inf. des a_i non entiers, de deux choses l'une :

(11) - ou α' n'est pas un entier $\geqslant 0$, et alors R est un isomorphisme

- ou α' est un entier $p \geqslant 0$, et alors l'image de R est formée des distributions T telles que

(12) $$\langle T, x^\nu \rangle_\sigma = 0 \quad \text{pour tout } \nu \text{ tel que } a\nu = p$$

tandis que $\mathrm{Ker}\,R$ est engendré par les

(13) $$D^\nu \delta_o = \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\nu_1} \ldots \delta_o \quad \text{pour tous les } \nu \text{ tels que } a\nu = p\,.$$

2. Si $\alpha' \geqslant 0$, l'image de R contient toute T de $\Phi_\alpha(\dot{X})$ telle que

(14) $\langle T, x^\nu \rangle_\sigma = 0$ pour tout ν tel que $a\nu = \alpha'$.

Le 1° se démontre en considérant (10) et en cherchant à définir $(H_{\alpha'}\varphi)(x)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ et tout $x \in \dot{X}$.

Si α' n'est pas un entier positif, il suffit de faire suffisamment d'intégrations par parties à partir de (9) et de poser

$$(H_{\alpha'}\varphi)(x) = \int_0^\infty (\alpha'(\alpha'-1)\ldots(\alpha'-p))^{-1}\, r^{-\alpha'+p}\varphi^{(p+1)}(r^{a_1}x_1\ldots)\,dr$$

avec p entier $> \mathrm{Re}\,\alpha'$ et $\varphi^{(p+1)}(r^{a_1}x_1\ldots) = \left(\frac{d}{dr}\right)^{p+1}(\varphi(r^{a_1}x_1\ldots))$

(l'intégrale n'a un sens que si l'on a (11)).

On obtient ainsi une fonction méromorphe $\alpha' \to (H_{\alpha'}\varphi)(x)$ ce qui permet de poser si $\alpha' = q \in N$:

$(H_q\varphi)(x) =$ le terme constant du développement de Laurent de la fonction $(H_{\alpha'}\varphi)(x)$ au voisinage du point q.

Pour montrer le 2°, il faut utiliser un autre relèvement $T \to T'$ de R. On peut, par exemple, poser pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ et tout $\varepsilon > 0$

$$(15)\quad (H_{\alpha',\varepsilon}\varphi)(y) = \int_{\varepsilon}^{\infty} r^{-1-\alpha'}\Big(\varphi(r^{a_1}y_1 \ldots) - \sum_{ak < \alpha'} \frac{\partial^k \varphi(0)}{k!}\, r^{ak} y^k\Big)dr$$

$$\text{avec} \quad ak = \sum_{i=1}^{n} a_i k_i$$

ce qui définit une fonction C^{∞} sur Σ. On considère les distributions T_{ε} sur X définies par

$$(16)\qquad \langle T_{\varepsilon}, \varphi \rangle = \langle \Theta, H_{\alpha',\varepsilon}\varphi \rangle_{\Sigma}$$

et l'on montre que ces distributions tendent dans $\mathcal{D}'(X)$ lorsque $\varepsilon \to 0$ vers une distribution $T' \in \Phi_{\alpha}(X)$ qui prolonge T.

Ceci résulte d'

<u>une formule de Taylor</u> :

<u>Etant donnés</u> n <u>nombres</u> $a_i > 0$ <u>et un nombre</u> $\alpha' \geqslant 0$ <u>toute</u> φ <u>de</u> $\mathcal{D}(X)$ <u>peut s'écrire</u>

$$(17)\qquad \varphi = \sum_{a\nu \leqslant \alpha'} \frac{x^{\nu}}{\nu!}\,\partial^{\nu}\varphi(0) + \sum x^k \varphi_k$$

<u>où la deuxième somme est étendue à un ensemble fini de multi-indices</u> k <u>tels que</u> $ak > \alpha'$ <u>et où les fonctions</u> φ_k <u>décrivent un borné de</u> $\mathcal{E}(\dot{X})$ <u>lorsque</u> φ <u>décrit un borné de</u> $\mathcal{D}(X)$.

§ 1.3. <u>Transformation de Fourier</u>.

On voit d'abord que la transformation H_{α} se prolonge de $\mathcal{D}(X)$ à $\mathcal{S}(X)$ ce qui permet de montrer que toute distribution quasihomogène est tempérée.

On voit ensuite (en utilisant la définition de Schwartz de la transformation de Fourier) que $\mathcal{F}$ et $\bar{\mathcal{F}}$ sont deux isomorphismes réciproques de $\Phi_{\alpha}(X)$ et $\Phi_{\alpha}(\Xi)$.

On cherche alors une expression de la transformée de Fourier $\mathcal{F}T$ d'une $T \in \Phi_\alpha(X)$.

Les techniques de [6] se transposent :

- en introduisant la distribution $T^\gamma \in \Phi_\alpha(X)$ qui a l'origine pour support, qui est nulle si $\alpha' \in N$ et qui est définie par

(18) $$\forall\ \varphi \in \mathcal{S}(X) \quad < T,\varphi > = < T, H_{\alpha'}\varphi \underset{\sigma}{>} + < T^\gamma, \varphi >$$

- en utilisant les distributions $\chi_\alpha \in \mathcal{S}'(X)$ qui sont définies (si $\mathrm{Re}\ \alpha < 0$) comme limite dans $\mathcal{S}'(X)$ des distributions $\chi_{\alpha,\varepsilon}$ lorsque $\varepsilon \to 0$, avec :

(19) $$\chi_{\alpha,\varepsilon}(u) = \int_0^\infty e^{-2\pi i(r^{a_1}u_1+\ldots)-\varepsilon r}\ r^{-\alpha-1}\ dr$$

si $\mathrm{Re}\ \alpha \geqslant 0$, il faut encore faire des intégrations par parties.

Et l'on a la

<u>Proposition</u> 3.

<u>Pour toute</u> $T \in \Phi_\alpha(X)$ <u>et toute</u> $U \in \Phi_\alpha(\Xi)$ <u>les transformées de Fourier</u> $\mathcal{F}T$ <u>et</u> $\bar{\mathcal{F}}U$ <u>sont données par</u> :

(20) $$(\mathcal{F}T)(\xi) = \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(x_1\xi_1\ldots)T(x)\sigma(x) + \mathcal{F}T^\gamma(\xi)$$

(21) $$(\bar{\mathcal{F}}U)(x) = \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha'}(-x_1\xi_1\ldots)U(\xi)\sigma(\xi) + \bar{\mathcal{F}}U^\gamma(x)$$

(<u>où les dérivations sous le signe d'intégration sont possibles</u>).

D'où en particulier, en prenant $U = 1$, l'extension suivante de la formule de John (voir [11])

(22) $$\delta(x) = \int_{\gamma=1} \chi_{-|a|}(-x_1\xi_1\ldots)\sigma(\xi)$$

Soit alors $P(D) = \sum\limits_{a\alpha=p} b_\alpha D^\alpha$ une opération différentielle quasihomogène à coefficients constants b_α. Considérons la distribution

(23) $$E(x) = \int_{\gamma=1} \chi_m(-x_1\xi_1 \ldots)P(\xi)^{-1}\sigma(\xi) \quad \text{avec} \quad p = m + (a).$$

Si on lui applique $P(D)$, on voit en utilisant les propriétés des distributions χ_α que c'est une solution élémentaire de l'opérateur $P(D)$.

§ 2. Une classe de distributions "valeur principale".

Définition 2.

Soit k une fonction $\dot{X} \to C$ telle que :

A) k est quasihomogène de degré $-|a|$

B) γ étant une fonction de $F_1(\dot{X})$ à valeurs > 0, l'intégrale de la n-1. -forme $k\sigma$ sur la variété $\gamma^{-1}(1)$ est nulle

$$\int_{\gamma(y)=1} k(y)\sigma(y) = 0 .$$

C) k est de classe C^1.

Soit $$k_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 \ \text{si} \ \gamma_0(x) = [x] = \sup |x_i|^{1/a_i} \leqslant \varepsilon \\ k(x) \ \text{si} \ [x] > \varepsilon \end{cases}$$

D) Alors lorsque $\varepsilon \to 0$, les distributions k_ε tendent vers une distribution notée v.p.k., quasihomogène de degré n.

Ceci se prouve en utilisant les "coordonnées polaires" associées à la fonction γ_0 et une fonction ζ de $\mathcal{D}(X)$ valant 1 dans un voisinage de l'origine. Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, on a :

$$< k_\varepsilon, \varphi > = \int_{[x] > \varepsilon} k(x)(\varphi(x) - \varphi(0)\zeta(x))dx + \varphi(0) \int_{[x] > \varepsilon} k(x)\zeta(x)dx$$

(le 2e membre ne dépend pas de ζ puisqu'il en est ainsi du 1er)

Vu B) la 2e intégrale ne dépend pas de ε. Quant à la première, elle tend vers une limite lorsque $\varepsilon \to 0$ en vertu de la formule de Taylor.

Notons que comme la forme $k\sigma$ est fermée, la condition B signifie que l'intégrale de $k\sigma$ est nulle sur toute variété "entourant l'origine". On peut vérifier que l'on obtient la même distribution v.p.k. si l'on remplace dans la définition de cette distribution, γ_0 par une fonction γ de $F_1(\dot{X})$ à valeurs > 0. Nous utiliserons la

<u>Proposition</u> 4.

<u>Pour toute</u> k <u>telle que</u> A), B) <u>et</u> C), $\widehat{\text{v.p.k}}$ <u>est représentée par une fonction</u> ℓ <u>quasihomogène de degré</u> 0, <u>qui est continue dans le complémentaire de l'origine</u>.

<u>Les distributions</u> k_ε <u>ont des transformées de Fourier continues et uniformément bornées lorsque</u> ε <u>varie</u>.

Cela se prouve en utilisant (voir [15]) une fonction $\zeta \in \mathcal{D}(\Xi)$ valant 1 là où $\gamma(\xi) \leqslant 2$ et 0 là où $\gamma(\xi) \geqslant 3$.

On prouve que $\widehat{\text{v.p.k}}$ est bornée et continue dans Ξ en prouvant qu'il en est ainsi là où $1 \leqslant \gamma \leqslant 2$, ce qui se voit en écrivant

$$\widehat{\text{v.p.k}} = \zeta\widehat{(\text{v.p.k})} + \widehat{(1-\zeta)k} .$$

La 2e partie de la proposition se prouve en remarquant que

$$k_\varepsilon = \varepsilon^{-|a|} {}_{\varepsilon}(k_1) .$$

D'où

$$\widehat{k_\varepsilon} = \varepsilon^{-|a|} {}_{\varepsilon}\widehat{(k_1)} = {}_{\varepsilon}(\widehat{k_1}) .$$

Il suffit de prouver que $\widehat{k_1}$ est borné ce qui se voit encore en écrivant

$$\widehat{k_1} = \widehat{\zeta k_1} + \widehat{(1-\zeta)k_1} = \widehat{\zeta k_1} + \widehat{(1-\zeta)k} .$$

§ 3. Distributions v.p.k et espaces de Lebesgue $L^p(X)$

Proposition 5.

Pour tout k tel que A), B) et C) et tout $p \in]1,+\infty[$, la distribution v.p.k de la définition 2 envoie $L^p(X)$ dans $L^p(X)$. (C'est le théorème de M. Riesz pour $n = 1$ et un théorème de Calderon-Zygmund pour $a_1 = a_2 \dots = a_n$; il affirme que v.p.k est un "convoluteur" dans $L^p(X)$.)

1°. Preuve en raisonnant sur le groupe X.

Comme la boule unité des "convoluteurs" est fermée dans $\mathcal{D}'(X)$, et vu D), il suffit de montrer que l'ensemble $(k_\varepsilon *)_\varepsilon$ d'opérateurs dans $L^p(X)$ est borné.

Ceci résultera de la :

Proposition 6.

Si k est une fonction localement sommable sur X telle que

$$(24)\quad \left\{ \begin{array}{l} \exists\, C_1 > 0 \text{ et } p_o > 1 \text{ tel que } k* \text{ est un opérateur de } L^{p_o}(X) \\ \text{de norme } \leqslant C_1 \end{array} \right.$$

$$(25)\quad \left\{ \begin{array}{l} \exists\, C_2 > 0 \text{ et } A \in N \text{ tel que} \\ \forall k \in Z,\ \forall\, y \text{ avec } [y] \leqslant 2^k ,\ \int_{[x] \geqslant 2^{k+A}} |k(x-y) - k(x)|\,dx \leqslant C_2 \end{array} \right.$$

Alors $k*$ est pour tout $p \in]1,+\infty[$ un opérateur de convolution dans $L^p(X)$ et il existe une majoration de la norme de cet opérateur en fonction de C_1, C_2, p_o et p.

C'est la version donnée dans [12] des inégalités de Calderon-Zygmund. Le théorème de Plancherel et la proposition 5 montrent que les fonctions $(k_\varepsilon)_\varepsilon$ vérifient (24) avec une même constante C_1. Faisons le calcul prouvant que ces mêmes fonctions $(k_\varepsilon)_\varepsilon$ vérifient (25) avec la même constante C_2. Si l'on fait les changements

$$x_i = 2^{a_i \ell} x'_i \ ;\ y_i = 2^{a_i \ell} y'_i$$

on voit qu'il suffit de montrer (25) avec $\ell = 0$. On peut supposer $\varepsilon = 0$. Or,

$$|k(x-y) - k(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |y_i| \sup_{t\in[0,1]} \left| \frac{\partial k}{\partial x_i}(x-ty) \right.$$

$$\leqslant \frac{C}{\inf_{t\in[0,1]} [x-ty]^{|a|+a_i}} \leqslant \frac{C}{([x]-2^{-A})^{|a|+a_i}} .$$

D'où la majoration voulue en utilisant les "coordonnées polaires".

2°. <u>Preuve en raisonnant sur le groupe</u> Ξ

Si $\widehat{v.p.k}$ est telle que $D^{\ell}\widehat{v.p.k}$ est une fonction continue pour tout $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ tel que $\ell_i \in \{0,1\}$, la proposition 5 résulte de la

<u>proposition</u> 7 (résulte de [12])

<u>Si une fonction</u> $\varphi : \dot{X} \to C$ <u>est telle que pour tout multi-indice de dérivation</u> $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ <u>avec</u> $\ell_i \in \{0,1\}$, $D^{\ell}\varphi(\xi)$ <u>est une fonction continue telle que</u>

$$\exists\, C, \quad \forall\, \xi\,, \quad [\xi]^{a\ell} |D^{\ell}\varphi(\xi)| \leqslant C\,.$$

<u>Alors, pour tout</u> $p \in]1,+\infty[$, φ <u>est un multiplicateur dans</u> $\mathcal{F}L^p(\Xi)$.

Cette proposition donne le théorème de Mihlin si $a_1 = \ldots = a_n$. Notons qu'il existe une version voisine (voir [12]) de cette proposition (où l'on suppose que φ vérifie des hypothèses de différentiabilité un peu différentes), et qui généralise la version du théorème de Mihlin donnée par Hörmander ([8]).

<u>Autres résultats</u>. Cora Sadosky ([14]) a montré que :

- si l'on pose pour toute $f \in \mathcal{D}(X)$, $\tilde{f}_*(x) = \sup_{\varepsilon>0} |(k_\varepsilon * f)(x)|$ l'application $f \to \tilde{f}_*$ est de type fort (p,p) si $p \in]1,+\infty[$ et de type faible $(1,1)$.

- il y a convergence ponctuelle : si $f \in L^p(X)$ $(1 \leq p < \infty)$ pour presque tout $x \in R^n$, la limite si $\varepsilon \to 0$ de $(k_\varepsilon * f)(x)$ existe

- on peut introduire des poids.

§ 4. Autres propriétés des distributions v.p.k telles que A), B), C), D).

Le théorème de Korn-Lichenstein-Giraud relatif aux intégrales singulières de Calderon-Zygmund se transpose en introduisant pour tout $\alpha > 0$ l'espace Λ_α des fonctions continues φ sur X telles que

$$\sup_{x,h} \frac{\varphi(x) - \varphi(x+h)}{[h]^\alpha} < \infty \quad .$$

On obtient que la convolution par v.p.k envoie continuement le sous-espace de Λ_α formé par des fonctions à support compact, dans Λ_α . Cora Sadosky a montré que v.p.k* définit un opérateur continu dans certains espaces du type T^p_u (voir [4]).

§ 5. Calcul symbolique.

Comme application, on peut chercher à construire un calcul symbolique à l'aide de ces intégrales singulières, analogue au calcul symbolique de Calderon-Zygmund (voir [3]). Disons que tout "marche" tant que l'on ne recherche pas à transposer la propriété (voir [16]) d'invariance du symbole par difféomorphisme (une telle transformation ne respecte pas en général les rôles dissymétriques des axes de coordonnées). La transposition des exposés 8 et 9 de [5] prouve par exemple l'hypoellipticité des systèmes différentiels formellement semi-elliptiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Arnèse. Ric. di Math., vol. XIII, 1964, pp.1-45.

[2] A. Calderon et A. Zygmund. Act. Math., t.88, 1952, pp. 85-139.

[3] - - Amer. Journ. of Math., t.79, 1957, pp.901-921.

[4] - - Studia Math., vol. 20, 1961, pp. 171-225.

[5] H. Cartan et L. Schwartz. Sém. ENS, Paris, 1963-1964.

[6] L. Gårding. Bull. Soc. Math. France, 89, 1961, pp. 381-428.

[7] P. Grisvard. Sém. Bourbaki, mai 1965.

[8] L. Hörmander, Act. Math., t. 104, 1960, pp. 93-140.

[9] - Comm. Pure Appl. Math., vol. XVIII, n°3, Août 1965, pp. 501-517.

[10] F. John. Plane wawes and ... Interscience. New-York 1965.

[11] F. Jones. Amer. Journ. of Math., vol. 86, n°2, avril 1964.

[12] P. Krée. Sur les multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p$ (à paraître dans $\mathcal{F}$)

[13] - Note C.R.A.S. t.261, n° 14, 4 oct. 1965, pp.2560-2563.

[14] C. Sadosky (à paraître dans Studia Mathematica)

[15] L. Schwartz. Sém. Fac. Sciences Paris, 1959-1960.

[16] R.T. Seeley. Amer. Journ. Math., t.81, 1959, pp. 658-690.