SÉMINAIRE N. BOURBAKI

GÉRARD RAUZY

Points transcendants sur les variétés de groupe

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. n° 276, p. 453-460

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__453_0>

Séminaire BOURBAKI
16e année, 1963/64, n° 276

Mai 1964

POINTS TRANSCENDANTS SUR LES VARIÉTÉS DE GROUPE

par Gérard RAUZY

(d'après Serge LANG [1])

Il est bien connu que si α est algébrique, et $\neq 0$, e^{α} est transcendant (voir SCHNEIDER [3], chap. 2, p. 43). Nous nous proposons de donner la démonstration par S. LANG d'une conjecture de CARTIER généralisant ce résultat :

THÉORÈME 1. - *Soit G une variété de groupe définie sur le corps des nombres algébriques $\underset{\sim}{K}$. Soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie à l'origine. Soit $\alpha \in \mathfrak{g}$, $\alpha \neq 0$ rationnel sur $\underset{\sim}{K}$, et soit $\exp_G$ le fonction exponentielle de G. Si $\exp_G(t\alpha)$ n'est pas une fonction algébrique de t, alors $\exp_G(\alpha)$ est transcendant sur $\underset{\sim}{K}$.*

1. Forme équivalente du théorème.

Nous allons ramener la démonstration du théorème à celle d'un théorème sur les variétés abéliennes. Pour cela, considérons tout d'abord le cas où G est un groupe linéaire : un vecteur tangent à l'origine est alors une matrice M, et $\exp(M)$ est donnée par $\exp(M) = \sum M^{\nu}/\nu!$.

L'hypothèse signifie alors que M est à coefficients algébriques, et que toutes les valeurs propres de M ne sont pas nulles (sinon M serait nilpotente, et $\exp(tM)$ serait un polynôme). Les valeurs propres sont elles-mêmes des nombres algébriques $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, et on peut trouver une matrice B, inversible, rationnelle sur $\underset{\sim}{K}$ telle que

$$B^{-1} M B = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_s \end{pmatrix}$$

où $M_\sigma = \begin{pmatrix} \alpha_\sigma & & N_\sigma \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_\sigma \end{pmatrix}$ est triangulaire.

D'autre part, $\exp(M)$ est rationnelle sur $\underset{\sim}{K} \Leftrightarrow B^{-1} \exp(M) B = \exp(B^{-1} M B)$ est rationnelle sur $\underset{\sim}{K}$, il suffit donc de montrer que $\exp(B^{-1} M B)$ ne peut pas être rationnelle sur $\underset{\sim}{K}$.

Mais

$$\exp(B^{-1} M B) = \begin{pmatrix} \exp M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp M_s \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \exp M_\sigma = \begin{pmatrix} e^{\alpha_\sigma} & & N'_\sigma \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_\sigma} \end{pmatrix}$$

en prenant l'un des α_σ différent. de 0 , on est ramené au résultat classique sur la fonction exponentielle ordinaire.

Dans le cas général, G contient un sous-groupe linéaire maximal L tel que $G/L = A$ soit une variété abélienne. Soit $\pi : G \to A$ la projection canonique, π est algébrique. Soit π_* l'homomorphisme induit sur les algèbres de Lie : $\pi_*(\alpha)$ est rationnel sur $\underset{\sim}{K}$.

Si $\pi_*(\alpha) = 0$, α est contenu dans l'algèbre de Lie de L , et on retombe dans le cas linéaire.

Si $\pi_*(\alpha) \neq 0$, il suffit de prouver que $\pi \circ \exp_G(\alpha)$ est transcendant (car si $\exp_G(\alpha)$ est rationnel sur $\underset{\sim}{K}$, il en est de même de $\pi \circ \exp_G(\alpha)$). Mais

$$\pi \circ \exp_G(\alpha) = \exp_A(\pi_*(\alpha)) \quad ,$$

on est donc ramené à prouver le théorème pour une variété abélienne A .

Dans ce cas, il existe un homomorphisme holomorphe $\Theta : \underset{\sim}{C}^d \to A$ induisant un isomorphisme holomorphe de $\underset{\sim}{C}^d/\Lambda$ sur A (Λ lattice periode). Si $(z_1 , \ldots , z_d)$ sont les coordonnées dans $\underset{\sim}{C}^d$, les dérivées partielles $\partial/\partial z_i$ forment une base de l'algèbre de Lie des dérivations invariantes sur A . Après un changement convenable de coordonnées, on peut supposer que cette base est définie sur $\underset{\sim}{K}$, c'est-à-dire que si f est une fonction méromorphe sur A définie sur K , alors $\partial f/\partial z_i$ est définie sur $\underset{\sim}{K}$ pour tout i . Un vecteur tangent est représenté par ses coordonnées $\alpha = (\alpha_1 , \ldots , \alpha_d)$, et est rationnel sur $\underset{\sim}{K}$ si tous les α_i sont des nombres algébriques. La fonction exponentielle est donnée par $\exp_A(t\alpha) = \Theta(t\alpha)$ (Remarquons alors que, dans ce cas, la fonction exponentielle est toujours une fonction transcendante).

On est donc ramené à prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soit A une variété abélienne de dimension d définie sur $\underset{\sim}{K}$. Soit Θ l'homomorphisme donné par les fonctions thêta, induisant un isomorphisme du tore $\underset{\sim}{C}^d/\Lambda$ sur A . Supposons les dérivations $\frac{\partial}{\partial z_i}$ définies sur $\underset{\sim}{K}$. Si $\alpha \in \underset{\sim}{C}^d$ est un vecteur complexe non nul, à coordonnées dans $\underset{\sim}{K}$, alors $\Theta(\alpha)$ est transcendant sur K . En particulier, les périodes sont transcendantes.

2. Démonstration du théorème 2.

Supposons $\Theta(\alpha)$ rationnel sur $\underset{\sim}{K}$, nous allons en déduire une contradiction en suivant une méthode analogue à celle de SCHNEIDER pour les courbes elliptiques, remplaçant les fonctions p et p' par les fonctions θ. Tout d'abord on peut toujours supposer, sans restreindre la généralité, que α, $\Theta(\alpha)$ et la loi de groupe de A sont rationnels sur une extension finie K de $\underset{\sim}{Q}$.

Mais alors $\Theta(t\alpha)$ est rationnel sur K pour t entier : choisissons une fois pour toutes m points de cette sorte (par exemple α, ..., $m\alpha$) avec $m > 4[K : \underset{\sim}{Q}]$

Soient d'autre part $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$ les coordonnées projectives de la représentation.

Quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que θ_1 ne s'annule en aucun des m points choisis. Soit alors $f_i = \theta_i/\theta_1$ $(i = 2, \ldots, N)$, les f_i sont holomorphes aux m points choisis, en outre les dérivées $\partial f_i/\partial z_j$ étant holomorphes quand les f_i le sont, elles appartiennent à l'anneau $K[f_1, \ldots, f_N]$

Soient alors $\overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_N$ les fonctions d'une variable obtenues en prenant $\Theta(t\alpha)$: l'anneau $K[\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_N]$ est stable pour la dérivation $D = d/dt$.

D'autre part, $\Theta(t\alpha)$ n'est pas une fonction algébrique de t, le degré de transcendance du corps $K(t, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_N)$ est donc $\geqslant 2$. Par ailleurs, les fonctions $\overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_N$ sont méromorphes dans tout le plan, et d'ordre inférieur ou égal à 2 (c'est-à-dire peuvent être représentées comme quotient de deux fonctions entières d'odre $\leqslant 2$, en l'occurence les fonctions θ).

Cela permet de conclure grâce au théorème suivant qui constitue l'essentiel de la démonstration.

THÉORÈME 3. - Soient $g_1, \ldots, g_N$ des fonctions méromorphes d'ordre fini $\leqslant \rho$. Soit K une extension algébrique finie de $\underset{\sim}{Q}$. Supposons que la différentiation $D = d/dt$ laisse stable l'anneau $K[g_1, \ldots, g_N]$ et que le corps des quotients soit de degré de transcendance $\geqslant 2$ par rapport à K. Soit S un ensemble de points du plan complexe ne contenant pas les pôles des g_i et tel que

$$w \in S \Rightarrow g_i(w) \in K .$$

Alors S est fini, et le nombre d'éléments de S est $\leqslant 2\rho[K : \underset{\sim}{Q}]$..

3. Démonstration du théorème 3.

Supposons que S contienne m points avec $m > 2\rho[K : \underset{\sim}{Q}]$, nous allons en déduire une contradiction. Nous appelons T l'ensemble des points $(g_1(w), \ldots, g_N(w))$

avec $w \in S$. Leurs coordonnées sont dans K . On va faire la démonstration en trois étapes, comme dans les démonstrations de SIEGEL, GEL'FAND, SCHNEIDER.

Notations. - Etant donné un polynôme $P(x_1 , \dots , x_N)$, nous définissons l'opérateur $\mathfrak{D}$ tel que

$$\mathfrak{D}P(x_1 , \dots , x_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial P}{\partial x_i} Q_i(x_1 , \dots , x_N) \quad ,$$

où les Q_i sont des polynômes à coefficients dans K tels que $\frac{dg_i}{dt} = Q_i(g_1,\dots,g_N)$, on a donc

$$(\mathfrak{D}^\lambda P)(g_1 , \dots , g_N) = I^\lambda(P(g_1 , \dots , g_N) \quad .$$

D'autre part, étant donné un nombre algébrique $\alpha \in K$, nous notons $|\alpha|$ le maximum des valeurs absolues des conjugués de α . De même, si $\underset{\sim}{\alpha} = (\alpha_1 , \dots , \alpha_N)$ est un système de nombres $\alpha_\nu \in K$, on notera $|\underset{\sim}{\alpha}|$ le maximum des $|\alpha_\nu|$. Si P est un polynôme à coefficients dans K , $|P|$ désignera le maximum des hauteurs de ses coefficients.

On appellera dénominateur pour un nombre $\alpha \in K$, pour un système de nombres $\alpha_\nu \in K$ ou pour un polynôme, un entier rationnel d tel que toutes les quantités $d\alpha$ intervenant soient des entiers algébriques.

Enfin on introduit, pour $P \in K[x_1 , \dots , x_N]$, la notation $P \prec P^*$, où $P^* \in \underset{\sim}{R}[x_1 , \dots , x_N]$ si tous les coefficients de P^* (nombres réels $\geqslant 0$) majorent la hauteur des coefficients correspondants de P . Pour un tel polynôme P^* , on notera $|P^*|$ le maximum de ses coefficients. De même, si $\alpha \in K$, $\alpha^* \in \underset{\sim}{R}$, on écrira : $\alpha \prec \alpha^*$ si $|\alpha| \leqslant \alpha^*$, et on posera $|\alpha^*| = \alpha^*$. Définitions analogues pour un système de nombres de K . On vérifie alors que toutes les opérations effectuées sur des polynômes : addition, multiplication, dérivation partielle, substitution d'un système de valeurs aux variables, laissent stables les relations $\prec$.

LEMME. - Nous nous donnons un polynôme $P(x_1 , \dots , x_N)$ à coefficients entiers algébriques de K , de degré au plus r par rapport à chaque variable, et un nombre λ entier $\geqslant 0$. Soit σ entier $> \max(r , \lambda)$, nous noterons C toutes les quantités ne dépendant pas de σ ni de $|P|$.

On a alors :

$$\begin{cases} \text{deg tot de } \mathfrak{D}^\lambda P \leqslant C\sigma & (\text{deg tot signifie le degré par rapport à l'ensemble des variables}) \\ |\mathfrak{D}^\lambda P(\underset{\sim}{\alpha})| \leqslant |P|(C\sigma)^\sigma & \forall \underset{\sim}{\alpha} = (\alpha_1 , \dots , \alpha_N) \in T \\ C^\sigma \text{ est un dénominateur pour tous les } \mathfrak{D}^{(\lambda)} P(\alpha) & (C \text{ entier}) \end{cases}$$

En effet, $\exists\, C$ tel que $\forall\, i = 1, \ldots, N$,

$$Q_i \prec C(1 + x_1 + \ldots + x_N)^C$$

et d'autre part,

$$P \prec |\overline{P}|(1 + x_1 + \ldots + x_N)^\sigma$$

donc

$$\mathfrak{D}P \prec C(1 + x_1 + \ldots + x_N)^C \sum_{i=1}^{N} |\overline{P}| \frac{\partial}{\partial x_i}(1 + x_1 + \ldots + x_N)^\sigma$$

$$\prec C\sigma\, |\overline{P}|(1 + x_1 + \ldots + x_N)^{C+\sigma}$$

d'où par récurrence

$$\mathfrak{D}^\lambda P \prec (C\sigma)^\lambda\, |\overline{P}|(1 + x_1 + \ldots + x_N)^{\lambda C+\sigma} \quad .$$

On en tire que

$$\deg \text{ tot } \mathfrak{D}^\lambda P < \lambda C + \sigma \leqslant C\sigma \quad .$$

En substituant $\underset{\sim}{\alpha} \prec (C, \ldots, C)$, pour $\underset{\sim}{\alpha} \in T$, on obtient

$$|\overline{\mathfrak{D}^\lambda P(\alpha)}| \leqslant (C\sigma)^\sigma\, |\overline{P}|$$

Enfin, si C est un dénominateur pour les Q_i, C est dénominateur pour $\mathfrak{D}P$, donc par récurrence C^σ est dénominateur pour $\mathfrak{D}^\lambda P$. Si en même temps C est dénominateur pour les $\underset{\sim}{\alpha} \in T$,

$$C^\sigma \times C^{\deg \text{ tot } \mathfrak{D}^\lambda P}$$

est dénominateur pour $\mathfrak{D}^\lambda P(\alpha)$, ce qui entraîne la dernière assertion.

Première étape. - Le degré de transcendance de $K[g_1, \ldots, g_N]$ est $\geqslant 2$, il existe donc deux fonctions, soient g_1 et g_2 algébriquement indépendantes. Alors $\forall\, \sigma$ assez grand, il existe un polynôme $P(X_1, X_2)$ à coefficients entiers algébriques de K, non identiquement nul, tel que :

$$\begin{cases} |\overline{P}| < (C\sigma)^\sigma \\ \deg P \text{ en } X_1 < [\sqrt{2m\sigma}] \text{ et } \deg P \text{ en } X_2 < [\sqrt{2m\sigma}] \\ \mathfrak{D}^\lambda P(\underset{\sim}{\alpha}) = 0\,, \quad \forall\, \lambda = 0, \ldots, \sigma - 1 \text{ et } \forall\, \underset{\sim}{\alpha} \in T \end{cases}$$

En effet, soit C^σ un dénominateur pour les $\mathfrak{D}^\lambda P(\underset{\sim}{\alpha})$, posons

$$P(X_1, X_2) = \sum_{\substack{i=0,\ldots,r \\ j=0,\ldots,r}} a_{ij} X_1^i X_2^j$$

et considérons les $m\sigma$ équations $C^\sigma \mathfrak{D}^\lambda P(\underset{\sim}{\alpha}) = 0$, $\underset{\sim}{\alpha} \in T$, $\lambda = 0, \ldots, \sigma - 1$

aux inconnues les a_{ij} , c'est-à-dire à $(r+1)^2$ inconnues.

Les $C^\sigma \mathfrak{D}^\lambda P(\underline{\alpha})$ sont des formes linéaires à coefficients entiers algébriques de K , par rapport aux a_{ij} . D'autre part, on a, $\forall P$, si $r \leqslant \sigma$:

$$\overline{|\mathfrak{D}^\lambda P(\underline{\alpha})|} \leqslant (C\sigma)^\sigma \overline{|P|} \quad .$$

En prenant pour polynôme particulier le polynôme $X_1^i X_2^j$, on voit que la hauteur du coefficient de a_{ij} dans $\mathfrak{D}^\lambda P(\underline{\alpha})$ est bornée par $(C\sigma)^\sigma$, donc les $m\sigma$ équations $C^\sigma \mathfrak{D}^\lambda P(\underline{\alpha})$ sont à coefficients entiers dans K et de hauteur bornée par $(C\sigma)^\sigma$. D'après le lemme 31, page 142, de SCHNEIDER [3]

si nous supposons $(r+1)^2 > m\sigma$, il existe une solution à ce système d'équations en a_{ij} entiers de K non tous nuls, et avec

$$\overline{|P|} \leqslant (C(r+1)^2 (C\sigma)^\sigma)^{m\sigma/((r+1)^2 - m\sigma)}$$

en particulier en prenant $r = [\sqrt{2m\sigma}]$, on a bien $\overline{|P|} \leqslant (C\sigma)^\sigma$.

Deuxième étape. - Soit τ l'entier minimum tel que $\exists\, \underline{\alpha} \in T$, $\mathfrak{D}^\lambda P(\underline{\alpha}) \neq 0$ et soit $\gamma = \mathfrak{D}^\lambda P(\underline{\alpha})$ pour cet $\underline{\alpha}$ (P étant le polynôme construit dans la 1re étape, $\tau \geqslant \sigma$).

Alors on a $|\gamma| \geqslant (C\tau)^{-\tau(s-1)}$ où $s = [K : \mathbb{Q}]$.

En effet, toujours d'après le lemme, en faisant jouer à τ le rôle de σ , on a $C^\tau \gamma$ entier de K et

$$\overline{|C^\tau \mathfrak{D}^\tau P(\underline{\alpha})|} \leqslant (C\tau)^\tau \quad .$$

Si $\gamma_1 = \gamma$, γ_2 , ... , γ_s sont les conjugués de γ , on a, puisque γ n'est pas nul et $C^\tau \gamma$ entier,

$$C^{\tau s} |\gamma| \prod_{t=2}^{s} |\gamma_t| \geqslant 1 \quad .$$

Mais $|\gamma_t| \leqslant \overline{|\gamma|} \leqslant (C\tau)^\tau$, d'où finalement

$$|\gamma| \geqslant (C\tau)^{-\tau(s-1)} \quad .$$

Troisième étape. - On a $|\gamma| \leqslant C^\tau \tau^{1-(m/2(\rho+\varepsilon))}$, $\forall\, \varepsilon > 0$, dès que $\tau > C(\varepsilon)$.

En effet, soit $F(z) = P(g_1(z) , g_2(z))$, la fonction $F(z)$ est méromorphe dans tout le plan holomorphe aux points $w \in S$, et l'on a, $\forall\, w \in S$, $D^\lambda F(w) = 0$ pour $\lambda = 0$, ... , $\tau - 1$, mais $\exists\, w_0 \in S$, $D^\tau F(w_0) \neq 0$ et $\gamma = D^\tau F(w_0)$.

D'autre part, il existe une fonction $\theta(z)$ entière d'ordre $\leqslant \rho$, telle que $g_1\,\theta$ et $g_2\,\theta$ soient entières d'ordre $\leqslant \rho$, la fonction $E(z) = \theta^{2r} P(g_1 , g_2)$ est donc entière.

Plus précisément, on peut écrire, si R assez grand, et si $|z| \leqslant R$,

$$|E(z)| \leqslant (C\sigma)^{\sigma} e^{rR^{\rho+\varepsilon}} \leqslant (C\tau)^{\tau} e^{\sqrt{\tau}R^{\rho+\varepsilon}} \qquad \forall\, \varepsilon > 0$$

On a évidemment $D^{\lambda} E(w) = 0$, $\forall\, w \in S$, $\lambda = 0$, ... , $\tau - 1$, et, au point $w_0 \in S$ tel que $\gamma = D^{\tau} F(w_0)$,

$$\gamma = (\theta(w_0))^{2r} D^{\tau} E(w_0) \quad .$$

La fonction

$$H(z) = \frac{E(z)}{\prod_{w \in S} (z - w)^{\tau}}$$

est donc une fonction entière, et l'on a

$$D^{\tau} E(w_0) = \tau!\, H(w_0) \prod_{w \neq w_0,\, w \in S} (w - w_0)^{\tau}$$

d'où finalement en majorant $\tau!$ par τ^{τ}

$$|\gamma| \leqslant (C\tau)^{\tau} |H(w_0)| \quad .$$

On va majorer $H(w_0)$ en utilisant le principe du maximum, pour R assez grand, on a on effet, si $|z| = R$,

$$|z - w| \geqslant CR \qquad \forall\, w \in S$$

d'où

$$|H(z)| \leqslant (C\tau)^{\tau} e^{\sqrt{\tau}R^{\rho+\varepsilon}} R^{-m\tau} \qquad \forall\, |z| \leqslant R \quad .$$

Prenons $R = \left(\frac{m\sqrt{\tau}}{\rho}\right)^{1/(\rho+\varepsilon)}$ on est assuré que, lorsque $\sigma \to \infty$, donc τ , $R \to \infty$, on a alors

$$|\gamma| \leqslant (C\tau)^{\tau} e^{\sqrt{\tau}(m\sqrt{\tau})/\rho} \left(\frac{m\sqrt{\tau}}{\rho}\right)^{-m\tau/(\rho+\varepsilon)} \leqslant C^{\tau}\, \tau^{(1-m/2(\rho+\varepsilon))\tau}$$

En comparant les deux majorations, on obtient une contradiction si

$$(C\tau)^{-\tau(s-1)} \geqslant C^{\tau}\, \tau^{\tau(1-(m/2(\rho+\varepsilon)))}$$

$$1 \geqslant C^{\tau}\, \tau^{\tau(s-(m/2(\rho+\varepsilon)))}$$

ce qui a certainement lieu pour un $\varepsilon > 0$, dès que $m > 2s\rho$.

4. Remarques.

On peut démontrer un résultat plus général que le théorème 3 (LANG [2]) en utilisant une intégrale de Cauchy à n variables. On a alors le théorème :

Soient K un corps de nombres, g_1 , ... , g_M des fonctions méromorphes d'ordre

$\leqslant \rho$ des n variables $z_1, \ldots, z_n$ telles que l'anneau $K[g_1, \ldots, g_M]$ est stable par les dérivations partielles $\frac{\partial}{\partial z_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Supposons le degré de transcendance du corps $K(g_1, \ldots, g_M) \geqslant n + 1$, et soit un ensemble S de points de $\underset{\sim}{C}^n$, qu'on peut mettre après changement convenable du système de coordonnées, sous la forme d'un produit $S_1 \times \ldots \times S_n$ où chaque S_i contient m nombres complexes distincts.

Alors, si pour tout point de S, on a $g_1(w), \ldots, g_M(w)$ dans K, on a nécessairement

$$m \leqslant b\rho\,[K : \underset{\sim}{Q}] \qquad (b \text{ ne dépendant que de } n)$$

Sous cette forme, on peut démontrer directement un résultat de SCHNEIDER sur les périodes des fonctions thêta (SCHNEIDER [4]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] LANG (Serge). - Transcendental points on group varieties, Topology, t. 1, 1962, p. 313-318.

[2] LANG (Serge). - Algebraic values of meromorphic functions. Columbia University.

[3] SCHNEIDER (Theodor). - Einführung in die transzendenten Zahlen. - Berlin, Springer-Verlag, 1957 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 81); Introduction aux nombres transcendants. Traduit de l'Allemand par Pierre Eymard. - Paris, Gauthier-Villars, 1959.

[4] SCHNEIDER (Theodor). - Zur Theorie der Abelschen Funktionen und Integrale, J. für die reine und angew. Math., t. 183, 1941, p. 110-128.