LUC ILLUSIE

Contractibilité du groupe linéaire des espaces de Hilbert de dimension infinie

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. n° 284, p. 105-113

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__105_0>

Séminaire BOURBAKI
17e année, 1964/65, n° 284

Février 1965

CONTRACTIBILITÉ DU GROUPE LINÉAIRE DES ESPACES DE HILBERT DE DIMENSION INFINIE

par Luc ILLUSIE

(d'après N. KUIPER [4])

Dans cet exposé, on suppose choisi un corps de base Λ , qui pourra être $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{H}$. Quand on parlera d'espaces (resp. fibrés) vectoriels, il sera sous-entendu qu'il s'agit d'espaces (resp. fibrés) vectoriels sur Λ .

1. Le théorème de N. KUIPER.

Dans [4], N. KUIPER a prouvé le résultat suivant :

THÉORÈME. - *Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. Soit $L(H)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de H , muni de la topologie de la norme. Alors le groupe $GL(H)$ des éléments inversibles de $L(H)$, muni de la topologie induite par celle de $L(H)$, est contractile.*

Voici les principales étapes de la démonstration de ce théorème.

1° *Réduction à la contractibilité faible.* - $GL(H)$ étant ouvert dans $L(H)$, le lemme 1 ci-dessous montre qu'il suffit de prouver que $GL(H)$ est faiblement contractile (i. e. que tous ses groupes d'homotopie sont nuls).

LEMME 1 (cf. MILNOR [7]). - *Soit U un ouvert d'un espace vectoriel localement convexe métrisable E . Il existe un complexe simplicial N , une application continue $\varphi : U \to N$ et une application continue $\psi : N \to U$ affine sur les simplexes de N telles que $\psi\varphi$ soit homotope à l'identité de U .*

Démonstration du lemme 1. - Choisissons sur E une métrique invariante par translation et pour laquelle les boules soient convexes. Pour tout $x \in E$ et tout nombre réel $r > 0$, notons $B(x , r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r . Soit $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de U par des boules $U_i = B(x_i , r_i)$ telles que $B(x_i , 3r_i) \subset U$ pour tout $i \in I$. $\mathfrak{U}$ jouit alors de la propriété suivante :

(1) Si $(i_o , \dots , i_p)$ est un simplexe du nerf N de $\mathfrak{U}$, l'enveloppe convexe de $U_{i_o} \cup \dots \cup U_{i_p}$ est contenue dans U .

Soit maintenant $\varphi : U \to N$ l'application continue définie par une partition de l'unité $(\varphi_i)_{i\in I}$ sur U subordonnée à $\mathcal{U}$. Définissons d'autre part, grâce à (1), une application continue $\psi : N \to U$ en posant $\psi(i) = x_i$ si i est un sommet de N et en prolongeant ψ de manière affine aux simplexes de N. Alors $\psi\varphi$ est homotope à l'identité de U, car, en vertu de (1), le segment joignant x à $\psi\varphi(x)$ est contenu dans U pour tout $x \in U$, ce qui démontre le lemme 1.

(Remarque : on aurait pu montrer aussi que $\varphi\psi$ est homotope à l'identité de N.)

2° Réduction à (a). - Soit $f : S^n \to GL(H)$ une application continue. Il existe alors une triangulation P de S^n et une application continue $f_1 : S^n \to GL(H)$, homotope à f et telle que la restriction de f_1 à chaque simplexe de P soit linéaire affine.

En effet, avec les notations du lemme 1, où $E = L(H)$ et $U = GL(H)$, soit P une triangulation finie de S^n telle que le recouvrement de S^n formé par les étoiles des sommets de P soit plus fin que $f^{-1}(\mathcal{U})$. Choisissons pour chaque sommet p de P un indice $i(p)$ tel que l'image par f de l'étoile de p soit contenue dans $U_{i(p)}$. L'application $f_1 : S^n \to GL(H)$, définie en posant $f_1(p) = x_{i(p)}$ si p est un sommet de P et en prolongeant de manière affine aux simplexes de P, répond à la question.

Comme $f_1(S^n)$ est contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de $L(H)$, le théorème sera donc démontré si l'on prouve l'assertion suivante :

(a) Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de $L(H)$. Alors l'injection canonique $V \cap GL(H) \to GL(H)$ est homotope à l'application constante

$$V \cap GL(H) \to 1 \in GL(H) .$$

3° Réduction au cas séparable. - On remarque qu'il suffit de démontrer (a) lorsque H est séparable (i. e. de dimension $\aleph_0$). En effet, si A est la sous-$*$-algèbre unitaire engendrée par V, il existe une famille $(H_i)_{i\in I}$ de sous-espaces séparables de H, stables par A et deux à deux orthogonaux, telle que $H = \bigoplus_{i\in I} H_i$ (somme hilbertienne). Pour le voir, on considère l'ensemble des familles $(H_i)_{i\in I}$ de sous-espaces séparables de H stables par A et deux à deux orthogonaux. Ordonné par inclusion, c'est un ensemble inductif. Soit $(H_i)_{i\in I}$ un élément maximal, et soit H' l'orthogonal de la somme hilbertienne $\bigoplus_{i\in I} H_i$. Alors H' est stable par A. Si H' était de dimension $\geqslant \aleph_0$, il existerait un sous-espace séparable $H'' \subset H'$ et AH'' serait un sous-espace séparable (puisque A admet une base algébrique dénombrable comme espace vectoriel sur Λ) orthogonal à tous les

H_i et stable par A, ce qui contredirait le caractère maximal de la famille $(H_i)_{i\in I}$. H' est donc de dimension finie, et l'on obtient la décomposition annoncée en remplaçant l'un des H_i par $H_i \oplus H'$.

4° Un lemme déjà connu sur les espaces de Hilbert séparables, et réduction à (b).

LEMME 2. - *Soient* H *un espace de Hilbert séparable et* H' *un sous-espace de* H *de dimension infinie. Notons* $GL(H, H')$ *le sous-groupe de* $GL(H)$ *formé des éléments qui induisent l'identité sur* H'. *Alors l'injection canonique*

$$GL(H, H') \to GL(H)$$

est homotope à l'application constante $GL(H, H') \to 1 \in GL(H)$.

Démonstration du lemme 2. - Par rapport à la décomposition $H = H'^{\perp} \oplus H'$, les éléments de $GL(H, H')$ s'expriment par des matrices du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & I \end{pmatrix}$ et l'application qui, à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & I \end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix} a & 0 \\ (1-t)b & I \end{pmatrix}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, définit une rétraction par déformation de $GL(H, H')$ sur $GL(H'^{\perp}) \times I_{H'}$.

Posons maintenant $H'^{\perp} = H''$, et identifions H' à la somme hilbertienne $H'' \oplus H'' \oplus \dots$ ($\aleph_0$ termes). L'application $s : GL(H'') \to GL(H)$ définie par $s(g) = g \oplus g^{-1} \oplus g \oplus \dots$ est homotope (par rotations), d'une part à l'injection $g \mapsto g \oplus I \oplus I \oplus \dots$, et d'autre part à l'application constante $g \mapsto I \oplus I \oplus \dots$, ce qui démontre le lemme 2.

Le lemme 2 montre qu'il suffit, pour prouver l'assertion (a) dans le cas H séparable, de prouver l'assertion suivante.

(b) *Soient* H *un espace de Hilbert séparable et* V *un sous-espace vectoriel de dimension finie de* $L(H)$. *Alors il existe un sous-espace* H' *de* H *de dimension infinie tel que l'injection canonique de* $V \cap GL(H)$ *dans* $GL(H)$ *soit homotope à une application de* $V \cap GL(H)$ *dans* $GL(H)$ *dont l'image soit contenue dans* $GL(H, H')$.

5° Dernière étape : démonstration de (b). - Supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, que V contienne l'identité, et soit $n = \dim V$. Il existe alors une suite $(a_i)_{i\in N}$ de vecteurs unitaires de H, et une suite $(E_i)_{i\in N}$ de sous-espaces de H de dimension $n + 1$ deux à deux orthogonaux tels que $Va_i \subset E_i$ pour tout i. (La construction par récurrence de ces deux suites est immédiate et laissée au lecteur.) Choisissons de plus, pour chaque i, un sous-espace F_i de E_i de dimension n contenant Va_i. Enfin, notons S_i la sphère unité de F_i.

Cela posé, on commence par déformer $K = V \cap GL(H)$ en K_1 dans $GL(H)$ de manière à avoir $K_1 a_i \subset S_i$ pour tout i. Considérons en effet l'application

$\lambda : K \times [0, 1] \to GL(H)$ définie par $\lambda(v, t)_{E'} = I_{E'}$ (où E' est l'orthogonal de la somme hilbertienne $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} E_i$) et

$$\lambda(v, t)_{E_i} = (1 - t + t/\|va_i\|)I_{E_i}$$

pour $(v, t) \in K \times [0, 1]$, et posons

$$\mu(v, t) = \lambda(v, t)v .$$

Alors $\mu : K \times [0, 1] \to GL(H)$ est une application continue telle que $\mu(\ , 0)$ soit l'injection canonique et $\mu(K, 1)a_i \subset S_i$ pour tout i .

On va maintenant déformer $K_1 = \mu(K, 1)$ en K_2 dans $GL(H)$ de manière que $K_2 a_i = a_i$ pour tout i . On va utiliser pour cela le lemme suivant :

LEMME 3. - Soient E un espace de Hilbert de dimension finie, F un hyperplan, a un vecteur unitaire de F . Notons $S(E)$ (resp. $S(F)$) la sphère unité de E (resp. F) et $U(E)$ le groupe unitaire de E . Il existe alors une application continue $f : S(F) \times [0, 1] \to U(E)$ telle que $f(x, 0) = I_E$ et $f(x, 1)x = a$ pour tout $x \in S(F)$.

Démonstration du lemme 3. - Considérons le fibré principal $p : U(E) \to S(E)$ défini par $p(u) = u^{-1}(a)$. Soit $S(E)'$ le complémentaire dans $S(E)$ d'un point de $S(E)$ non situé sur F . Alors $S(E)'$ est contractile et contient $S(F)$. Il existe donc, d'une part une section continue s de p au-dessus de $S(E)'$ telle que $s(a) = I_E$, et d'autre part une application continue $r : S(F) \times [0, 1] \to S(E)'$ telle que $r(x, 0) = a$ et $r(x, 1) = x$ pour tout $x \in S(F)$. L'application $f = sr : S(F) \times [0, 1] \to U(E)$ répond alors à la question.

Soient donc E un espace de Hilbert de dimension $n + 1$, F un hyperplan, a un vecteur unitaire de F , et $f : S(F) \times [0, 1] \to U(E)$ une application satisfaisant aux conditions du lemme 3. Donnons-nous, pour chaque i , une isométrie α_i de E_i sur E telle que $\alpha_i(F_i) = F$ et $\alpha_i(a_i) = a$. Notons

$$f_i : K_1 \times [0, 1] \to U(E_i)$$

l'application définie par

$$f_i(v, t) = \alpha_i^{-1} f(\alpha_i va_i, t)\alpha_i$$

pour $(v, t) \in K_1 \times [0, 1]$, et

$$\hat{f} : K_1 \times [0, 1] \to GL(H)$$

l'application définie par

$$\tilde{f}(v\ ,\ t)_{E'} = I_{E'} \quad \text{et} \quad \tilde{f}(v\ ,\ t)_{E_i} = f_i(v\ ,\ t)\ .$$

Alors l'application $\tilde{f}$ est continue, et l'application continue

$$g\ :\ K_1 \times [0\ ,\ 1] \to GL(H)$$

définie par $g(v\ ,\ t) = \tilde{f}(v\ ,\ t)v$ est telle que $g(\ ,\ 0)$ soit l'injection canonique et que $g(K_1\ ,\ 1)a_i = a_i$ pour tout i .

En composant les déformations de K en K_1 et de K_1 en $K_2 = g(K_1\ ,\ 1)$, on obtient finalement une homotopie entre l'injection canonique de K dans $GL(H)$ et une application de K dans $GL(H)$ dont l'image laisse fixe le sous-espace séparable H' de H engendré par le système orthonormal $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, ce qui démontre (b) et achève la démonstration du théorème.

2. Applications.

1° Contractibilité de $U(H)$. - Si H est un espace de Hilbert de dimension **infinie**, son groupe unitaire $U(H)$ est contractile.

En effet, $GL(H)$ s'identifie à $U(H) \times P(H)$, $P(H)$ désignant l'ensemble des endomorphismes hermitiens définis positifs de H , d'où le résultat, puisque $P(H)$ est contractile.

2° Trivialité de fibrés. - Si H est un espace de Hilbert de dimension infinie, tout fibré principal E de groupe $GL(H)$ (resp. $U(H)$) et de base paracompacte est trivial. En effet, le faisceau des germes de sections continues de E est mou (DIXMIER-DOUADY, [1], n° 11, lemme 4).

3° Contractibilité de la grassmannienne $G_{\infty,\infty}(H)$. - Si H est un espace de Hilbert séparable, la grassmannienne $G_{\infty,\infty}(H)$ des sous-espaces de H , de dimension et de codimension infinies, est contractile. En effet, soit $E \in G_{\infty,\infty}(H)$. L'application $p\ :\ U(H) \to G_{\infty,\infty}(H)$ définie par $p(u) = u(E)$ fait de $U(H)$ un fibré principal sur $G_{\infty,\infty}(H)$, de groupe $U(E) \times U(E^{\perp})$. Ce fibré est trivial d'après le 2°, donc $G_{\infty,\infty}(H)$ a le type d'homotopie de $U(H)$, i. e. est contractile.

Remarque. - Au contraire, la grassmannienne $G_n(H)$ des sous-espaces de dimension finie n de H n'est pas contractile, mais est un espace classifiant pour le groupe unitaire $U(n)$. Cela résulte de la contractibilité de la variété de Stiefel $V_n(H)$ des n-repères de H ; cette propriété était déjà connue avant le théorème de Kuiper, c'est une conséquence facile de la contractibilité de $U(H)$ pour la topologie simple forte (cf. DIXMIER-DOUADY, [1], n° 11).

4° Type d'homotopie de l'espace des opérateurs à indice de H . - Dans ce qui suit, H désigne un espace de Hilbert séparable. Soit C(H) l'espace des opérateurs compacts de H (c'est un idéal bilatère fermé de L(H)), et posons

$$L'(H) = L(H)/C(H) .$$

Soit $p : L(H) \to L'(H)$ l'épimorphisme canonique. Un théorème de E. MICHAEL, [6], (tout épimorphisme d'espaces de Banach admet une section continue) assure que p est une fibration. Notons F(H) l'espace des opérateurs à indice de H (i. e. dont le noyau et le conoyau sont de dimensions finies) et GL'(H) le groupe des éléments inversibles de L'(H) . On sait que

$$F(H) = p^{-1}(GL'(H)) ;$$

autrement dit, F(H) n'est autre que le fibré induit par L(H) au-dessus de GL'(H) . D'autre part, l'indice

$$i : F(H) \to \underline{Z} ,$$

défini par

$$i(f) = \dim \operatorname{Ker} f - \dim \operatorname{Coker} f ,$$

passe au quotient et définit un homomorphisme i' du groupe multiplicatif GL'(H) dans le groupe additif $\underline{Z}$. $GL'_o(H) = \operatorname{Ker} i'$ est la composante connexe de l'élément neutre dans GL'(H) , et GL'(H) s'identifie à $\underline{Z} \times GL'_o(H)$. De plus, $p^{-1}(GL'_o(H)) = F_o(H)$ est l'ensemble des opérateurs d'indice nul, et la restriction de p à l'ouvert $GL(H) \subset F_o(H)$ fait de GL(H) un fibré principal sur $GL'_o(H)$, de fibre le groupe $GC(H) = GL(H) \cap (I + C(H))$

PROPOSITION (PALAIS, [8]). - *Soit* $(e_n)_{n\in N^+}$ *une base orthonormale de* H . *Identifions* $GL(n , \Lambda)$ *au sous-groupe de* GL(H) *laissant fixe* e_i *pour* $i > n$ *et invariant le sous-espace engendré par* $e_1 , \dots , e_n$. *Posons*

$$GL(\infty) = \bigcup_{n\in \underline{N}} GL(n , \Lambda) \subset GL(H) .$$

Alors

a. *l'adhérence de* $GL(\infty)$ *dans* GL(H) *est égale à* GC(H) ;

b. *l'injection canonique* $GL(\infty) \to GC(H)$ *est une équivalence d'homotopie.*

Démonstration

a. Notons H' le sous-espace de H algébriquement engendré par les e_i, et V le sous-espace de $L(H)$ formé des éléments $f \in L(H)$ tels que $f(H) \subset H'$ et $f(e_i) = 0$, pour tout i, sauf un nombre fini. Alors V est dense dans l'espace des opérateurs de rang fini, qui, à son tour, est dense dans $C(H)$. L'assertion s'en déduit aussitôt, car $GL(\infty)$ coïncide avec l'ensemble des éléments inversibles de $I + V$.

b. C'est une conséquence de la densité de V dans $C(H)$ et du lemme suivant :

LEMME. - Soient E un espace vectoriel localement convexe métrisable, E' un espace vectoriel topologique, $f : E' \to E$ une application linéaire continue d'image dense. Alors, pour tout ouvert U de E, l'application $f|_{U'} : U' \to U$, où $U' = f^{-1}(U)$, est une équivalence d'homotopie.

(La démonstration de ce lemme se fait comme celle du lemme 1, en construisant un complexe simplicial N et des applications continues $\varphi : U \to N$, $\psi : N \to U'$ telles que $\psi\varphi$ soit inverse de $f|_{U'} : U' \to U$ à homotopie près.)

COROLLAIRE. - $F_0(H)$ est un classifiant pour le groupe unitaire infini

$$U = \varinjlim_n U(n, \Lambda) .$$

Démonstration. - $GL(H)$ étant contractile, le fibré principal $GL(H) \to GL_0'(H)$ est universel pour le groupe $GC(H)$. D'après la proposition, l'injection $U \to GC(H)$ est une équivalence d'homotopie. Il en résulte (DOLD [2]) que $GL_0'(H)$ est un classifiant pour U. Mais $F_0(H)$, fibré sur $GL_0'(H)$ de fibre $C(H)$, a le type d'homotopie de $GL_0'(H)$, d'où le corollaire.

Pour tout couple d'espaces topologiques (X, Y), notons $[X, Y]$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de X dans Y. Le corollaire précédent prouve l'existence d'un isomorphisme de foncteurs sur la catégorie des espaces compacts à valeurs dans la catégorie des ensembles $[\ , F(H)] \to K$. Dans [3] et [9], on construit, par une autre méthode, un tel isomorphisme. On montre de plus que $F(H)$ est un anneau à homotopie près([1]),et l'homomorphisme construit est un isomorphisme de foncteurs à valeurs dans la catégorie des anneaux. Voici brièvement comment on procède.

On considère, pour tout espace topologique X, la catégorie $C^{\infty}(X)$ des complexes bornés de fibrés hilbertiens (au sens de LANG [5], chap. 7) sur X, dont les ensembles de cohomologie sont, en chaque point, des espaces vectoriels de dimension

([1]) Si le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

finie. Passant au quotient dans $C^\infty(X)$ par la relation d'équivalence engendrée par déformation des complexes et addition de complexes acycliques, on obtient un groupe abélien noté $K^\infty(X)$. C'est même un anneau, le produit étant défini à partir du produit tensoriel des complexes. Une application continue de X dans $F(H)$ définit canoniquement un objet de $C^\infty(X)$ réduit aux degrés 0 et 1 ; on obtient donc, par passage au quotient, une application naturelle $\varphi_X : [X , F(H)] \to K(X)$. Si X est paracompact, le théorème de Kuiper entraîne que φ_X est une bijection. Grâce à cette bijection on peut munir $F(H)$ d'une structure d'anneau à homotopie près (l'addition s'interprétant comme la composition des opérateurs). D'autre part, la catégorie $C^\infty(X)$ contient la sous-catégorie $C(X)$ des complexes de fibrés de dimension finie. Passant au quotient dans $C(X)$ par la relation d'équivalence engendrée par déformation des complexes et addition de complexes acycliques de $C(X)$, on obtient le groupe usuel $K(X)$ (tout au moins si X est paracompact). L'injection $C(X) \subset C^\infty(X)$ définit par passage aux quotients un morphisme naturel $i_X : K(X) \to K^\infty(X)$. On démontre que si X est compact, i_X est un isomorphisme, l'isomorphisme inverse $\chi_X : K^\infty(X) \to K(X)$ correspondant, grosso modo, à une caractéristique d'Euler-Poincaré. On a donc finalement, pour tout X compact, un isomorphisme naturel

$$\chi_X \varphi_X : [X , F(H)] \to K(X)$$

respectant les structures d'anneaux.

On laisse au lecteur courageux le soin de s'assurer que cet isomorphisme coïncide avec l'isomorphisme construit à partir du corollaire ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIXMIER (J.) et DOUADY (A.). - Champs continus d'espaces hilbertiens et de C^*-algèbres, Bull. Soc. math France, t. 91, 1963, p. 227-284.

[2] DOLD (Albrecht). - Partitions of unity in the theory of fibrations, Annals of Math., Series 2, t. 78, 1963, p. 223-255.

[3] JAENICH (K.). - Vektorraum Bündel und der Raum der Fredholm-Operatoren, Dissertation Bonn, 1964.

[4] KUIPER (Nicolaas). - The homotopy type of the unitary group of Hilbert space, Topology (à paraître).

[5] LANG (Serge). - Introduction to differentiable manifolds. - New York, Interscience Publishers, 1962.

[6] MICHAEL (Ernest A.). - Continuous selections, I, Annals of Math., Series 2, t. 63, 1956, p. 361-382.

[7] MILNOR (John). - On spaces having the homotopy type of a CW-complex, Trans. Amer. math. Soc., t. 90, 1959, p. 272-280.

[8] PALAIS (Richard S.). - On the homotopy type of certain groups of operators, Topology (à paraître).

[9] SHIH Weishu. - Séminaire sur la K-théorie topologique, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette, 1964/65.