JEAN GIRAUD

Analysis situs

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. n° 256, p. 189-199

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__189_0>

Séminaire BOURBAKI
15e année, 1962/63, n° 256

Mai 1963

ANALYSIS SITUS

par Jean GIRAUD.

Introduction. - On sait que, sur une variété algébrique, la topologie de Zariski est trop grossière pour l'étude des fibrés, en ce sens que certains, qui devraient l'être pour qu'on puisse les étudier commodément, ne sont pas localement triviaux. Pour remédier à cet inconvénient, SERRE [4] a introduit la notion de fibrés localement isotriviaux : un système fibré $(G, p : P \to S)$ (i. e. un S-schéma P où un schéma en groupes G opère à gauche en respectant le morphisme p) est dit localement isotrivial si, pour tout $s \in S$, il existe un voisinage U de s et un revêtement étale R de U tel que l'image inverse sur R du système fibré soit triviale, c'est-à-dire isomorphe au produit $G \times R$ où G opère par les translations à gauche. On voit que cette notion de localisation ne s'exprime pas en termes de S , mais fait intervenir la catégorie des schémas. D'une manière générale, suivant GROTHENDIECK (cf. [1]), on dira que l'on s'est donné une topologie sur une catégorie E (ici la catégorie des schémas) si, pour tout $S \in Ob(E)$, on s'est donné des familles de morphismes $(r_i : R_i \to S)_{i \in I}$, que l'on appellera familles couvrantes pour la topologie en question, (dans l'exemple ci-dessus, elles sont caractérisées par le fait que chaque R_i est un revêtement étale d'un ouvert de S , et que la réunion de ces ouverts recouvre S) de sorte que :

1° si $(r_i : R_i \to S)_{i \in I}$ est une famille couvrante et si $f : S' \to S$ est un morphisme, les produits fibrés $R'_i = R_i \times_S S'$ existent et que la famille $(r'_i : R'_i \to S')_{i \in I}$ soit couvrante,

2° si $(r_i : R_i \to S)_{i \in I}$ est une famille couvrante et si, pour tout $i \in I$, $(s_{i,a} : S_{i,a} \to R_i)_{a \in A_i}$ en est une autre, la famille $(r_i \circ s_{i,a} : S_{i,a} \to S)_{i \in I, a \in A_i}$ soit couvrante.

On exprime la première de ces propriétés en disant que l'ensemble des familles couvrantes est stable par changement de base et la deuxième en disant qu'il est stable par composition. Les deux sont vérifiées dans l'exemple ci-dessus. Une catégorie munie d'une topologie (en un sens légèrement différent qui sera précisé plus bas) est appelée un site. Un espace topologique "ordinaire" X définit un site $\underset{\sim}{Ouv}(X)$, dont la catégorie sous-jacente est la catégorie des ouverts de X , les familles couvrantes étant les recouvrements ouverts. La catégorie des espaces topologiques est elle-même un site, si l'on prend pour familles couvrantes les recouvrements ouverts et aussi les familles réduites à un seul morphisme $p : E \to S$, où E est un espace étalé sur S (au sens de [2]).

Etant donnée une "catégorie des valeurs" V (dans ce qui suit, ce sera toujours (Ens) ou (Ab) : les ensembles ou les groupes abéliens), on appelle catégorie des <u>préfaisceaux</u> définis sur E à valeurs dans V la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}(E^{\circ}, V)$ des foncteurs contravariants définis sur E à valeurs dans V. Etant donnée une topologie sur E, on dira qu'un préfaisceau P est <u>séparé</u> (resp. est un <u>faisceau</u>) si

(F.1) pour toute famille couvrante $(r_i : R_i \to S)_{i \in I}$, l'application

$$r : P(S) \to \prod_{i \in I} P(R_i)$$

est un monomorphisme (resp. si

(F.2) l'application r identifie $P(S)$ au noyau du couple d'applications :

$$(*) \qquad \prod_{i \in I} P(R_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I \times I} P(R_i \times_S R_j)\ ) \quad .$$

On n'a aucune peine à décalquer la théorie cohomologique des faisceaux (y compris l'image directe, etc.). Par exemple, la "topologie étale" introduite plus haut sur la catégorie des schémas conduit à la "cohomologie de Weil" promise par GROTHENDIECK (pour un commencement d'étude de cette topologie, voir [1]).

1. Les sites.

Nous allons montrer comment on peut remplacer les familles couvrantes par les cribles, un crible pouvant s'interpréter comme une classe d'équivalence de familles couvrantes, pour la notion analogue à celle de recouvrements équivalents, bien connue en cohomologie de Čech.

<u>DÉFINITION 1.1.</u> - Soit E une catégorie ; une sous-catégorie C de E est un <u>crible</u> si toute flèche de E dont le but appartient à C appartient elle-même à C.

Un crible est une sous-catégorie pleine, donc est caractérisé par son ensemble d'objets. Pour qu'une partie de $\mathrm{Ob}(E)$ soit l'ensemble d'objets d'un crible, il faut et il suffit qu'elle contienne la source de toute flèche de E dont elle contient le but. <u>Par exemple, si</u> $(G, p : P \to S)$ <u>est un système fibré, l'ensemble des changements de base</u> $S' \to S$ <u>qui le rendent trivial est l'ensemble d'objets d'un crible de</u> $E_{/S}$. Il est clair que la borne supérieure et inférieure de toute famille de cribles (dans l'ensemble des sous-catégories de E) existe et est un crible. On désignera par $\emptyset(E)$ l'ensemble ordonné des cribles de E. Soit $p : E' \to E$ un foncteur, il induit une application $\emptyset(p) : \emptyset(E) \to \emptyset(E')$, $C \rightsquigarrow C \times_E E'$; on posera souvent $C^p = \emptyset(p)(C)$, on a $(C^p)^q = C^{pq}$ et $Ob(C^p) = p^{-1}(Ob(C))$. En particulier, si $f : T \to S$ est une flèche de E, il lui correspond un foncteur :

$$(1.1) \qquad E_{/f} : E_{/T} \to E_{/S} , \qquad (x : X \to T) \rightsquigarrow (fx : X \to S) \qquad ,$$

et donc une application en sens inverse sur les cribles, qui sera notée $C \rightsquigarrow C^f$, $C \in \emptyset(E_{/S})$; on a $(C^f)^g = C^{fg}$.

Le passage des cribles aux familles couvrantes s'opère de la façon suivante. Soit E une catégorie, et soit $\mathcal{R} = (r_i : R_i \to S)_{i \in I}$ une famille de flèches de E ayant même but. Soit R le crible de $E_{/S}$ dont les objets sont les $x : X \to S$ tels qu'il existe $i \in I$ avec $Hom_S(X , R_i) \neq \emptyset$. On dira que R est le crible de $E_{/S}$ associé à $\mathcal{R}$. Soit $P : E^o \to V$ un préfaisceau, composant P avec le foncteur source

$$s : E_{/S} \to E , \qquad (x : X \to S) \rightsquigarrow X \qquad ,$$

puis, avec le foncteur d'inclusion $\iota : R \to E_{/S}$, on trouve un foncteur $P^R : R^o \to V$, $P^R = P \circ s \circ \iota$, dont la limite projective, qui sera notée $\varprojlim_R P$, s'interprète évidemment comme le noyau du couple d'applications (*) de l'introduction. Les conditions (F.1) (resp. (F.2)) peuvent donc se traduire en disant que le morphisme de restriction

$$(1.2) \qquad P(S) \approx \varprojlim P \circ s \xrightarrow{\rho} \varprojlim P \circ s \circ \iota = \varprojlim_R P$$

est un monomorphisme (resp. un isomorphisme).

De plus, si $V = (Ab)$ et si les produits fibrés qu'on va écrire existent dans E, on pose, pour tout $i = (i_o , \dots , i_n) \in I^{n+1}$, $n \in \underline{N}$, $R_i = R_{i_o} \times_S \dots \times_S R_{i_n}$ et on considère d'ordinaire le complexe semi-simplicial $C^*(\mathcal{R} , P)$, défini par $C^n(\mathcal{R} , P) = \prod_{i \in I^{n+1}} P(R_i)$. Il est facile de voir que son homologie donne les foncteurs dérivés du foncteur $P \rightsquigarrow \varprojlim_R P$, lesquels seront notés $\varprojlim_R^*$. Ceci montre que la cohomologie d'une famille couvrante peut s'interpréter de manière simple en termes du crible associé.

DÉFINITION 1.2. - Soit E une catégorie et soit, pour tout $S \in Ob(E)$, une partie non vide $J(S)$ de $\emptyset(E_{/S})$, i. e. un ensemble de cribles, tels que

(S.1) pour toute flèche $f : T \to S$ de E, on ait $J(S)^f \subset J(T)$.

On dira que les $J(S)$ définissent une <u>topologie</u> sur E si, de plus

(S.2) $\forall\ S \in \mathrm{Ob}(E)$, $\forall\ C \in \not{\!\!\mathscr{P}}(E_{/S})$, s'il existe $R \in J(S)$ tel que, pour tout $X \in \mathrm{Ob}(R)$, $C^X \in J(X)$ alors $C \in J(S)$,

(S.3) $\forall\ S \in \mathrm{Ob}(E)$, si $C \in \not{\!\!\mathscr{P}}(E_{/S})$ et s'il existe $R \in J(S)$ tel que $C \supset R$, alors $C \in J(S)$.

<u>Une catégorie munie d'une topologie est un site</u>. Les $R \in J(S)$, $S \in \mathrm{Ob}(E)$, sont appelés les <u>raffinements</u> de S pour la topologie en question. De ces axiomes on déduit :

(S'.2) $\forall\ S \in \mathrm{Ob}(E)$, $\forall\ R$ et $R' \in J(S)$, on a $R \cap R' \in J(S)$.

Etant donné un site E, on désigne par

$$(1.3) \qquad i(E) : \mathfrak{F}(E) \to \mathcal{P}(E)\text{, ou encore } i : \mathfrak{F} \to \mathcal{P} \quad ,$$

le foncteur d'inclusion de la catégorie des faisceaux dans la catégorie des préfaisceaux $\mathcal{P} = \underline{\mathrm{Hom}}(E^o, V)$, la première étant définie comme la sous-catégorie pleine de la seconde dont les objets sont les faisceaux.

Si l'on se donne, comme dans l'introduction, un ensemble de familles couvrantes stable par changement de base, les cribles associés définissent des $J(S)$ qui vérifient (S.1). Si, de plus, l'ensemble des familles couvrantes est stable par composition, on a (S.2). L'axiome (S.3) ne figure pas dans [1], il est pourtant utile dans les applications, étant entendu qu'il ne change pas la catégorie des faisceaux en vertu du lemme suivant.

LEMME 1.3. – Etant donné un préfaisceau $P : E^o \to V$, pour tout $S \in \mathrm{Ob}(E)$, désignons par $J(S)$ l'ensemble des cribles C de $E_{/S}$ tels que l'application ρ de (1.2) soit un monomorphisme (resp. un isomorphisme) et tels que, <u>de plus</u>, pour toute flèche de E, $f : T \to S$, il en soit de même de C^f (de sorte que les $J(S)$ vérifient (S.1)). Alors les $J(S)$ vérifient (S.2) et (S.3).

En vertu de ce lemme, on peut se donner une topologie sur une catégorie E en se donnant des faisceaux. Par exemple, la topologie la plus fine (celle qui a le plus de raffinements) pour laquelle les foncteurs représentables sont des faisceaux est appelée <u>topologie canonique</u> de E. On considère généralement une topologie moins fine que la topologie canonique, ce qui permet de connaître des faisceaux et aussi d'avoir une condition nécessaire pour qu'un foncteur soit représentable.

EXEMPLE 1.4. - Soit G un groupe (resp. un groupe profini) et soit E la catégorie des ensembles (resp. des ensembles finis) où G opère à gauche (resp. continûment). Un crible de S est un raffinement s'il contient assez d'objets pour recouvrir S. La catégorie des faisceaux en groupes abéliens est équivalente à celle des G-modules (resp. G-modules continus). Les groupes de cohomologie ordinaires (resp. de TATE) étant les dérivés du foncteur $F \rightsquigarrow F(e)$, où e est l'objet final de E (ensemble réduit à un seul élément), qui, plus bas, seront notés $H^*(e, F)$ cf. (1.11).

THÉORÈME 1.5. (faisceau associé à un préfaisceau d'ensembles ou de groupes abéliens). - Soit E un site. Le foncteur d'inclusion des faisceaux dans les préfaisceaux, $i : \mathfrak{F} \to \mathcal{P}$, admet un adjoint,(*) noté a, qui commute aux limites inductives quelconques (car c'est un adjoint) et aux limites projectives finies. Le foncteur i commute donc aux limites projectives quelconques.

Si $V = (Ab)$, on sait que $\mathcal{P}$ est une catégorie abélienne qui vérifie (Ab 5) et (Ab 3)*, admet un générateur et donc a suffisamment d'injectifs. Il résulte du théorème ci-dessus qu'il en est de même de $\mathfrak{F}$ et qu'un faisceau est injectif s'il l'est en tant que préfaisceau. Les limites projectives existent dans $\mathfrak{F}$ et se calculent comme dans $\mathcal{P}$, i. e. en prenant pour tout $S \in Ob(E)$ la limite projective des $P(S)$. Les limites inductives dans $\mathfrak{F}$ se calculent d'abord dans $\mathcal{P}$, puis on prend le faisceau associé.

La construction de a est bien connue (voir par exemple [1] ou [3]). Rappelons que, pour tout $S \in Ob(E)$, et tout préfaisceau P, on pose

$$(1.4) \qquad LP(S) = \varinjlim_{R \in J(S)} (\varprojlim_{R} P) \quad ,$$

qui est une limite inductive filtrante. On construit ainsi un préfaisceau LP, qui est séparé et qui est un faisceau si P est séparé. On pose $aP = LLP$. Si P est un faisceau, il est clair que $LP = P$.

En tous cas on a un foncteur :

$$(1.5) \qquad L : \mathcal{P} \to \mathcal{P} \quad ,$$

qui commute aux limites projectives finies, car il est construit à partir de limites projectives et de limites inductives filtrantes. Si $V = (Ab)$, on posera :

$$(1.6) \qquad \check{\mathcal{H}}^*(P) = R^* L(P) \quad ,$$

en langage imagé : "on définira la cohomologie de Čech des préfaisceaux comme les

(*) C'est-à-dire que, pour tout faisceau F et tout préfaisceau P, on a $Hom(aP, F) \simeq Hom(P, iF)$.

dérivés du foncteur L ". On la calcule comme suit :

Pour tout $S \in Ob(E)$, le foncteur $v_S : \mathcal{P} \to (Ab)$, $P \rightsquigarrow P(S)$, est exact. D'après (1.4), on a donc, à cause de (Ab 5) :

$$\check{\mathcal{H}}^*(P)(S) = \varinjlim_{R \in J(S)} (\varprojlim_R{}^* P) \qquad (1.7)$$

En posant, pour tout $R \in J(S)$:

$$H^*(R, P) = \varprojlim_R{}^* P \quad \text{et} \quad \check{H}^*(S, P) = \check{\mathcal{H}}^*(P)(S) \qquad (1.8)$$

on trouve :

$$\check{H}^*(S, P) = \varinjlim_{R \in J(S)} H^*(R, P), \qquad S \in Ob(E) \qquad (1.9)$$

ce qui, compte tenu de la remarque qui précède 1.2, justifie le nom de cohomologie de Čech.

On définit les préfaisceaux de cohomologie d'un faisceau comme les dérivés du foncteur d'inclusion $i : \mathfrak{F} \to \mathcal{P}$

$$\mathcal{H}^*(F) = R^* i(F) \qquad (1.10)$$

Si, pour tout $S \in Ob(E)$, on pose $\Gamma_S = v_S \circ i : \mathfrak{F} \to (Ab)$, $\Gamma_S(F) = F(S)$, on a, puisque v_S est exact :

$$\mathcal{H}^*(F)(S) = R^* \Gamma_S(F) \qquad (1.11)$$

que l'on note $H^*(S, F)$.

Si F est un faisceau, on a vu que $LF = F$, ou encore $i \approx L \circ i$, d'où <u>la suite spectrale reliant la cohomologie de Čech à la "vraie"</u>, car i transforme injectifs en injectifs :

$$R^p L(R^q i(F)) \Longrightarrow R^* i(F), \quad \text{qui s'écrit} \quad \check{\mathcal{H}}^p(\mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow \mathcal{H}^*(F) \qquad (1.12)$$

et qui donne, si on lui applique v_S :

$$\check{H}^p(S, \mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^*(S, F), \qquad S \in Ob(E) \qquad (1.13)$$

Cette dernière suite spectrale provient, par passage à la limite inductive sur $R \in J(S)$, de celle qui relie la cohomologie d'un raffinement à celle de l'espace, laquelle n'est autre que la suite spectrale des foncteurs composés $\Gamma_S \approx \varprojlim_R \circ i$, $S \in Ob(E)$, $R \in J(S)$;

$$H^p(R, \mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^*(S, F) \qquad (1.14)$$

Les suites spectrales (1.12) et (1.13) vérifient $E_2^{0,q} = 0$, si $q > 0$, car, pour tout faisceau F, les faisceaux associés aux préfaisceaux $\mathcal{H}^q(F)$ sont nuls, ce qui équivaut à $L\mathcal{H}^q(F) = 0$, $q > 0$. Ceci permet de montrer que tout faisceau

F, tel que $\check{\mathcal{H}}^q(F) = 0$, $q > 0$, est acyclique, i. e. vérifie $\mathcal{H}^q(F) = 0$, $q > 0$. En particulier, si l'on appelle <u>flasque</u> (ce n'est pas la notion classique), un faisceau F tel que, pour tout $S \in Ob(E)$ et tout $R \in J(S)$, on ait $H^q(R, F) = 0$, $q > 0$, on voit que tout faisceau flasque est acyclique. La réciproque est d'ailleurs vraie comme le montre la suite spectrale (1.14). On peut calculer la cohomologie à l'aide de faisceaux flasques.

2. <u>Morphismes de sites</u>.

Soit $f : E' \to E$ un foncteur et soit $X' \in Ob(E')$, posons $X = f(X')$. Soit $f_{/X'} : E'_{/X'} \to E_{/X}$ le foncteur induit par f sur les "catégories d'objets au-dessus de X' et de X",

$$(v, V \to X') \rightsquigarrow (f(v) : f(V) \to f(X')) \quad .$$

Soit R' un crible de $E'_{/X'}$, on notera ${}_fR'$ le plus petit crible de $E_{/X}$ qui contienne l'image de R' par $f_{/X'}$, et on l'appellera <u>crible image de</u> R' <u>par</u> f. Pour tout préfaisceau P, on a une application de restriction :

$$\text{(2.1)} \qquad \varprojlim_{{}_fR'} P \to \varprojlim_{R'} P \quad .$$

DÉFINITION 2.1. - Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux sites et soient E et E' les catégories sous-jacentes. <u>Un morphisme</u> $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est un foncteur (<u>en sens inverse</u>) $f : E' \to E$ tel que, pour tout $X' \in Ob(E')$ et tout raffinement R' de X' le crible image de R' par f soit un raffinement de $X = f(X')$ et tel que, <u>de plus</u>, pour tout préfaisceau d'ensembles P, l'application (2.1) soit une bijection.

Autrement dit "l'image d'un raffinement est un raffinement qui lui est cofinal". C'est la définition de [1], où le langage des cribles remplace celui des familles couvrantes.

EXEMPLE 2.2. - Soit $f : X \to Y$ une application continue ; elle induit un morphisme de sites $f : \underset{\sim}{Ouv}(X) \to \underset{\sim}{Ouv}(Y)$, défini par le foncteur en sens inverse $f : Ouv(Y) \to Ouv(X)$, $U \rightsquigarrow f^{-1}(U)$.

DÉFINITION 2.3. - Un <u>comorphisme</u> de sites $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est un foncteur (dans le même sens) sur les catégories sous-jacentes, $f : E \to E'$, tel que, pour tout $X \in Ob(E)$ et tout raffinement R' de $X' = f(X)$, le crible image inverse (cf. (1.1)) de R' par $f_{/X}$ soit un raffinement de X.

EXEMPLE 2.4. - Soit $f : X \to Y$ un morphisme de préschémas. Il induit, par composition avec f, un foncteur $f : (Sch)_{/X} \to (Sch)_{/Y}$ qui définit un <u>comorphisme de sites</u> (pour la topologie étale par exemple) $f : \underset{\sim}{(Sch)}_{/X} \to \underset{\sim}{(Sch)}_{/Y}$. Il y a aussi un morphisme $g : (\underline{Sch})_{/X} \to (\underline{Sch})_{/Y}$, induit par le foncteur changement de base : $g : (Sch)_{/Y} \to (Sch)_{/X}$, $V \rightsquigarrow V \times_Y X$. Même remarque si on remplace (Sch) par un site $\mathcal{E}$ et si $f^\bullet : X \to Y$ est une flèche de E. Le comorphisme existe toujours, le morphisme n'existe que si les produits fibrés existent dans E. Le comorphisme présente également l'avantage de permettre, dans le cas présent, de construire un foncteur $f_!$ qui est l'adjoint du foncteur f^* introduit ci-après.

Avant d'étudier les images directes et inverses de faisceaux par un morphisme et un comorphisme, un lemme pour fixer les notations.

LEMME 2.5. - Soit $u : E \to E'$ un foncteur. Il induit sur les catégories de préfaisceaux un foncteur en sens inverse :

(2.2) $$u^\bullet : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}, \qquad P' \rightsquigarrow P' \circ u \quad .$$

Si la catégorie des valeurs est (Ens) ou (Ab), le foncteur $u^\bullet$ admet un adjoint, qui sera noté u_+, et un co-adjoint, qui sera noté $u_\bullet$.

Ce fait est bien connu, rappelons seulement que, pour tout préfaisceau d'ensembles P sur E et tout $X' \in Ob(E')$, on a :

(2.3) $$u_\bullet P(X') = Hom(h_{X'} \circ u , P) \quad \text{où} \quad h_{X'} = Hom(\star , X') \quad .$$

PROPOSITION 2.6. - Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux sites, et soit :

1° $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ un morphisme défini par $f : E' \to E$. Pour tout faisceau F sur E, $f^\bullet(F)$ est un faisceau. On définit donc un foncteur image directe $f_* : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$ en imposant $i' \circ f_* = f^\bullet \circ i$, où i et i' sont les foncteurs d'inclusion des faisceaux dans les préfaisceaux. De plus, le foncteur $f^* = a \circ f_+ \circ i' : \mathfrak{F}' \to \mathfrak{F}$ est adjoint du précédent, (a est le foncteur faisceau associé).

2° $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ un comorphisme défini par $f : E \to E'$. Pour tout faisceau F sur E, $f_\bullet(F)$ est un faisceau, on définit donc un foncteur image directe $f_* : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$ en imposant $i' \circ f_* = f_\bullet \circ i$. Le foncteur

$$f^* = a \circ f^\bullet \circ i' : \mathfrak{F}' \to \mathfrak{F}$$

fournit alors un adjoint du précédent.

Ces foncteurs ont les propriétés formelles ordinaires des images directe et inverse de faisceau : f_* commute aux limites projectives quelconques, et f^* aux limites inductives quelconques. De plus, dans le cas 2°, f^* commute aux limites projectives finies (donc est exact). C'est aussi vrai dans le cas 1°, à condition de supposer que E et E' admettent des objets finaux et des produits fibrés finis et que f respecte l'objet final et ces produits. Auquel cas on voit que $\mathfrak{f}_*$, qui admet un adjoint exact, transforme injectifs en injectifs. Dans le cas 1°, on peut montrer que $\mathfrak{f}_*$ transforme faisceaux flasques en faisceaux $\mathfrak{g}_*$-acycliques. Ce qui permet, si $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{g}$ sont deux morphismes ou comorphismes, de composé $\mathfrak{f}\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, d'écrire une suite spectrale de Leray :

$$(2.4) \qquad R^p\, \mathfrak{f}_*(R^q\, \mathfrak{g}_*(F)) \Longrightarrow R^*(\mathfrak{f}\mathfrak{g})_*\,(F) \quad .$$

REMARQUE 2.7. – Dans le cas de l'exemple 2.4, on a un morphisme et un comorphisme. Les images directes et inverses coïncident. Plus généralement, soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux sites et soient $E \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} E'$ deux foncteurs tels que f soit adjoint de g. Pour que f induise un comorphisme $\mathfrak{f} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ il faut et il suffit que g induise un morphisme $\mathfrak{g} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$. Puisque f est adjoint de g, on a $f_\bullet = g^\bullet$, et donc $\mathfrak{f}_* = \mathfrak{g}_*$ et donc $\mathfrak{f}^* \simeq \mathfrak{g}^*$.

On calcule avec les morphismes comme avec les applications continues. En particulier, si $\mathfrak{f} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est un morphisme, et si F est un faisceau sur $\mathcal{E}$,, désignant par $f : E' \to E$ le foncteur qui induit $\mathfrak{f}$, on voit que les faisceaux $R^q\, \mathfrak{f}_*(F)$ sont les faisceaux associés aux préfaisceaux sur $\mathcal{E}'$,

$$X' \rightsquigarrow H^q(f(X')\, ,\, F) \quad .$$

On a également une suite spectrale, pour tout $X' \in \mathrm{Ob}(E')$ et tout faisceau F sur $\mathcal{E}$:

$$(2.5) \qquad H^p(X'\, ,\, R^q\, \mathfrak{f}_*(F)) \Longrightarrow H^*(f(X')\, ,\, F) \quad .$$

3. Appendice.

Soit V un schéma algébrique non singulier sur le corps des complexes $\underset{\sim}{C}$. Soit Et_g la catégorie des schémas étales sur V munie de la topologie pour laquelle tous les morphismes surjectifs sont couvrants. A tout V-schéma étale U, associons l'ensemble $\overline{U}$ de ses points à valeurs dans $\underset{\sim}{C}$, muni de sa topologie ordinaire. Si Et_c désigne la catégorie des espaces étalés (au sens de [2]) au-dessus de $\overline{V}$, on vient de construire un foncteur :

$$f : Et_g \to Et_c\, , \qquad U \rightsquigarrow \overline{U}$$

dont il est clair qu'il définit un morphisme de sites :

$$\mathfrak{f} : Et_c \to Et_g$$

où Et_c est munie de sa topologie canonique.

THÉORÈME 3.1. – Soit V un schéma algébrique <u>non singulier</u> sur $\underset{\sim}{C}$. Soit G un groupe fini. Soit $\overline{G}$ le faisceau simple sur Et_c associé à G. L'image directe $f_*(\overline{G})$ est le faisceau simple sur Et_g associé à G et, de plus, f induit des isomorphismes :

$$H^q(V , f_*(\overline{G})) \xrightarrow{\approx} H^q(\overline{V} , \overline{G}) , \qquad q > 0 \quad .$$

Le second terme désigne la cohomologie au sens de Et_c, qui est la cohomologie ordinaire, le premier la cohomologie de Weil, i. e. au sens de Et_g.

La démonstration, due à M. ARTIN, a été simplifiée par GROTHENDIECK. Elle repose sur le lemme suivant :

LEMME 3.2. (M. ARTIN). – Soit V un schéma algébrique non singulier sur un corps algébriquement clos. Soit $v \in V$. Il existe un voisinage U de v et un morphisme élémentaire $p : U \to Y$, où Y est un schéma algébrique non singulier.

DÉFINITION 3.3. – Un morphisme $p : U \to Y$ est dit élémentaire s'il existe un morphisme $\pi : X \to Y$, simple et propre, dont les fibres soient des courbes irréductibles, complètes et non singulières, tel que p soit le morphisme induit par π sur le complémentaire d'une multisection étale.

<u>Preuve du lemme</u>. – On peut plonger un voisinage U de v dans un espace projectif P de sorte que l'adhérence $\overline{U}$ de U soit normale, donc n'ait de singularités qu'en codimension $\geqslant 2$. Il suffit de projeter P convenablement sur un espace projectif de dimension $n - 1$, $n = \dim U$.

<u>Preuve du théorème</u>. – On raisonne directement pour $q = 0$ et $q = 1$. Pour $q = 1$, on interprète le premier groupe de cohomologie comme classifiant les revêtements étales de groupe G (GRAUERT-REMMERT).

Pour $q \geqslant 2$, on utilise la suite spectrale de "l'application continue f" :

$$H^p(V , R^q f_*(\overline{G})) \implies H^*(\overline{V} , \overline{G}) \qquad \text{(cf. (2.5))} \quad .$$

Il suffit de montrer que $R^q f_*(\overline{G})$ est nul pour $q > 0$, ou encore que, pour tout $v \in V$, il existe un voisinage U de v et un revêtement fini étale U' de U tel que l'image de

$$H^q(\overline{U} , \overline{G}) \to H^q(\overline{U'} , \overline{G}) , \qquad q > 0 \quad .$$

soit nulle ("éffaçabilité de la cohomologie transcendante"). On raisonne par récurrence sur $n = \dim V$. C'est trivial si $n = 0$, supposons le résultat démontré pour $n' < n$. Soit U un voisinage d'Artin de v et $p : U \to Y$ un morphisme élémentaire. Le morphisme π : $X \to Y$ qui induit p est simple et propre, la fibration est donc localement triviale. Il en résulte qu'il existe un revêtement étale R de Y tels que les $R^q\,\overline{p}_*(\overline{G})$ deviennent constants, où $\overline{p}$: $\overline{U} \to \overline{Y}$ est l'application continue déduite de p. Leur appliquant l'hypothèse de récurrence, on voit que la suite spectrale de l'application $\overline{p}$ donne, en passant à la limite sur les revêtement R de Y ; des isomorphismes :

$$\varinjlim_{R} H^0(\overline{R'}\ ,\ R^q\,\overline{p}_*(\overline{G})) \approx \varinjlim_{R} H^q(\overline{R}\ ,\ \overline{G})\ , \qquad R' = R \times_Y U \quad .$$

D'où la conclusion pour $q \geqslant 2$, parce que p est fibré en courbes affines non singulières et que la fibration est localement triviale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (Michael). - Grothendieck topologies. Harvard University.

[2] GODEMENT (Roger. - Topologie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 13).

[3] HELLER (A.) and ROWE (K. A.). - On the category of sheaves, Amer. J. of Math., t. 84, 1962, p. 205-216.

[4] SERRE (Jean-pierre). - Espaces fibrés algébriques, Séminaire Chevalley, t. 2, 1958 : Anneaux de Chow et applications, n° 1, 37 p.