SÉMINAIRE N. BOURBAKI

SERGE LANG

Corps de fonctions méromorphes sur une surface de Riemann

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. nº 292, p. 231-232

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__231_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
17e année, 1964/65, n° 292

Mai 1965

CORPS DE FONCTIONS MÉROMORPHES SUR UNE SURFACE DE RIEMANN

par Serge LANG

(d'après ISS'SA [1])

Soit X une surface de Riemann non-compacte. On sait depuis longtemps que X est déterminée (à la conjugation complexe près) par l'anneau des fonctions holomorphes. ISS'SA vient de résoudre le problème analogue pour le corps de fonctions méromorphes en montrant comment on peut caractériser l'anneau à partir du dit corps. (Soit dit en passant que le problème était posé depuis longtemps, et que les analystes y avaient travaillé.)

THÉORÈME 1. - Soient X une surface de Riemann non-compacte connexe, A l'anneau des fonctions holomorphes sur X et $K(X)$ son corps de fractions. Si B est un anneau de valuation discrète de K (contenant les constantes), alors B est l'anneau local d'un point sur la surface de Riemann, et A est l'intersection de tous les anneaux de valuation discrète de K contenant les constantes.

Démonstration. - Nous allons démontrer l'assertion suivante : Toute fonction holomorphe sur X est contenue dans B, autrement dit, $A \subset B$. Le théorème en est une conséquence immédiate.

On se ramène au cas où X est le plan complexe comme suit. Soit f holomorphe sur X, et supposons le théorème démontré pour la fonction z sur $\underset{\sim}{C}$. Par pull-back, l'anneau de valuation B induit un anneau de valuation discrète sur le corps $K(\underset{\sim}{C})$ des fonctions méromorphes sur $\underset{\sim}{C}$, et si z est dans un tel anneau, il s'en suit que f est dans $K(X)$.

Soit v la valuation (notée additivement) correspondant à B. Supposons que z ne soit pas dans B, i. e. que z ait un pôle en v. Soient p un nombre premier, et $\{n_i\}$ une suite d'entiers tels que $1 \leqslant n_i \leqslant p - 1$, et tels que le développement p-adique $\sum n_i\, p^i$ n'appartient à aucun nombre rationnel. Soit f une fonction entière ayant un zéro d'ordre $n_i\, p^i$ en i pour $i = 1, 2, \ldots$, et pas d'autre zéro. Pour chaque entier positif N, posons

$$P_N(z) = \prod_{i=1}^{N} (z - i)^{n_i p^i} .$$

Alors $f(z)/P_N(z)$ est une fonction entière dont l'ordre de tous ses zéros (dans $\underset{\sim}{C}$) est divisible par p^{N+1}, et par conséquent il existe une fonction entière $g(z)$ telle que

$$\frac{f(z)}{P_N(z)} = g(z)^{p^{N+1}} .$$

Prenons l'ordre en v de ces fonctions. Comme z a un pôle en v , on voit que $P_N(z)$ a aussi un pôle, et que

$$\mathrm{ord}_v\, P_N = (n_1\, p + \dots + n_N\, p^N)\, \mathrm{ord}_v\, z .$$

Donc,

$$\mathrm{ord}_v\, f = (n_1\, p + \dots + n_N\, p^N)\, \mathrm{ord}_v\, z + p^{N+1}\, \mathrm{ord}_v\, g .$$

On en déduit que $\mathrm{ord}_v\, f$ ne peut être un entier, d'où contradiction.

(L'argument montre bien entendu beaucoup plus, si on l'applique à d'autres anneaux de valuation de $K(\underset{\sim}{C})$.)

Nous avons déjà caractérisé A comme étant l'intersection de tous les anneaux de valuation discrète du corps K . Nous allons maintenant voir qu'il n'y en a pas d'autres que ceux associés aux points de la surface de Riemann.

Pour chaque point z de X , soit f_z une fonction ayant un zéro d'ordre 1 en z et pas d'autre zéro sur X . Si pour un z_0 la fonction f_{z_0} a un ordre en v qui soit $\geqslant 1$, alors, pour $z \neq z_0$, la fonction f_z ne peut avoir un ordre en v $\geqslant 1$, et donc est une unité pour v . Donc l'anneau de valuation discrète $A_{(f_{z_0})}$ est contenu dans B , et est donc égal à B .

Supposons que, pour chaque z de X , on ait $\mathrm{ord}_v\, f_z = 0$. Alors v est triviale sur toute fonction holomorphe n'ayant qu'un nombre fini de zéros.

Soit g n'importe quelle fonction dans A , et soit z_1 , z_2 , ... la suite de ses zéros, qu'on peut supposer tendre vers l'infini. Soit z_0 un autre point de X . On peut trouver une fonction h ayant un zéro d'ordre arbitrairement grand en z_0 , telle que la fonction $f = gh$ ait un ordre n_i en z_i $(i = 0 , 1 , \dots)$ avec $n_i | n_{i+1}$. Alors la fonction $f/f_{z_0}^{n_0}$ n'a que des zéros dont l'ordre est divisible par n_0 , et il existe donc une fonction holomorphe φ telle que

$$f/f_{z_0}^{n_0} = \varphi^{n_0}\, u , \qquad \text{avec } u \text{ inversible.}$$

Il s'en suit que $\mathrm{ord}_v\, g$ est arbitrairement grand, ou 0 . Le premier cas ne peut se présenter, ni le second, car autrement v serait triviale, ce qui démontre le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hej ISS'SA. - On the meromorphic function field of a Stein variety, Annals of Mathematics (à paraître).