

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ARMAND BOREL

Cohomologie et rigidité d'espaces compacts localement symétriques

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. n° 265, p. 313-321

http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__313_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COHOMOLOGIE ET RIGIDITÉ D'ESPACES COMPACTS LOCALEMENT SYMÉTRIQUES

par Armand BOREL

Soient X un espace riemannien symétrique à courbure négative (sans composante euclidienne), G la composante neutre du groupe des isométries de X et Γ un sous-groupe de G qui est discret et uniforme (i. e. tel que $\Gamma \backslash G$ soit compact). On s'intéressera aux espaces de cohomologie $H^p(\Gamma, F_\rho)$ de Γ , à coefficients dans l'espace F_ρ d'une représentation ρ de dimension finie de G , ou en fait plus particulièrement à la nullité de $H^1(\Gamma, F_\rho)$. Ces espaces sont intervenus jusqu'à présent principalement dans trois questions, dont deux seront discutées dans les § 3 et § 4 et la troisième mentionnée en 2.5. On suppose ρ réelle.

Notations. - On rappelle que X est homéomorphe à un espace euclidien, que G est un groupe de Lie semi-simple, de centre réduit à (e) , sans facteur compact $\neq (e)$, et que $X = G/K$, où K est un sous-groupe compact maximal de G . Soient $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de G et K , et $\mathfrak{m}$ le complément orthogonal de $\mathfrak{k}$ par rapport à la forme de Killing $B(x, y) = \text{Tr}(\text{ad } x \circ \text{ad } y)$. On a les relations

$$(1) \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k},$$

qui expriment le fait que $s : \mathfrak{k} + \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{k} - \mathfrak{m}$ ($\mathfrak{k} \in \mathfrak{k}$, $\mathfrak{m} \in \mathfrak{m}$) est un automorphisme de $\mathfrak{g}$ (involution de Cartan). On désignera par (X_λ) ($1 \leq \lambda \leq n = \dim \mathfrak{g}$) une base orthonormale de $\mathfrak{g}$, par rapport à la forme (positive non-dégénérée) $B^*(x, y) = -B(x, s(y))$, dont les $N = \dim \mathfrak{m}$ premiers éléments engendrent $\mathfrak{k}$, et les $n - N$ derniers engendrent $\mathfrak{k}$, et par (ω_λ) la base duale de $\mathfrak{g}^*$. On identifie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ respectivement aux champs de vecteurs et 1-formes invariants à gauche sur G . La translation à gauche (resp. à droite) définie par un élément $g \in G$ est notée L_g (resp. R_g). Les indices i, j, k, h vont de 1 à N , et λ de 1 à n .

1. Les espaces de cohomologie $H^p(\Gamma, X, \rho)$.

1.1. - Le groupe Γ opère proprement sur X , et le quotient $M = \Gamma \backslash X$ est compact. Γ opère librement si et seulement s'il est sans torsion, auquel cas M est une variété compacte localement symétrique (une forme de Clifford-Klein compacte de X). Pour tout ce qui est discuté ici, on se ramène aisément à ce cas en considérant un sous-groupe distingué d'indice fini sans torsion Γ' de Γ , dont l'existence est assurée par un théorème de Selberg [10].

1.2. - Soit $A^p(X, F_\rho)$ ou simplement A^p l'espace des formes différentielles C^∞ sur X , à valeurs dans F_ρ ($p = 0, 1, \dots$) et $A(X, F_\rho)$, ou A , la somme directe des A^p . On fait opérer G sur A^p en associant à g l'application $\theta \mapsto \rho(g^{-1}) \cdot (\theta \circ L_g)$. Ces opérations commutent à la différentielle extérieure et la somme directe des espaces $A^p(\Gamma, X, F_\rho)$ d'éléments fixes par Γ est un sous-complexe, dont le p -ième espace de cohomologie est noté $H^p(\Gamma, X, \rho)$ (cf. [8]).

Soit σ la projection de X sur M . E_Γ associant à tout ouvert $U \subset M$ l'espace des sections sur $\sigma^{-1}(U)$ du faisceau constant $X \times F_\rho$, on définit sur M un faisceau $\mathcal{F}_\rho$. On a alors pour tout p des isomorphismes canoniques

$$(2) \quad H^p(\Gamma, F_\rho) \cong H^p(\Gamma, X, \rho) \cong H^p(M, \mathcal{F}_\rho) \quad .$$

Si Γ est sans torsion, $\mathcal{F}_\rho$ est localement constant, de fibre type F_ρ , la première égalité résulte de la suite spectrale des revêtements et de l'acyclicité de X , la deuxième du théorème de de Rham à coefficients tordus. Le cas général peut se ramener à celui-là à l'aide du groupe Γ' de 1.1. La première égalité résulte aussi du corollaire au théorème 5.3.1 de [3].

2. Formes harmoniques.

2.1. - Pour étudier $H^p(\Gamma, F_\rho)$, on transporte tout sur $\Gamma \backslash G$, en utilisant les projections :

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & X = G/K \\ \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \Gamma \backslash G & \xrightarrow{\quad} & M = \Gamma \backslash G/K \end{array} \quad .$$

On utilisera la même notation pour un élément de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}^*$) et le champ de vecteurs (resp. la 1-forme) qu'il définit canoniquement sur $\Gamma \backslash G$. Soit $\theta \in A^p(\Gamma, X, F_\rho)$. Pour tout $g \in G$, posons $\bar{\theta}_g = \rho(g^{-1}) \cdot (\theta \circ \pi)_g$. On définit ainsi une p -forme $\bar{\theta}$ sur G , visiblement invariante à gauche par Γ , d'où une p -forme θ^0 sur $\Gamma \backslash G$. On vérifie aisément que $\varphi : \theta \mapsto \theta^0$ est un isomorphisme de $A^p(\Gamma, X, \rho)$ sur l'espace $B^p(\Gamma, \rho)$ des p -formes sur $\Gamma \backslash G$, à valeurs dans F_ρ , qui vérifient

$$(4) \quad \Theta(X) \theta^0 = -\rho(X) \cdot \theta^0, \quad i(X) \cdot \theta^0 = 0 \quad (X \in \mathfrak{k}),$$

(où $\Theta(X)$ est la transformation infinitésimale associée à X , et $i(X)$ le produit intérieur par X). Une p -forme Θ sur $\Gamma \backslash G$ sera écrite sous la forme

$$\Theta = \sum_I \Theta_I \cdot \omega^I = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_p} \Theta_{\lambda_1, \dots, \lambda_p} \omega^{\lambda_1} \dots \omega^{\lambda_p},$$

où, par conséquent,

$$\Theta_I = \Theta(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_p}), \quad (I = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)),$$

est une fonction sur $\Gamma \backslash G$, à valeurs dans F_p . Si $\Theta \in B^p(\Gamma, \rho)$, la deuxième égalité de (4) montre que $\Theta_I = 0$ si I contient un indice $> N$.

Munissons F_p d'un produit scalaire $(\ , \)$ positif non-dégénéré, tel que $\rho(X)$ soit antisymétrique (resp. self-adjoint) si $X \in \mathfrak{k}$ (resp. $X \in \mathfrak{m}$) ce qui est toujours possible, et $\Gamma \backslash G$ de la métrique donnée par $ds^2 = \sum \omega^\lambda \cdot \omega^\lambda$. On définit alors sur l'espace des p -formes sur $\Gamma \backslash G$, à valeurs dans F_p , un produit scalaire par

$$\langle \Theta, \Theta' \rangle = \sum_I \int_G (\Theta_I, \Theta'_I) dv \quad (dv = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n).$$

On pose bien entendu $\langle \Theta, \Theta' \rangle = 0$ si Θ et Θ' sont homogènes de degrés différents.

2.2. PROPOSITION [8]. - La différentielle $d^0 = \varphi \circ d \circ \varphi^{-1}$ sur B a un adjoint $\delta^0 : B \rightarrow B$ diminuant le degré de 1. Si $\Theta \in B^p(\Gamma, \rho)$, on a

$$(i) \quad (d^0 \Theta)_{i_1 \dots i_{p+1}} = \sum_u (-1)^{u-1} (X_{i_u} + \rho(X_{i_u})) \Theta_{i_1, \dots, \hat{i}_u, \dots, i_{p+1}},$$

$$(ii) \quad (\delta^0 \Theta)_{i_1 \dots i_{p-1}} = \sum_k (\rho(X_k) - X_k) \Theta_{k i_1 \dots i_{p-1}} \quad (p \geq 1); \quad \delta^0 \Theta = 0$$

si $p = 0$.

Tout élément de $H^p(\Gamma, F_p)$ est représenté par une et une seule forme harmonique

($\Theta \in B^p(\Gamma, \rho)$ est harmonique si $d^0 \Theta = \delta^0 \Theta = 0$, donc si $\Delta \Theta = 0$ avec $\Delta = d^0 \delta^0 + \delta^0 d^0$.) Pour esquisser la démonstration, nous reprenons les notations $\Theta, \Theta', \Theta^0$ de 2.1. La relation (i) provient de l'égalité

$$\rho(X) = \rho(g^{-1}) \cdot d\rho_g(X), \quad (X \in \mathfrak{g}, \quad g \in G)$$

et du fait que, dans l'expression usuelle de $d\bar{\Theta}(X_{i_1}, \dots, X_{i_{p+1}})$, les termes où figurent les crochets $[X_{i_j}, X_{i_k}]$ sont nuls vu (1) et (4).

Soient $f, f' : G \rightarrow F_p$ des fonctions différentiables. Des formules

$$d \cdot i(X) + i(X) \cdot d = \Theta(X) \quad , \quad df = \sum X_\lambda f \cdot \omega^\lambda \quad ,$$

on déduit que $X_\lambda f \cdot dv$ est un cobord, d'où, par STOKES,

$$\langle X_\lambda f, f' \rangle = - \langle f, X_\lambda f' \rangle \quad .$$

On tire alors (ii) de (i) et du fait que $\rho(X)$ est self-adjoint si $X \in \mathfrak{m}$.

Supposons Γ sans torsion. On montre que

$$\langle \theta, \theta' \rangle = c \cdot \langle \theta, \theta' \rangle_M \quad (\theta, \theta' \in A^p(\Gamma, X, \rho)) \quad ,$$

où $\langle, \rangle_M$ est le produit scalaire associé à la métrique $ds^2 = \sum \omega^i \cdot \omega^i$: par suite ρ envoie formes harmoniques sur formes harmoniques, et la dernière assertion résulte du théorème de Hodge (à coefficients tordus). Pour le cas général, on peut s'appuyer sur [1], ou utiliser 1.1. (cf. [8]).

2.3. - Pour simplifier les notations, nous supposons ici $p = 1$ (et renvoyons à [8], § 7, pour le cas général). Soient $D : B^1 \rightarrow B^2$ et $D' : B^1 \rightarrow B^0$ les opérateurs définis par

$$(D\theta)_{ij} = X_i \cdot \theta_j - X_j \cdot \theta_i \quad , \quad D'\theta = - \sum_k X_k \cdot \theta_k \quad (\theta \in B^1(\Gamma, \rho)) \quad .$$

On vérifie sans grand mal que D et D' sont adjoints l'un de l'autre et que

$$(5) \quad (\Delta\theta)_i = \sum_k (\rho(X_k)^2 - X_k^2) \theta_i + \sum_k (\rho([X_i, X_k]) - [X_i, X_k]) \cdot \theta_k \quad ,$$

$$(6) \quad \langle \Delta\theta, \theta \rangle = \langle D\theta, D\theta \rangle + \langle D'\theta, D'\theta \rangle + \\ + \sum_{i,k} \langle \rho(X_k)^2 \theta_i, \theta_i \rangle + \sum_{i,j,k} \langle \rho([X_i, X_j]) \theta_j, \theta_i \rangle \quad .$$

Soit $V_\rho = \text{Hom}(\mathfrak{m}, \mathbb{F}_\rho)$. On définit sur V_ρ une forme quadratique $Q(u, v)$ en posant

$$(7) \quad Q(u, v) = \sum_{i,k} (\rho(X_k)^2 u(X_i) + \rho([X_i, X_k]) u(X_k), v(X_i)) \quad ,$$

qui, si l'on y remplace u et v par les valeurs de θ en un point de G , n'est autre que l'intégrant du dernier terme de droite de (6). Si maintenant θ est harmonique, le premier membre est nul, d'où la

2.4. PROPOSITION. - Si la forme quadratique de (7) est positive non-dégénérée, alors $H^1(\Gamma, \mathbb{F}_\rho) = 0$.

2.5. Généralisations. - [8] considère en fait les groupes $H^p(\Gamma, X, \rho)$ lorsque Γ est un sous-groupe discret uniforme d'une extension connexe G^* de G par un groupe compact P , et ρ une représentation réelle ou complexe de G^* .

Dans [8], on considère aussi le cas où X est un domaine borné symétrique et où l'on fait agir G sur $A^p(X, F)$ par l'intermédiaire d'un facteur d'automorphie (morphisme de $G^* \times X$ dans $GL(F)$) tel que $j(g.g'; x) = j(g', x).j(g, g'.x)$ qui est holomorphe sur X pour tout $g \in G^*$. Les espaces $H^p(\Gamma, X, j)$, $H^p(M, \mathfrak{F}_p)$ sont alors bigradués. Dans certains cas, $H^{N,0}(\Gamma, X, j)$ s'identifie à un espace de formes automorphes ([8], p. 413), ce qui généralise des résultats de EICHLER et SHIMURA. Voir aussi [9] pour d'autres applications.

3. Trivialité des déformations de Γ et de M .

3.1. THÉOREME. - Supposons que G ne contienne pas de sous-groupe distingué de dimension trois. Alors $H^1(\Gamma, g_{Ad}) = 0$.

Soit θ une forme harmonique, à valeurs dans $\mathfrak{g}$ vu comme espace de la représentation adjointe. Elle est somme de deux formes, à valeurs dans $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{m}$ respectivement, qui, vu (1) et (5), sont aussi harmoniques. Il suffit donc de faire voir que $\theta = 0$ lorsque θ est à valeurs soit dans $\mathfrak{k}$, soit dans $\mathfrak{m}$. Dans le premier cas, on déduit de (1), (3) que $B^*([X_i, \theta_j], X_k) = 0$ quels que soient i, j, k , ce qui montre que θ est à valeurs dans le centralisateur de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{k}$, mais ce dernier est nul puisque G est effectif. Si θ est à valeurs dans $\mathfrak{m}$, écrivons $\theta_i = \sum f_i^j X_j$. On voit alors que, en un point $g \in G$,

$$(8) \quad Q(\theta, \theta) = \frac{1}{2} \sum_{ij} (f_i^j)^2 + \sum_{ijk} R_{ihkj} f_j^i f_k^h, \quad ,$$

où R_{ihkj} est défini par $[[X_j, X_k], X_i] = \sum R_{ihkj} X_i$, et est donc une composante du tenseur de courbure de X . On montre assez facilement que cette forme est positive, et est non-dégénérée si $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéal de dimension trois (cf. [12]), et 3.1 résulte alors de 2.4.

3.2. - Supposons Γ sans torsion. Alors, vu (2), $H^1(\Gamma, g_{Ad})$ s'identifie au premier espace de cohomologie de M , à coefficients dans le faisceau des germes de champs de vecteurs de Killing. D'après la théorie des déformations (cf. [2], et un article à paraître de GRIFFITH), la nullité de $H^1(\Gamma, g_{Ad})$ signifie alors que " M n'a pas de modules", en tant que variété localement symétrique, c'est-à-dire que toute famille différentiable de formes de Clifford-Klein compactes de X est triviale (en fait, on n'a considéré ici que des quotients $\Gamma \backslash X$ avec $\Gamma \subset G$, mais le cas où Γ est dans le groupe total des isométries de X s'y ramène aisément).

3.3. - Soient P un groupe de Lie connexe, H un groupe de type fini, (h_i) ($1 \leq i \leq m$) un système générateur de H , et R l'ensemble des homomorphismes de H dans P . L'ensemble R s'identifie à un sous-espace fermé du produit P^m de m copies de P (voir ci-dessous), d'où une topologie sur R . Soit $r \in R$. On dira que toute déformation de $r(H)$ dans P est triviale si les homomorphismes $\text{Int } p \circ r : H \rightarrow P$ ($p \in P$) forment un voisinage de p dans R . On a alors

3.4. THÉOREME (WEIL [12]). - Soient G^* un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini, sans composante compacte ou de dimension trois, et Γ^* un sous-groupe discret uniforme de G^* . Alors toute déformation de Γ^* dans G^* est triviale.

Le groupe adjoint $\text{Ad } G^*$ de G^* s'identifie au groupe G de plus haut, pour un choix convenable de X , et l'image Γ de Γ^* dans $\text{Ad } G^*$ est un sous-groupe discret, uniforme. D'autre part, par la suite spectrale des extensions de groupes, on voit tout de suite que

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{\text{Ad}}) \cong H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{\text{Ad}}) \quad .$$

Comme Γ^* est de type fini [car si C est un ouvert relativement compact de G^* tel que $G^* = C \cdot \Gamma^*$, alors Γ^* est engendré par $\Gamma^* \cap C \cdot C^{-1}$], 3.4 résulte de 3.1 et de la proposition suivante :

3.5. PROPOSITION (WEIL [13]). - Reprenons les notations de 3.3 et soit p l'algèbre de Lie de P . Si $H^1(r(H), \mathfrak{p}_{\text{Ad}}) = 0$, alors toute déformation de $r(H)$ dans P est triviale.

Esquisse de démonstration : Soit H' le groupe libre sur $h_1, \dots, h_m$ soit w_ι ($\iota \in I$) une famille de mots en $2m$ indéterminées $X_1, \dots, X_{2m}$ tels que les conjugués, dans H' , des éléments de H' obtenus en remplaçant, dans les w_ι , X_i par h_i et X_{m+i} par h_i^{-1} ($1 \leq i \leq m$) engendrent le noyau de l'homomorphisme naturel $u : H' \rightarrow H$. Tout mot w_ι définit de façon évidente un morphisme de G^m dans G , qui sera noté W_ι . Un homomorphisme $r' : H' \rightarrow G$ est caractérisé par le point $x = (r'(h_i))$ de G^m , qui est arbitraire. Il se factorise par u si et seulement si x est dans l'intersection V des sous-ensembles $W_\iota^{-1}(e)$ ($\iota \in I$), donc R s'identifie à un fermé de G^m .

Soit $r : H \rightarrow G$ un homomorphisme ; soient Z, Z' les espaces de 1-cocycles, à valeurs dans p , de H, H' opérant par $\text{Ad} \circ r$ et $\text{Ad} \circ r \circ u$, et B l'espace des 1-cobords de H dans p . En vertu de l'identité des cocycles :

$z(x, x') = z(x) + \rho(x)(z(x'))$, on voit qu'un cocycle $z' \in Z'$ est complètement déterminé par les éléments $z'(h_i)$, qui sont arbitraires, et que z' représente (i. e. provient par inflation d'un) cocycle de H si et seulement si $z'(w_i) = 0$ ($i \in I$). Si l'on explicite convenablement ces conditions, on voit que Z s'identifie à l'intersection des noyaux des applications tangentes en $(r(h_i))$ aux morphismes W_i . Par ailleurs $z \in Z$ est un cobord si et seulement s'il existe $p \in \mathfrak{p}$ tel que $z(h) = p - \text{Ad } r(h)(p)$, et il est nécessaire et suffisant pour cela que cette condition soit vérifiée pour $h = h_1, \dots, h_m$. On en déduit facilement que B est l'image de l'espace $\mathfrak{p}$ par l'application tangente en e à $p \mapsto (\text{Int } p(r(h_1)), \dots, \text{Int } p(r(h_m)))$. Le fait que $Z = B$ implique la trivialité des déformations de $r(H)$ dans P résulte alors du lemme élémentaire suivant [13] :

3.6. LEMME. - Soient U, V, M_i ($i \in I$) des variétés différentiables, $\varphi : U \rightarrow V$, $\psi_i : V \rightarrow M_i$ des morphismes, tels que $\psi_i \circ \varphi$ soit constant ; soient

$$m_i = \psi_i \circ \varphi(U) \text{ et } R = \bigcap_i \psi_i^{-1}(m_i) \quad .$$

Soient $a \in U$, $b = \varphi(a)$, B l'image de l'espace tangent à U en a par $d\varphi$, et A l'intersection des noyaux des différentielles en b des morphismes ψ_i . Supposons que $A = B$. Alors, si V_0 est un voisinage ouvert suffisamment petit de b , $R \cap V_0$ est une sous-variété, contenue dans $\varphi(U)$.

3.7. Remarque. - 3.2. a démontré tout d'abord pour les espaces à courbure constante négative par CALABI (non publié), et 3.4 pour $\underline{SL}(n, \mathbb{R})$ par SELBERG [10]. Le résultat principal de [12], établi par une généralisation convenable de la méthode de Calabi, est essentiellement équivalent à 3.1, qui est démontré explicitement dans [8], par la même méthode. 3.4 a été d'abord obtenu en utilisant [11] et [12]. Depuis, WEIL a remarqué que l'on pouvait remplacer [11] par 3.5 (cf. [13]). Ajoutons encore que [11] et [12] démontrent 3.4 dans un cas un peu plus général : G peut avoir des facteurs non-compacts de dimension 3, pourvu que les projections de Γ^* sur ces facteurs ne soient pas discrètes.

4. Nombres de Betti de M .

4.1. - On prend ici pour ρ la représentation triviale de dimension 1. Alors

$$b_p = \dim H^p(\Gamma, \mathbb{R}) = \dim H^p(M, \mathbb{R})$$

est le p -ième nombre de Betti de M . Le problème ici est de savoir si, lorsque G ne contient pas de facteur de dimension trois, on a $b_1(M) = 0$ (contrairement à ce qui se passe lorsque $G = \underline{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$ et X est le plan de Poincaré). Cela équivaut à : le groupe des commutateurs $[\Gamma : \Gamma]$ de Γ est d'indice fini dans Γ ; en effet, si Γ est sans torsion, alors $\Gamma = \pi_1(M)$, donc $H_1(M) = \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$, et on passe de là au cas général en utilisant 1.1.

Ce problème a été étudié d'abord dans [6]. A toute algèbre de Lie simple non compacte $\mathfrak{q}$, MATSUSHIMA associe une certaine constante $A(\mathfrak{q})$, (par exemple, $A(\mathfrak{q}) = (\dim \mathfrak{q} - \dim \mathfrak{s})/4 \cdot \dim \mathfrak{s}$, où $\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre compacte maximale, si $\mathfrak{s}$ est simple), et considère la forme quadratique $H(\mathfrak{q})$ sur $\text{Hom}(\mathfrak{t}, \mathfrak{t})$ (où $\mathfrak{q} = \mathfrak{s} + \mathfrak{t}$ est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{q}$) obtenue à partir de la forme $Q(u, v)$ de (7) en remplaçant le facteur $1/2$ par $A(\mathfrak{q})$. On a alors le

4.2. THÉORÈME (MATSUSHIMA [6]). - Supposons que la forme $H(\mathfrak{q})$ soit positive non-dégénérée pour chaque composante simple $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{g}$. Alors $b_1(M) = 0$.

Soit θ une forme harmonique de $B^1(\Gamma, 1)$, (notations du § 2). Pour montrer que $\theta = 0$, il suffit de voir qu'elle est invariante par G , donc que $X_\lambda \theta_i = 0$ quels que soient λ, i . En effet, une forme invariante $\neq 0$ donnerait lieu à un élément non nul de $H^1(\mathfrak{g})$, qui est nul comme on sait. En fait, vu que $[m, m] = \mathfrak{t}$, il suffit de voir que $X_i \theta_j = 0$ ($i, j \leq N$). Pour cela, on considère l'intégrale J sur $\Gamma \backslash G$ de la somme $\Phi(\theta)$ des fonctions $(X_i X_j \theta_k - X_j X_i \theta_k)^2$. Envisageons en chaque point de $\Gamma \backslash G$ les $f_j^i = X_i \theta_j$ comme les composantes d'un élément $u \in \text{Hom}(m, m)$. En transformant Φ , on montre que $J \geq 0$ entraîne $0 \geq \int_{\Gamma \backslash G} H_g(u, u) dv$, où H_g est la somme des $H(\mathfrak{q})$ correspondant aux idéaux simples de $\mathfrak{g}$, d'où le théorème.

4.3. - Il reste à savoir quand $H(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ simple, est > 0 . Cela a lieu dans les cas suivants : X est un domaine borné, non isomorphe à une boule unité [6], $\mathfrak{g}$ provient par restriction des scalaires d'une algèbre complexe $\neq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ [4], $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ simple, G non de type G_2 ou de type : groupe unitaire d'une forme d'indice un (sur $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$) [5].

4.4. - Soit $I_p(X)$ l'espace des p -formes sur X , invariantes par G . On sait que

$$I_p(X) = H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) = H^p(G^u/K) \quad ,$$

où G^u est un sous-groupe compact maximal de la complexification de G , et que ses éléments sont des formes harmoniques. De plus, $I_p(X)$ s'identifie à l'ensemble

des éléments de $B^p(\Gamma, 1)$ invariants par G . On a donc une inclusion canonique $I_p(X) \subset H^p(\Gamma, R)$, et, comme $I_1(X) = 0$, le problème de 4.1 est un cas particulier du suivant étudié dans [7] : quand a-t-on $I_p(X) = H^p(M)$? On a un théorème analogue à 4.2, où $H(q)$ est remplacé par la forme $H(q)_p$ obtenue en substituant $A(q)/p$ à $A(q)$ dans $H(q)$. On trouvera dans [5] et [7] des tables de valeurs de q et p pour lequel $H(q)_p > 0$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAILY (W. L.). - The decomposition theorem for V -manifolds, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 862-888.
- [2] CALABI (E.). - On compact Riemannian manifolds with constant curvature, I., Differential geometry, p. 155-180. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Proc. Symp. in pure Math., 3).
- [3] GROTHENDIECK (A.). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku math. J., t. 9, 1957, p. 119-221.
- [4] KANETUKI (S.) and NAGANO (T.). - On the first Betti numbers of compact quotient spaces of complex semi-simple Lie groups by discrete subgroups, Scient. Papers Coll. gen. Educ. Univ. Tokyo, t. 12, 1962, p. 1-11.
- [5] KANETUKI (S.) and NAGANO (T.). - On certain quadratic forms related to symmetric Riemannian spaces, Osaka math. J., t. 14, 1962, p. 241-252.
- [6] MATSUSHIMA (Y.). - On the first Betti number of compact quotient spaces of higher-dimensional symmetric spaces, Annals of Math., Series 2, t. 75, 1962, p. 312-330.
- [7] MATSUSHIMA (Y.). - On Betti numbers of compact, locally symmetric Riemannian manifolds, Osaka math. J., t. 14, 1962, p. 1-20.
- [8] MATSUSHIMA (Y.) and MURAKAMI (S.). - On vector bundle valued harmonic forms and automorphic forms on symmetric spaces, Annals of Math., Series 2, t. 78, 1963, p. 365-416.
- [9] MATSUSHIMA (Y.) and SHIMURA (G.). - On the cohomology groups attached to certain vector-valued differential forms on the product of the upper-half planes, t. 78, 1963, p. 417-449.
- [10] SELBERG (A.). - On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces, Contributions to function theory, International Colloquium on function theory [1960. Bombay], p. 147-164. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1960.
- [11] WEIL (A.). - On discrete subgroups of Lie groups, Annals of Math., Series 2, t. 72, 1960, p. 369-384.
- [12] WEIL (A.). - On discrete subgroups of Lie groups, II., Annals of Math., Series 2, t. 75, 1962, p. 578-602.
- [13] WEIL (A.). - Remarks on the cohomology of groups, Annals of Math., Series 2 (à paraître).