

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-LOUIS KOSZUL

Théorèmes de points fixes pour les groupes élémentaires

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. n° 251, p. 139-144

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__139_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES DE POINTS FIXES POUR LES GROUPES ÉLÉMENTAIRES

par Jean-Louis KOSZUL

(d'après A. BOREL [1], [2])

1.

Soit G un groupe compact opérant continûment dans un espace localement compact X et soit F le sous-espace des points de X invariants par G . Si p est premier, si $G = \mathbb{Z}_p$ et si X est une sphère S^n de dimension n , alors l'anneau de cohomologie mod p de F est isomorphe à l'anneau de cohomologie mod p d'une sphère S^r , avec $-1 \leq r \leq n$, S^{-1} désignant l'espace vide. De plus, si p est impair, $n - r$ est pair. Pour p et n impairs, on a donc $F \neq \emptyset$ et lorsque $F \neq \emptyset$, $\dim H^*(X, \mathbb{Z}_p) = 2 = \dim H^*(F, \mathbb{Z}_p)$. C'est là un théorème bien connu de P. SMITH. Les résultats dont il sera question consistent avant tout à établir, qu'avec des hypothèses sensiblement moins restrictives, il y a encore égalité entre la dimension de la cohomologie de X et la dimension de la cohomologie de F . Le groupe G ne sera pas nécessairement cyclique ; ce sera un "groupe élémentaire", c'est-à-dire un groupe $(\mathbb{Z}_p)^r$ (p premier) ou un tore T^r de dimension r . Du côté de l'espace X , les hypothèses portent essentiellement sur la position cohomologique de X dans l'espace fibré universel de fibre X de groupe G .

2. Inégalité $\dim H^*(X) \geq \dim H^*(F)$.

On notera E_G un espace fibré principal universel de groupe G , B_G la base de E_G , et X_G le fibré universel $(E_G \times X)/G$ de fibre X associé à E_G . L'espace F_G s'identifie à un sous-espace fermé de X_G dont le complémentaire s'identifie à $(X - F)_G$. La suite exacte de cohomologie, à supports compacts et à coefficients dans un corps K , peut donc s'écrire :

$$(*) \quad \dots H^i((X - F)_G) \rightarrow H^i(X_G) \rightarrow H^i(F_G) \rightarrow H^{i+1}((X - F)_G) \dots$$

Par bienséance et pour éviter des complications techniques, on traite directement la cohomologie des fibrés universels comme si E_G était compact, ce qui peut se justifier en passant par les fibrés N -universels.

Supposons que $G = \mathbb{Z}_p$ et que K soit de caractéristique p . Comme G opère librement dans $X - F$, $X - F$ a une structure de fibré principal de groupe G

et $(X - F)_G$ peut être considéré comme fibré associé de base $(X - F)/G$ et de fibre E_G . Puisque $H^i(E_G) = 0$ pour $i \geq 1$, on a donc

$$\dim H^i((X - F)_G) = \dim H^i((X - F)/G)$$

pour tout i . Supposons désormais que $\dim_K X$ soit finie (on rappelle que $\dim_K X \leq n$ signifie que $H^{n+1}(U, K) = 0$ pour tout ouvert $U \subset X$). Si Y est un sous-espace fermé de X ,

$$\dim_K X = \sup(\dim_K Y, \dim_K(X - Y)) \quad .$$

On démontre d'autre part que $\dim_K X/G = \dim_K X$. Par conséquent $\dim_K((X - F)/G) \leq \dim_K X$ et si $i > \dim_K X$, la suite exacte (*) montre qu'il existe un homomorphisme surjectif $H^i(X_G) \rightarrow H^i(F_G)$. Or F_G est homéomorphe à $F \times B_G$ et $\dim H^i(B_G) = 1$ pour tout $i \geq 0$, car $H^*(B_G)$ s'identifie à la cohomologie du groupe $G = Z_p$ opérant trivialement dans K . Compte tenu de la relation de Künneth, on a donc

$$\dim H^i(X_G) = \dim H^*(F)$$

pour tout $i > \dim_K X$. On sait d'autre part que le terme de rang deux de la suite spectrale du fibré X_G de base B_G est isomorphe à $H^*(G, H^*(X))$, ce qui donne l'inégalité

$$\dim H^i(X_G) \leq \sum_s \dim H^{i-s}(G, H^s(X))$$

pour tout i . Puisque $\dim H^j(G, L) \leq \dim L$ pour tout K -espace L où opère G et tout entier j , on obtient finalement

$$\dim H^i(X_G) \leq \dim H^*(X)$$

pour tout $i > \dim_K X$. On a donc au total :

$$\dim H^*(F) = \dim H^i(X_G) \leq \dim H^*(X)$$

pour tout $i > \dim_K X$. Pour qu'il y ait égalité, il faut et il suffit que dans la suite spectrale du fibré X_G , le terme de rang 2 coïncide avec le terme de rang infini et soit isomorphe à $H^*(B_G) \otimes H^*(X)$, c'est-à-dire que G opère trivialement dans $H^*(X)$. C'est aussi la condition pour que, à l'injection $X \rightarrow X_G$, définie par un point de E_G , corresponde un homomorphisme surjectif de $H^*(X_G)$ dans $H^*(X)$. D'une manière générale, on dira qu'un espace X , où opère continûment un groupe compact G , est totalement non homologue à 0 pour le corps de coefficients K s'il vérifie la condition :

(Tot, K) L'homomorphisme $H^*(X_G, K) \rightarrow H^*(X, K)$ est surjectif.

Un raisonnement analogue permet d'aboutir à des conclusions semblables dans le cas où G est un tore T de dimension 1, K étant dans ce cas un corps de

caractéristique 0. Une simple récurrence conduit alors au théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Soient K un corps de caractéristique 0 (resp. p premier), X un espace localement compact de K -dimension finie dans lequel opère continûment le groupe T^r (resp. Z_p^r). Si F est le sous-espace des points fixes, on a

$$\dim H^*(X, K) \geq \dim H^*(F, K) \quad .$$

Si $r = 1$, pour qu'il y ait égalité, il faut et il suffit que X vérifie (Tot, K) .

On remarquera qu'une partie du théorème de Smith cité plus haut est conséquence directe de ce théorème 1. En effet, si $G = Z_p$ et si $H^*(X, Z_p) \cong H^*(S^n, Z_p)$, on constate que, ou bien $F = \emptyset$, ou bien X vérifie (Tot, Z_p) auquel cas,

$$\dim H^*(F, Z_p) = \dim H^*(S^n, Z_p) = 2 \quad .$$

3. Inégalité $\dim H^*(F) \geq \dim H^*(X)$.

On supposera d'abord que $G = Z_p^r$. On numérottera les sous-groupes de G qui sont sous-groupe de stabilité d'un point de X de telle sorte que $G_\bullet = (e)$ (on suppose G effectif) et $\text{rang}(G_i) \leq \text{rang}(G_{i+1})$. Si G_m est le dernier terme de la suite (G_i) , pour que $F \neq \emptyset$, il faut et il suffit que $G_m = G$. Pour tout i ($0 \leq i \leq m$), X_i désignera le sous-espace fermé de X constitué par les points dont le sous-groupe de stabilité est d'indice $j \geq i$. Alors $X_i - X_{i+1}$ est le sous-espace des points de X ayant G_i pour groupe de stabilité.

Le corps K étant supposé de caractéristique p , supposons que X est compact et que $\dim_K X$ et $\dim H^*(X)$ soient finies. Il en est alors de même, quel que soit i , de X_i , $X_i - X_{i+1}$ et de $(X_i - X_{i+1})/G$. De plus, pour tout j , $H^j((X_i)_G)$ et $H^j((X_i - X_{i+1})_G)$ sont de dimension finie. Puisque $(X_{i+1})_G$ s'identifie à un sous-espace fermé de $(X_i)_G$ ayant pour complémentaire $(X_i - X_{i+1})_G$, en désignant par $P(Y)$ le polynôme ou série formelle de Poincaré d'un espace Y , on a

$$P((X_i)_G) \leq P((X_{i+1})_G) + P((X_i - X_{i+1})_G) \quad ,$$

l'inégalité portant sur les coefficients. Le sous-groupe de stabilité de tout point de $Y_i = X_i - X_{i+1}$ étant G_i , l'espace

$$(Y_i)_G = (E_G \times Y_i)/G = ((E_G/G_i) \times Y_i)/(G/G_i)$$

peut être considéré comme un fibré de base Y_i/G , de fibre E_G/G_i et de groupe structural G/G_i . En profitant de ce que G_i est facteur direct de G , on démontre que G/G_i opère trivialement dans $H^*(E_G/G_i)$. Le terme de rang 2 de

la suite spectrale de ce fibré a donc pour "polynôme" de Poincaré :

$P(Y_i/G) P(E_G/G_i)$. Comme E_G est un fibré principal universel pour G_i ,

$$P(E_G/G_i) = P(B_{G_i}) = (1-t)^{-r_i}$$

où $r_i = \text{rang}(G_i)$. En écrivant que le "polynôme" de Poincaré de $(Y_i)_G$ est majoré par celui du terme de rang 2 de la suite spectrale, on obtient :

$$P((X_i - X_{i+1})_G) \leq P((X_i - X_{i+1})/G)(1-t)^{-r_i} .$$

On a donc finalement, pour tout $i \leq m$:

$$P((X_i)_G) \leq P((X_{i+1})_G) + P((X_i - X_{i+1})/G)(1-t)^{-r_i} .$$

On en déduit que

$$P(X_G) \leq P(X_m/G)(1-t)^{-r_m} + Q(t)(1-t)^{-r_m-1}$$

où $Q(t)$ est un polynôme et où $Q(t)(1-t)^{-r_m+1}$ a tous ses coefficients ≥ 0 .
D'autre part, si X vérifie la condition (Tot, K) ,

$$P(X_G) = P(X) P(B_G) = P(X)(1-t)^{-r} .$$

On en déduit que, pour $0 \leq t < 1$, la valeur de $P(X)$ est au plus égale à la valeur de $P(X_m/G)(1-t)^{-r_m} + Q(t)(1-t)^{-r_m-1}$. Lorsque $t \rightarrow 1$, la valeur de $P(X)$ tend vers $\dim H^*(X) > 0$. Donc $r = r_m$, $G = G_m$ et

$$\dim H^*(X) \leq \dim H^*(X_m/G) = \dim H^*(F)$$

Pour pouvoir raisonner de la même manière dans le cas d'un groupe $G = T^r$, il est nécessaire de supposer que l'on ne trouve comme sous-groupe de stabilité de points de X qu'un nombre fini de sous-groupes de G . D'après un résultat de MOSTOW [4], ce sera toujours le cas si X est une variété compacte. En prenant la cohomologie à coefficients dans un corps de caractéristique 0 , on obtient alors comme majoration de $P((X_i - X_{i+1})_G)$ la série $P((X_i - X_{i+1})/G)(1-t)^{-r_i}$. Finalement, compte tenu du théorème 1, on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 2. - Soient K un corps de caractéristique 0 (resp. p premier), X un espace compact tel que $\dim_K X$ et $\dim H^*(X, K)$ soient finies dans lequel opère continûment un groupe T^r (resp. Z_p^r) . Si X vérifie la condition (Tot, K) et s'il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes de stabilité distincts, alors

$$\dim H^*(X, K) = \dim H^*(F, K)$$

où F désigne le sous-espace des points fixes.

4. Applications.

Espaces projectifs. - Il est parfois possible d'établir (Tot, K) , et par conséquent de démontrer l'existence de points fixes en utilisant seulement la structure de l'anneau de cohomologie de l'espace. En voici un exemple. Supposons que X soit un espace compact de Z_p -dimension finie et que $H^*(X, Z_p)$ soit isomorphe à $Z_p[x]/(x^{s+1})$ avec degré de $x = k$ et kp pair (exemples : espace projectif réel ($k = 1, p = 2$), complexe ($k = 2$), quaternionien ($k = 4$), octonionien ($k = 8, s = 2$)). Si $G = Z_p^r$ opère continûment dans X et si $(p, s + 1) = (1)$, alors X vérifie la condition (Tot, Z_p) . En effet, G opère trivialement dans $H^*(X, Z_p)$; le terme de rang 2 de la suite spectrale du fibré X_G est donc isomorphe à $H^*(X, Z_p) \otimes H^*(B_G, Z_p)$, et il coïncide avec le terme de rang $k + 1$. On a

$$0 = d_{k+1}(x \otimes 1)^{s+1} = (s + 1)(x^s \otimes 1)(d_{k+1} x),$$

donc

$$(s + 1) d_{k+1} x = 0.$$

Si $(p, s + 1) = 1$, on a donc $d_{k+1} x = 0$ et il en résulte que x appartient à l'image de l'homomorphisme $H^*(X_G, Z_p) \rightarrow H^*(X, Z_p)$.

Sous-groupes élémentaires des groupes de Lie compacts. - Soient L un groupe de Lie compact, U un sous-groupe fermé de L et G un sous-groupe élémentaire de L . On désignera par K un corps de caractéristique p si $G = Z_p^r$, et de caractéristique 0 si G est un tore. Dans l'espace L/U opère L et par restriction G . Si E_L est un espace fibré principal universel de groupe L , en choisissant $E_G = E_L$, tout point de E_L définit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L/U & \xrightarrow{\quad} & (L/U)_G \\ & \searrow & \downarrow \\ & & (L/U)_L \end{array}.$$

Pour que L/U considéré comme espace où opère G vérifie la condition (Tot, K) il est donc suffisant qu'il vérifie (Tot, K) en tant qu'espace où opère L , ce qui équivaut à dire que l'homomorphisme caractéristique $H^*(B_U, K) \rightarrow H^*(L/U, K)$ est surjectif. Compte tenu du théorème 2, on voit donc que, si l'homomorphisme caractéristique $H^*(B_U, K) \rightarrow H^*(L/U, K)$ est surjectif, le sous-espace des points de L/U invariants par G n'est pas vide, ou encore, U contient un sous-groupe conjugué de G . Ceci montre par exemple que, si $H^*(B_U, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(L/U, \mathbb{R})$ est surjectif, alors L et U ont même rang (prendre pour G un tore maximal

de L). Si U est un tore maximal de L et si L n'a pas de p -torsion, on sait que $H^*(B_U, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^*(L/U, \mathbb{Z}_p)$ est surjectif. Tout sous-groupe de L isomorphe à $\mathbb{Z}_p^r$ est donc en pareil cas contenu dans un tore maximal de L .

Tores opérant dans des variétés kählériennes. - Soit X une variété kählérienne compacte connexe, ou plus généralement, une variété compacte prédominant en cohomologie réelle les caractères d'une variété kählérienne ($H^2(X, \mathbb{R})$ contient une classe ω telle que le produit par ω^{n-p} applique bijectivement $H^p(X, \mathbb{R})$ sur $H^{2n-p}(X, \mathbb{R})$, avec $2n = \dim X$). Soit E un espace fibré compact de fibre X dont le groupe de structure est connexe. On sait, d'après un théorème de BLANCHARD, que pour que $H^*(E, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{R})$ soit surjectif, il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

$$1^\circ H^1(X, \mathbb{R}) = 0,$$

2° la projection de E sur sa base définit un homomorphisme injectif pour les anneaux de cohomologie à coefficients réels.

Soit G un tore opérant continûment dans X . La condition $(Tot, \mathbb{R})$ est vérifiée dans les deux cas suivants :

$$1^\circ H^1(X, \mathbb{R}) = 0,$$

2° il existe au moins un point de X invariant par G .

Dans ce dernier cas en effet, le fibré X_G a une section et $H^*(B_G, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(X_G, \mathbb{R})$ est donc injectif. Comme on sait d'autre part que le nombre des sous-groupes de G qui sont sous-groupes de stabilité de points de X est fini (résultats de MOSTOW), on peut dans ces deux cas appliquer le théorème 2 :

$$\dim H^*(F, \mathbb{R}) = \dim H^*(X, \mathbb{R}) \quad .$$

Lorsque X est une vraie variété kählérienne compacte et que le tore G y opère isométriquement, FRANKEL a démontré [3] que $H^*(F, \mathbb{R}) = \dim H^*(X, \mathbb{R})$ pour tout corps $\mathbb{R}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOREL (Armand). - Seminar on transformation groups. - Princeton, Princeton University Press, 1960 (Annals of Mathematics Studies, 46).
- [2] BOREL (Armand). - Fixed points of elementary commutative groups, Bull. Amer. math. Soc., t. 65, 1959, p. 322-326.
- [3] FRANKEL (T.). - Fixed points and torsion on Kähler manifolds, Annals of Math., Series 2, t. 70, 1959, p. 1-8.
- [4] MOSTOW (G.). - On a conjecture of Montgomery, Annals of Math., Series 2, t. 65, 1957, p. 513-516.