Bernard Malgrange

Majorations a priori et d''-cohomologie

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. nº 275, p. 447-452
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__447_0>

Séminaire BOURBAKI
16e année, 1963/64, n° 275

Mai 1964

MAJORATIONS A PRIORI ET d"-COHOMOLOGIE

par Bernard MALGRANGE

1. Introduction.

Depuis quelque temps, les méthodes de la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires ont été appliquées par divers auteurs à la théorie des fonctions de variables complexes. Citons notamment le travail fondamental de MORREY [7] sur le problème de Levi et le plongement des variétés analytiques réelles (contenant d'ailleurs un trou, comblé tout récemment par KOHN [6], puis MORREY lui-même [8]). Le même type de méthodes a récemment permis à ANDREOTTI-VESENTINI [1], [2] et à HÖRMANDER [4] de retrouver les résultats de la théorie des espaces p-convexes et p-concaves (au moins dans le cas des variétés), et à HÖRMANDER, loco citato, d'y apporter des compléments importants relatifs à la "cohomologie des formes différentielles à croissance donnée". Enfin, suivant une idée de SPENCER, KOHN [6] et HÖRMANDER [5] appliquent ces méthodes pour obtenir une nouvelle démonstration du "théorème de Frobenius complexe", dû à NIRENBERG.

Nous nous contenterons ici de traiter, d'après HÖRMANDER [4], la théorie de la d"-cohomologie dans les ouverts d'holomorphie de $\mathbb{C}^n$, en renvoyant à la littérature citée pour les autres questions, et notamment pour le lien entre ces méthodes et le "problème de d"-Neumann", de GARABEDIAN-SPENCER [3].

2. Majoration fondamentale.

Les théorèmes d'existence se déduiront du lemme suivant, qu'on laisse au lecteur le soin de démontrer. Les opérateurs non bornés dans des espaces de Hilbert qui y interviennent sont toujours de domaine (désigné par $D(.)$) dense, et de graphe fermé.

LEMME 1. - *Soient* H_0 , H_1 , H_2 , *trois espaces de Hilbert et soient* T , S , A *respectivement des opérateurs* $H_0 \to H_1$, $H_1 \to H_2$, $H_1 \to H_1$, *avec* $\operatorname{Im} T \subset \operatorname{Ker} S$ *et* $D(A) \supset D(T^*) \cap D(S)$. *Supposons que, pour tout* $x \in D(T^*) \cap D(S)$, *on ait*

$$|Ax|_1^2 \leqslant |T^* x|_0^2 + |Sx|_2^2 \ . \qquad (1)$$

Alors, pour tout $y = A^* z \in \operatorname{Im} A^* \cap \operatorname{Ker} S$, *il existe* $u \in D(T)$ *tel qu'on ait* $Tu = y$ *et* $|u|_0 \leqslant |z|_1$.

Remarque. - Lorsque A = identité, l'inégalité (1) est nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{Im}(S)$ soit fermé et qu'on ait $\mathrm{Im}\, T = \mathrm{Ker}\, S$.

On va chercher à établir une inégalité du type (1) dans la situation suivante :

Ω est un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$, de frontière C^2 ; φ est une fonction de classe C^2 dans $\overline{\Omega}$; H_i est l'espace des formes différentielles de type $(0, i)$ à coefficients appartenant à $L^2(\Omega)$, muni de la norme suivante : pour $i = 0$,

$$|f|_\varphi^2 = \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi} dX$$

dX = mesure de Lebesgue, et pour $i = 1, 2$ des normes analogues évidentes. Enfin on prend pour T l'opérateur d'' restreint aux $f \in L^2(\Omega)$ telles qu'on ait $d'' f \in H_1$ (i. e. les $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}$ appartiennent à $L^2(\Omega)$) et on définit S de la même manière.

Etudions d'abord l'opérateur T^* ; pour que $\omega \in H_1$ appartienne au domaine de T^*, il faut et il suffit qu'il existe $g \in H_0$, tel qu'on ait, pour tout $f \in D(T)$

$$\int f\overline{g}\, e^{-\varphi} dX = \sum \int \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} \overline{a}_j\, e^{-\varphi} dX \tag{2}$$

avec $\omega = \sum a_j\, d\overline{z}_j$, et l'on aura alors $g = T^* \omega$.

On vérifie immédiatement que (2) équivaut à la propriété suivante : Si l'on désigne par $\tilde{\omega}$ (resp. $\tilde{g}$) la forme ω (resp. la fonction g) prolongée par 0 en dehors de Ω, on doit avoir au sens des distributions dans $\mathbb{C}^n$:

$$e^{\varphi}\, \partial'\, e^{-\varphi}\, \tilde{\omega} = \tilde{g} \qquad \left(\text{avec } \partial' \omega = \sum \frac{\partial a_j}{\partial \overline{z}_j}\right).$$

Autrement dit, les $\omega \in D(T^*)$ sont celles qui vérifient, au sens des distributions, les conditions suivantes :

(3) $e^{\varphi}\, \partial'\, e^{-\varphi}\, \omega \in L^2(\Omega)$ (ou $\partial' \omega \in L^2(\Omega)$, ce qui revient au même)

(4) Les conditions de Cauchy de ω relativement à ∂' sont nulles sur $\partial\Omega$.

Pour pouvoir travailler avec cela, on a besoin du résultat suivant, qui se démontre par une variante de la méthode des "ramollisseurs de Friedrichs".

PROPOSITION 1. - Les formes de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$, et vérifiant (4), sont denses dans $D(T^*) \cap D(S)$ pour la "norme du graphe" $|\omega|^2 + |T^* \omega|^2 + |S\omega|^2$.

(L'utilisation de cette proposition est une simplification essentielle apportée par HÖRMANDER, aux travaux antérieurs de MORREY et KOHN, qui utilisent à la place des questions délicates relatives à la régularité au bord du "problème de d''-Neumann"; quant à ANDREOTTI-VESENTINI, ils utilisent un argument un peu différent, qui les oblige à munir Ω d'une métrique hermitienne complète.)

Supposons que, au voisinage de $\partial\Omega$, Ω soit **défini** par l'inégalité $\psi < 0$, ψ étant une fonction de classe C^2 (définie au voisinage de $\partial\Omega$), avec $d\psi$ partout $\neq 0$. Pour une forme $\omega = \sum a_j \, d\bar{z}_j$ à coefficients appartenant à $C^1(\Omega)$, la condition (4) s'écrit simplement

(4 bis)
$$\sum a_j \frac{\partial\psi}{\partial z_j} = 0 .$$

Pour un tel ω, on a la formule fondamentale suivante (due d'abord à MORREY, avec $\varphi = 0$, et à HÖRMANDER en général) :

THÉORÈME 1.

$$|T^*\omega|^2 + |S\omega|^2 = \int_\Omega \sum_{j,k} \left|\frac{\partial a_j}{\partial \bar{z}_k}\right|^2 e^{-\varphi}\, dX + \int_\Omega \sum a_j \bar{a}_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k} e^{-\varphi}\, dX$$
$$+ \int_{\partial\Omega} \sum a_j \bar{a}_k \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k} e^{-\varphi}\, dS \quad ,$$

dS étant la restriction à $\partial\Omega$ d'une forme vérifiant $d\psi \wedge dS = dX$.

Ce résultat s'établit au moyen d'une application répétée de la formule de Stokes, joint (pour le calcul de l'intégrale sur $\partial\Omega$) à la condition (4 bis).

Il serait trop long de commenter ici la raison profonde de ce genre de formules. Disons seulement qu'elles sont liées de façon étroite à la théorie de la "convexité par rapport à un opérateur différentiel" ; remarquer aussi l'analogie avec certaines formules de géométrie différentielle, notamment celles qui conduisent aux "vanishing theorems" de BOCHNER et KODAIRA.

3. Théorèmes d'existence.

Supposons maintenant Ω pseudo-convexe ; alors la condition de Levi indique précisément que l'intégrale de surface figurant dans la formule précédente est positive. On aura donc, en utilisant la proposition 1, pour tout $\omega \in D(T^*) \cap D(S)$:

(5)
$$\int_\Omega \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k} a_j \bar{a}_k e^{-\varphi}\, dX \leqslant |T^*\omega|^2 + |S\omega|^2 .$$

Supposons φ "strictement pseudo-convexe" dans $\bar{\Omega}$, i. e. supposons qu'en tout point de $\bar{\Omega}$, la forme

$$\sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k$$

soit positive non dégénérée, et appelons (χ_{jk}) la matrice inverse de

$$\Phi = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z_j \, \partial \bar{Z}_k}\right) \ ;$$

en appliquant (5) et le lemme 1 (avec $A = \Phi$), il vient le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - <u>Dans les hypothèses précédentes, pour tout</u> $\omega \in \sum a_j \, dZ_j$, <u>avec</u> $a_j \in L^2(\Omega)$, $d'' \omega = 0$, <u>il existe</u> $f \in L^2(\Omega)$ <u>avec</u> $d'' f = \omega$, <u>et</u>

$$\int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi} \, dX \leqslant \int_\Omega \sum \chi_{jk} \, a_j \, \bar{a}_k \, e^{-\varphi} \, dX \ .$$

On a donc, sous des hypothèses de régularité et, naturellement, de pseudo-convexité convenables sur Ω , un théorème de trivialité de la d''-cohomologie des formes L^2 . Mais en fait, on a beaucoup plus, à savoir la dernière inégalité. Cela permet, par des arguments de régularité et de passage à la limite, d'obtenir un résultat beaucoup plus général ; auparavant, rappelons quelques définitions.

a. Si Ω est un ouvert $\subset \mathbb{C}^n$, et φ une fonction localement intégrable dans Ω , à valeurs réelles, φ est dite pseudo-convexe si, pour tout vecteur

$$(t_1 \ , \ \ldots \ , \ t_n) \in \mathbb{C}^n \ ,$$

la distribution

$$\sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z_j \, \partial \bar{Z}_k} \, t_j \, \bar{t}_k$$

est une mesure positive.

En particulier, φ est nécessairement sous-harmonique. On peut donc, ce que nous ferons dans la suite, la supposer semi-continue supérieurement (en lui donnant éventuellement la valeur $-\infty$). On dira que la matrice hermitienne $A = (a_{ij})$, à coefficients continus dans Ω , est un minorant de φ si, pour tout $(t_1 \ , \ \ldots \ , \ t_n) \in \mathbb{C}^n$, la distribution

$$\sum \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z_j \, \partial \bar{Z}_k} - a_{jk}\right) t_j \, \bar{t}_k$$

est une mesure positive.

On dira enfin que φ est strictement pseudo-convexe si elle possède un minorant A qui soit inversible en tout point $Z \in \Omega$.

b. On dira qu'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ est pseudo-convexe s'il existe une fonction ψ pseudo-convexe dans Ω telle que, $\forall \ a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{Z \in \Omega \mid \psi(Z) < a\}$ soit relativement compact dans Ω .

Cela étant, on déduit du théorème 2 le résultat suivant :

THÉORÈME.3. - Soit Ω un ouvert pseudo-convexe $\subset \mathbb{C}^n$; soient φ une fonction strictement pseudo-convexe dans Ω, A un minorant inversible de φ, et $B = A^{-1}$. Pour toute forme $\omega = \sum a_j \, d\overline{Z}_j$ avec $d'' \omega = 0$, et

$$\int_\Omega b_{jk} \, a_j \, \overline{a}_k \, e^{-\varphi} \, dX < +\infty ,$$

il existe une fonction f vérifiant $d'' f = \omega$, et

$$\int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi} \, dX \leqslant \int_\Omega b_{jk} \, a_j \, \overline{a}_k \, e^{-\varphi} \, dX .$$

Exemple. - Prenons ψ pseudo-convexe dans Ω, et appliquons le résultat précédent à $\varphi = \psi + 2 \log(1 + |Z|^2)$; comme on a

$$\sum \frac{\partial^2}{\partial Z_j \, \partial \overline{Z}_k} \log(1 + |Z|^2) \, t_j \, \overline{t}_k \geqslant \frac{|t|^2}{(1 + |Z|^2)^2}$$

on pourra prendre ici $a_{jk} = \dfrac{\delta_{jk}}{(1 + |Z|^2)^2}$.

On trouve alors : Pour tout ω vérifiant $d'' \omega = 0$, et

$$\sum \int_\Omega |a_j|^2 \, e^{-\psi} \, dX < +\infty ,$$

il existe f vérifiant $d'' f = \omega$ et

$$\int |f|^2 \frac{e^{-\psi}}{(1 + |Z|^2)^2} \, dX \leqslant \sum \int |a_j|^2 \, e^{-\psi} \, dX ,$$

résultat qui, même dans le cas $\Omega = \mathbb{C}^n$, est beaucoup plus précis que ceux que l'on connaissait jusqu'ici.

Bien entendu, les mêmes résultats valent aussi pour la d''-cohomologie de type (p , q) ; nous l'avons seulement écrit dans le cas du type $(0 , 1)$ pour raccourcir l'exposé.

On déduit de là que la d''-cohomologie usuelle (= sans condition de croissance) est triviale dans tout ouvert pseudo-convexe, ce qui entraîne qu'un tel ouvert est un ouvert d'holomorphie (solution du problème de Levi). Prenons en effet une forme différentielle ω, de type $(0 , 1)$ pour fixer les idées, à coefficients localement L^2 ; il suffit d'établir qu'il existe φ pseudo-convexe dans Ω, tel que l'on ait

$$\sum \int |a_j|^2 \, e^{-\varphi} \, dX < +\infty \qquad (\omega = \sum a_j \, d\overline{Z}_j)$$

Pour cela, prenons ψ pseudo-convexe dans Ω, et tel que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{Z \in \Omega \mid \psi(Z) < a\}$ soit relativement compact dans Ω ; si χ est une fonction $\underset{\sim}{R} \to \underset{\sim}{R}$ croissante et convexe, il est connu que $\chi(\psi)$ est encore pseudo-convexe ; il suffit alors de prendre χ "assez rapidement croissante", et de poser $\varphi = \chi(\psi)$.

Enfin, les mêmes majorations, jointes à un argument standard de bidualité, conduisent à des théorèmes d'approximation, notamment le "théorème de Runge", et ses analogues pour les formes différentielles, et aussi à des théorèmes d'approximation plus fins, dont voici un exemple :

THÉORÈME 4. - Soit φ une fonction de classe C^2 , pseudo-convexe dans $\underset{\sim}{C}^n$. L'ensemble des fonctions f holomorphes dans $\underset{\sim}{C}^n$, et vérifiant pour un $\lambda \in \underset{\sim}{R}$ (dépendant de f),

$$\int |f|^2 \frac{e^{-\varphi}}{(1 + |z|^2)^\lambda} dX < + \infty ,$$

est dense dans l'espace des fonctions holomorphes sur $\underset{\sim}{C}^n$, muni de sa topologie usuelle.

(Ceci entraîne en particulier que ledit ensemble n'est pas réduit à 0 , ce qui est loin d'être trivial !)

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREOTTI (A.) et VESENTINI (E.). - Les théorèmes fondamentaux de la théorie des espaces holomorphiquement complets, Séminaire Ehresmann, t. 4, 1962-1963.

[2] ANDREOTTI (A.) and VESENTINI (E.). - Carleman estimates for the $\bar{\partial}$-operator, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques (à paraître).

[3] GARABEDIAN (P. R.) and SPENCER (D. C.). - Complex boundary value problems, Trans. Amer. math. Soc., t. 73, 1952, p. 223-242.

[4] HÖRMANDER (L.). - Existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator by L^2-methods (à paraître).

[5] HÖRMANDER (L.). - The Frobenius-Nirenberg theorem (à paraître).

[6] KOHN (J. J.). - Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds, I., Annals of Math., t. 78, 1963, p. 112-148 ; II. (à paraître).

[7] MORREY (C. B.). - The analytic embedding of abstract real-analytic manifolds, Annals of Math., t. 68, 1958, p. 159-201.

[8] MORREY (C. B.). - The $\bar{\partial}$-Neumann problem on strongly pseudo-convex manifolds (à paraître).