

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

LAURENT SCHWARTZ

Sous-espaces hilbertiens et antinoyaux associés

Séminaire N. Bourbaki, 1962, exp. n° 238, p. 255-272

http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__255_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOUS-ESPACES HILBERTIENS ET ANTINOYAUX ASSOCIÉS

par Laurent SCHWARTZ

Cette théorie complète celle des noyaux reproduisants d'Aronszajn (voir la bibliographie).

1. Sous-espaces hilbertiens d'un espace vectoriel topologique.

Soit E un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{C}$, séparé, localement convexe, quasi-complet. On appelle sous-espace hilbertien de E la donnée d'un sous-espace vectoriel H de E , et d'une structure hilbertienne sur H , telle que l'injection naturelle de H dans E soit continue. Sur l'ensemble $\mathcal{H}$ des sous-espaces hilbertiens de E existent les structures suivantes :

1° Une loi de multiplication par les nombres réels ≥ 0 . Si $H \in \mathcal{H}$ et $\lambda \geq 0$, on appelle λH l'espace $\{0\}$ si $\lambda = 0$, et si $\lambda > 0$, l'espace H muni d'un nouveau produit scalaire, obtenu en multipliant l'ancien par $\frac{1}{\lambda}$:

$$(1) \quad (h_1 | h_2)_{\lambda H} = \frac{1}{\lambda} (h_1 | h_2)_H, \quad \text{ou} \quad \|h\|_{\lambda H} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|h\|_H \quad .$$

Associativité : $\lambda(\mu H) = (\lambda\mu) H$, pour $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $H \in \mathcal{H}$.

2° Une loi d'addition. Si H_1 et H_2 sont deux sous-espaces hilbertiens, $H_1 + H_2$ est, en tant qu'espace vectoriel, la somme de H_1 et H_2 (attention, on n'a pas nécessairement $H_1 \cap H_2 = \{0\}$), et sa norme est définie par

$$(2) \quad \|h\|_{H_1+H_2}^2 = \inf_{\substack{h_1+h_2=h \\ h_1 \in H_1, h_2 \in H_2}} \left(\|h_1\|_{H_1}^2 + \|h_2\|_{H_2}^2 \right) \quad .$$

On montre qu'on définit bien là un sous-espace hilbertien de E . On peut d'ailleurs l'obtenir comme suit. Soit $H_1 \oplus H_2$ la somme directe hilbertienne de H_1 et H_2 , c'est-à-dire leur somme directe munie de la norme

$$(3) \quad \|(h_1, h_2)\|_{H_1 \oplus H_2}^2 = \|h_1\|_{H_1}^2 + \|h_2\|_{H_2}^2 \quad .$$

Il existe une application linéaire continue de $H_1 \oplus H_2$ dans E , définie par $(h_1, h_2) \rightsquigarrow h_1 + h_2$; soit N son noyau; elle définit alors une injection linéaire continue du quotient $(H_1 \oplus H_2)/N$, qui est encore un espace de Hilbert, dans E , dont l'image est l'ensemble somme $H_1 + H_2$; la structure hilbertienne placée sur $H_1 + H_2$ est l'image de celle de $(H_1 \oplus H_2)/N$ par la bijection ci-dessus.

L'addition de $\mathcal{H}$ est associative et commutative, d'élément neutre $\{0\}$; on a les distributivités

$$(4) \quad (\lambda + \mu) H = \lambda H + \mu H, \quad \lambda(H_1 + H_2) = \lambda H_1 + \lambda H_2 \quad .$$

3° Une structure d'ordre. On écrira $H_1 \leq H_2$, si $H_1 \subset H_2$ et si, pour tout $h \in H_1$, on a

$$(5) \quad \|h\|_{H_1} \geq \|h\|_{H_2} \quad ;$$

ceci exprime que l'injection naturelle $H_1 \rightarrow H_2$ est continue, de norme ≤ 1 . On a

$$(6) \quad H_1 + H_2 \geq H_1, \text{ et } \geq H_2; \quad \lambda H \geq H \iff \lambda \geq 1 \text{ si } H \neq \{0\} \quad .$$

2. Les antinoyaux relatifs à E .

On appelle antinoyau relatif à E une application antilinéaire de E' dans E . Un tel antinoyau L définit une forme sesquilinéaire $(e', f') \rightsquigarrow \langle Lf', e' \rangle$ sur $E' \times E'$; L est dit hermitien, hermitien ≥ 0 , si cette forme sesquilinéaire l'est. L'hermiticité de L entraîne sa continuité, forte ou faible. L'ensemble $\overline{\mathcal{E}}^+$ des antinoyaux ≥ 0 est un cône convexe saillant dans l'espace $\overline{\mathcal{E}}(E'; E)$ des applications antilinéaires continues de E' dans E . Il est donc muni des trois mêmes structures que $\mathcal{H}$: la multiplication par les scalaires et l'addition sont induites par celles de $\overline{\mathcal{E}}(E'; E)$, et la structure d'ordre est définie par :

$$(7) \quad L_1 \leq L_2 \iff L_2 - L_1 \geq 0 \quad .$$

Le théorème essentiel de la théorie est le suivant :

THÉOREME 1. - Il existe un isomorphisme canonique entre $\mathcal{K}$ et $\overline{\mathcal{E}}^+$ (relativement aux structures précédentes).

COROLLAIRE 1. - Soient $H, H_1 \in \mathcal{K}$. Pour qu'il existe un $H_2 \in \mathcal{K}$ tel que $H = H_1 + H_2$, il faut et il suffit que $H \geq H_1$, et H_2 est alors unique.

La propriété est, en effet, vraie dans $\overline{\mathcal{E}}^+$ (formule (7)).

COROLLAIRE 2. - Soient $H_1, H_2 \in \mathcal{K}$. Pour que $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, il faut et il suffit que les antinoyaux associés L_1, L_2 soient étrangers, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'antinoyau ≥ 0 , majoré par chacun d'eux, autre que 0.

Nous démontrerons au § 3 l'existence d'une bijection naturelle de $\mathcal{K}$ sur $\overline{\mathcal{E}}^+$, et au § 4 nous montrerons que cette bijection est un isomorphisme.

3. Bijection canonique $\mathcal{K} \rightarrow \overline{\mathcal{E}}^+$.

Soient $H \in \mathcal{K}$, j son injection canonique dans E . Alors son antinoyau associé $L \in \overline{\mathcal{E}}(E'; E)$ est l'application composée :

$$(8) \quad E' \xrightarrow{tj} H' \xrightarrow[\text{canonique}]{\text{anti-isomorphisme}} H \xrightarrow{j} E \quad .$$

On peut encore dire que, pour $e' \in E'$, l'élément Le' de $H \subset E$ est caractérisé par

$$(9) \quad \forall h \in H, \quad (h | Le')_H = \langle h, e' \rangle \quad .$$

On en déduit :

$$(10) \quad \forall e', f' \in E' : (Lf' | Le')_H = \langle Lf', e' \rangle \quad ;$$

par suite, L est ≥ 0 , donc $L \in \overline{\mathcal{E}}^+$:

$$(11) \quad \forall e' \in E', \quad \|Le'\|_H^2 = \langle Le', e' \rangle \geq 0 \quad .$$

L'image $L(E')$ de E' par L est le sous-espace H_0 des $k \in H$ tels que la forme linéaire $h \mapsto (h | k)_H$ soit continue sur H muni de la topologie induite par E . H_0 est dense dans H . Nous venons de définir une application $\mathcal{K} \rightarrow \overline{\mathcal{E}}^+$. Montrons qu'elle est bijective.

Soit donc $L \in \mathcal{E}^+$. Nous devons montrer qu'il existe un élément H de $\mathcal{H}$, unique, dont L soit l'antinoëau associé. Soit H_0 l'ensemble $L(E')$. On peut le munir d'un produit scalaire sesquilinéaire :

$$(12) \quad (u|v)_{H_0} = \langle u, e' \rangle \text{ si } v = Le' \quad ;$$

Cette expression est en effet bien indépendante de l'élément e' de E' tel que $v = Le'$ car, si $u = Lf'$, on a

$$\langle Lf', e' \rangle = \overline{\langle Le', f' \rangle}$$

d'après l'hermiticité de L . Ce produit scalaire est ≥ 0 d'après (11). Il est même défini positif. Soit en effet $u = Le'$ tel que

$$(u|u)_{H_0} = \langle Le', e' \rangle = 0 \quad ;$$

l'inégalité de Schwarz donne

$$(13) \quad \forall f' \in E', \quad |\langle u, f' \rangle| \leq \langle Le', e' \rangle^{1/2} \langle Lf', f' \rangle^{1/2}$$

donc $u = 0$ d'après HAHN-BANACH. L'injection $H_0 \rightarrow E$ est continue, si on munit H_0 de la structure préhilbertienne définie par $(|)_{H_0}$. Pour le voir, nous devons montrer que la boule-unité de H_0 est bornée dans E , et il suffit pour cela, d'après MACKEY, qu'elle soit faiblement bornée ; or cela résulte immédiatement de (13).

Soit alors $\hat{H}_0$ le complété de H_0 ; il n'est pas, a priori, un sous-espace de E ; mais c'est aussi le quasi-complété de H_0 , et, comme E est supposé quasi-complet, l'injection $H_0 \rightarrow E$ se prolonge en une application linéaire continue ϕ de $\hat{H}_0$ dans E :

$$\begin{array}{ccc} H_0 & \xrightarrow{\quad \quad} & E \\ & \searrow & \nearrow \phi \\ & \hat{H}_0 & \end{array} \quad .$$

Montrons que ϕ est une injection. Pour cela, remarquons que, si $h \in \hat{H}_0$, on a

$$(14) \quad \forall e' \in E', \quad (h \mid Le')_{H_0} = \langle \Phi(h), e' \rangle \quad ;$$

c'est en effet vrai, pour e' fixé, pour $h \in H_0$ et les deux membres dépendent continuellement de $h \in \hat{H}_0$. Alors, si $\Phi(h) = 0$, on a $(h \mid Le')_{H_0} = 0$ pour tout $Le' \in H_0$, et, comme H_0 est dense dans $\hat{H}_0$, on a $h = 0$, Φ_{H_0} est bien injective. On peut donc transporter par Φ la structure hilbertienne de $\hat{H}_0$ sur son image $H = \Phi(\hat{H}_0)$; H est un sous-espace hilbertien de E qu'on peut appeler le complété canonique de H_0 dans E . C'est le seul sous-espace hilbertien de E dans lequel H_0 soit dense et qui induise sur H_0 sa structure préhilbertienne. On le notera directement $\hat{H}_0$ avec $\Phi =$ identité; alors (14) montre, d'après (9), que son antinoyau associé est L , et il est bien trivialement le seul sous-espace hilbertien de E à avoir cette propriété. Ainsi l'application $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{E}^+$ est bien une bijection. Nous verrons au § 4 que c'est un isomorphisme pour les structures définies sur ces deux ensembles.

La construction, que nous venons de donner de H à partir de l'antinoyau associé L , ne permet pas de reconnaître facilement si un $h \in E$ appartient à H . Mais :

THÉOREME 2. - Soient $H \in \mathcal{K}$, L l'antinoyau associé. Pour que $h \in E$ appartienne à H , il faut et il suffit que

$$(15) \quad \ell(h) = \sup_{e' \in E'} \frac{|\langle h - e' \rangle|}{\langle Le', e' \rangle^{1/2}} < \infty \quad ;$$

et alors on a

$$\ell(h) = \|h\|_H \quad .$$

Démonstration. - Si $h \in H$, on a sûrement (15), et $\ell(h) \leq \|h\|_H$. Inversement, si l'on a (15), alors $Le' \rightsquigarrow \langle h, e' \rangle$ est une forme antilinéaire continue sur H_0 , de norme $\leq \ell(h)$; alors il existe $k \in H$ tel que, pour tout $e' \in E'$, on ait

$$(k \mid Le')_H = \langle h, e' \rangle, \text{ et } \|k\|_H \leq \ell(h) \quad ;$$

mais

$$(k \mid Le')_H = \langle k, e' \rangle \quad ,$$

donc $h = k$, et, par suite,

$$h \in H \text{ et } \|h\|_H \leq \ell(h) \quad .$$

C. Q. F. D.

Remarque. - Ce théorème montrerait à nouveau que l'application canonique $\mathcal{K} \rightarrow \overline{\mathcal{E}}^+$ est injective, puisqu'il permet de construire H à partir de L . Il ne semble pas bien utilisable pour montrer directement que l'application est surjective ; si, pour L donné, on appelle H l'ensemble des h vérifiant (15) et si l'on pose $\ell(h) = \|h\|_H$, il n'est pas clair a priori que cela définisse un sous-espace hilbertien de E .

4. Isomorphisme de $\mathcal{K}$ et $\overline{\mathcal{E}}^+$.

1° Conservation de la multiplication par les scalaires ≥ 0 : évidente par (15).

2° Conservation de la relation d'ordre :

$$H_1 \leq H_2 \iff L_1 \leq L_2 \quad .$$

Soit d'abord $H_1 \leq H_2$. Pour $e' \in E'$, $L_1 e' \in H_1$ donc $\in H_2$, et

$$\begin{aligned} (16) \quad \langle L_1 e', e' \rangle^{1/2} &= \|L_1 e'\|_{H_1} \geq \|L_1 e'\|_{H_2} \\ &= \sup_{f' \in E'} \frac{|\langle L_1 e', f' \rangle|}{\langle L_2 f', f' \rangle^{1/2}} \geq \frac{\langle L_1 e', e' \rangle}{\langle L_2 e', e' \rangle^{1/2}} \quad ; \end{aligned}$$

donc

$$\langle L_1 e', e' \rangle^{1/2} \leq \langle L_2 e', e' \rangle^{1/2} \text{ ou } L_1 \leq L_2 \quad .$$

Inversement soit $L_1 \leq L_2$. Si $h \in H_1$, l'application du théorème 2 à H_2 et h montre que $h \in H_2$, et que $\|h\|_{H_2} \leq \|h\|_{H_1}$; donc $H_1 \leq H_2$.

3° Conservation de la loi d'addition.

Soient H_1 et H_2 deux sous-espaces hilbertiens de E , L_1 et L_2 leurs antinoyaux. Soit $e' \in E'$. L'élément $(L_1 e', L_2 e')$ de la somme directe

hilbertienne $H_1 \oplus H_2$ est orthogonal au noyau N de son application dans E définie au § 1, 2°. En effet, si (k_1, k_2) est dans ce noyau, $k_1 + k_2 = 0$, et

$$\begin{aligned}
 (17) \quad & \left((k_1, k_2) \mid (L_1 e', L_2 e') \right)_{H_1 \oplus H_2} \\
 &= (k_1 \mid L_1 e')_{H_1} + (k_2 \mid L_2 e')_{H_2} = \langle k_1, e' \rangle + \langle k_2, e' \rangle \\
 &= \langle k_1 + k_2, e' \rangle = 0 \quad .
 \end{aligned}$$

Donc son produit scalaire avec un vecteur quelconque de $H_1 \oplus H_2$ est égal à celui de leurs images dans $(H_1 \oplus H_2)/N$, et, par conséquent, dans $H_1 + H_2$. Soit donc $h \in H_1 + H_2$ de la forme $h_1 + h_2$, $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$.

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & \langle h, e' \rangle = \langle h_1 + h_2, e' \rangle = \langle h_1, e' \rangle + \langle h_2, e' \rangle \\
 &= (h_1 \mid L_1 e')_{H_1} + (h_2 \mid L_2 e')_{H_2} \\
 &= \left((h_1, h_2) \mid (L_1 e', L_2 e') \right)_{H_1 \oplus H_2} \\
 &= (h_1 + h_2 \mid (L_1 + L_2) e')_{H_1 + H_2} \\
 &= (h \mid (L_1 + L_2) e')_{H_1 + H_2} \quad .
 \end{aligned}$$

Alors la caractérisation (9) montre que $L_1 + L_2$ est l'antinoxyau de $H_1 + H_2$, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

THÉOREME 3. - Soient H un sous-espace hilbertien de E , $(h_i)_{i \in I}$ une base hilbertienne de H . Alors l'antinoxyau L de H est

$$(19) \quad L = \sum_{i \in I} h_i \otimes \overline{h_i} \quad ,$$

la somme étant prise dans $\overline{\mathcal{E}}_S(E'; E)$; autrement dit, pour $e' \in E'$.

$$(20) \quad Le' = \sum_{i \in I} \overline{\langle h_i, e' \rangle} h_i \quad .$$

COROLLAIRE. - Tout antinoxyau ≥ 0 est une "somme de carrés".

THÉOREME 3 bis. - Soit $(h_i)_{i \in I}$ un ensemble d'éléments de E . Pour qu'il soit base hilbertienne d'un sous-espace hilbertien de E , il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes :

$$(A) \quad \forall e' \in E', \quad \sum_{i \in I} |\langle h_i, e' \rangle|^2 < +\infty;$$

(B) La famille $(h_i)_{i \in I}$ est Hilbert-libre ; on entend par là qu'il n'existe pas de relation non triviale

$$\sum_{i \in I} c_i h_i = 0, \quad \text{avec} \quad \sum_{i \in I} |c_i|^2 < +\infty.$$

(Excellents exercices pour le lecteur).

Sous-espaces hilbertiens de l'espace $\mathcal{O}'$ des distributions sur $\mathbb{R}^n$. - Un antinoyau ≥ 0 sur $\mathcal{O}'$ est une application antilinéaire continue de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}'$, définie (théorème des noyaux) à partir d'une distribution $L_{x, \xi}$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, par $\varphi \mapsto L \cdot \bar{\varphi}$, de type positif, c'est-à-dire vérifiant, pour toute $\varphi \in \mathcal{O}$,

$$(21) \quad \langle L_{x, \xi}, \varphi(x) \bar{\varphi}(\xi) \rangle \geq 0.$$

Le plus "connu" des sous-espaces hilbertiens de $\mathcal{O}'$ est L^2 . Son antinoyau est l'application "barre" : $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$, de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}'$, définie par la distribution $\delta_{x=\xi}$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (en effet, si on part de cet antinoyau, l'espace H_0 est l'espace $\mathcal{O}$ avec la norme $\|\varphi\|_{H_0}^2 = \int |\varphi|^2$, et son complété H dans $\mathcal{O}'$ est bien L^2).

5. Images par une application continue.

Soient E, F des espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés quasi-complets ; soit u une application linéaire (resp. antilinéaire) continue de E dans F . Soit H un sous-espace hilbertien de E . On appelle image $u(H)$ le sous-espace hilbertien de F défini par le sous-espace vectoriel image $u(H)$, avec la structure hilbertienne suivante : si $N = u^{-1}(\{0\}) \cap H$, u définit, par passage au quotient, une bijection linéaire (resp. antilinéaire) $\hat{u}$ de H/N sur $u(H)$, et la structure hilbertienne cherchée est la transportée (resp. antitransportée) par $\hat{u}$ de celle de H/N .

THÉOREME 4. - Si L est l'antinoyau associé au sous-espace hilbertien H de E , l'ensemble $L({}^t u(F'))$ est dense dans l'orthogonal de N dans H , et l'antinoyau associé à $u(H)$ est $u \circ L \circ {}^t u$.

Démonstration (cas linéaire). - Soit K l'orthogonal de N dans H ; alors $u(H)$ est l'image de K , avec transport de la structure hilbertienne. Soit, d'autre part, G le sous-espace hilbertien de F associé à $u \circ L \circ t_u$ (qui est trivialement un antinoyau ≥ 0) ; nous devons montrer que $G = u(H) = u(K)$. Pour $h \in H$, $f' \in F'$ on a

$$(22) \quad (h \mid L(t_u f'))_H = \langle h, t_u f' \rangle = \langle uh, f' \rangle \quad .$$

Donc h est orthogonal, dans H , à $L(t_u(F'))$, si et seulement si $uh = 0$; l'orthogonal de $L(t_u(F'))$ est N . Cela prouve que $L(t_u(F'))$ est un sous-espace dense de K ; donc $(u \circ L \circ t_u)(F')$, sous-espace dense G_0 de G , est aussi un sous-espace dense de $u(H)$; en outre, pour $f' \in F'$,

$$\|L(t_u f')\|_H = \|(u \circ L \circ t_u)(f')\|_{u(H)} \quad .$$

Alors :

$$\begin{aligned} (23) \quad \|(u \circ L \circ t_u)(f')\|_G^2 &= \langle (u \circ L \circ t_u) f', f' \rangle \\ &= \langle L(t_u f'), t_u f' \rangle = \|L(t_u f')\|_H^2 \\ &= \|(u \circ L \circ t_u) f'\|_{u(H)}^2 \quad . \end{aligned}$$

Donc, sur G_0 , les normes induites par G et par $u(H)$ coïncident ; donc $G = u(H)$, complété de G_0 dans F .

Exemple. - La transformation de Fourier $\mathfrak{F}$ applique $E = \mathfrak{S}'$ dans $F = \mathfrak{S}'$. Sa transposée $t_{\mathfrak{F}}$ est $\mathfrak{F}$ (symétrie du noyau $\exp(-2i\pi(x, y))$). Prenons $H = L^2 \subset \mathfrak{S}'$. Alors $\mathfrak{F}(L^2)$ a son antinoyau défini par

$$\varphi \rightsquigarrow \overline{\mathfrak{F} t_{\mathfrak{F}} \varphi} = (\mathfrak{F} \circ \overline{\mathfrak{F}})(\overline{\varphi}) = \overline{\varphi}$$

(formule de réciprocité) ; donc c'est encore L^2 , et $\mathfrak{F}$ est une isométrie de L^2 sur L^2 (PARSEVAL-PLANCHEREL). Comme connu, la formule de réciprocité entraîne celle de Parseval-Plancherel.

6. Antinoyaux inverses et sous-espaces hilbertiens en dualité.

Dans ce paragraphe, on suppose donnée une fois pour toutes une identification de E' avec un sous-espace de E avec une injection égale à sa transposée, donc faiblement continue (exemples : $E = \mathcal{Q}'$, S' , etc.). Un sous-espace hilbertien H de E , à injection continue, sera dit normal, si $E' \subset H$, avec injection faiblement continue, et si E' est dense dans H . (Exemples : espaces de distributions normaux, pour $E = \mathcal{Q}'$). Du diagramme $E' \rightarrow H \rightarrow E$, on déduit, par transposition, un diagramme $E' \rightarrow H' \rightarrow E$: si H est un sous-espace hilbertien normal de E , il en est de même de H' . Quelle relation existe entre leurs antinoyaux L, L' ? D'après leur définition (8), $L : E' \rightarrow E$ s'étend en une application $\tilde{L} : H' \rightarrow H$, qui est l'anti-isomorphisme canonique, tandis que L' s'étend en $\tilde{L}' : H \rightarrow H'$, qui est l'inverse du précédent ; en ce sens, L et L' sont "inverses" l'un de l'autre. Il est naturel de songer à définir chacun des deux espaces, non seulement à partir de son antinoyau, mais aussi à partir de l'antinoyau de l'autre.

THÉOREME 5. - Si H et H' sont deux sous-espaces hilbertiens normaux de E , en dualité, d'antinoyaux L, L' alors :

H est le complété dans E du sous-espace $L(E')$ muni de la norme $\|Le'\|_H = \langle Le', e' \rangle^{1/2}$; et le complété dans E du sous-espace E' , muni de la norme $\|e'\|_H = \langle L'e', e' \rangle^{1/2}$.

Démonstration. - La première affirmation est ce qui a été vu au § 3. D'autre part, E' est dense dans H ; et $\|e'\|_H = \|L'e'\|_{H'}$, puisque L' est une anti-isométrie de H sur H' , et $\|L'e'\|_{H'} = \langle L'e', e' \rangle^{1/2}$, ce qui démontre la deuxième affirmation.

THÉOREME 6. - Soit H un sous-espace hilbertien de E , d'antinoyau L . Pour que H soit normal, il faut et il suffit que l'ensemble

$$(24) \quad B = \{e' ; \langle Le', e' \rangle \leq 1\}$$

soit borné dans E , et fermé dans E' pour la topologie induite par E .

Démonstration.

1° Soit H normal. Alors, d'après le théorème 5, B est l'intersection de E' et de la boule-unité $\tilde{B}$ de H' . Donc B est bornée dans H' et, par suite,

dans E ; en outre, $\tilde{B}$ est faiblement compacte dans H' , donc dans E , par conséquent faiblement fermée dans E ; donc B est fermée dans E' pour la topologie induite par E .

2° Supposons que B ait les propriétés énoncées. Soit E'_B l'espace E' muni de la norme $e' \rightarrow \langle Le' , e' \rangle^{1/2}$ (c'est en général une semi-norme ; c'est ici une norme parce que B est bornée dans E). Comme $\langle Le' , e' \rangle^{1/2} = \|Le'\|_H$, la norme sur E'_B est l'image réciproque de celle de H' , par l'application $E' \rightarrow H'$ transposée de l'injection $H \rightarrow E$. L'image de E' dans H' est dense ; on peut donc prendre H' comme exemplaire du complété $\hat{E}'_B$, et $E' \rightarrow H'$ est alors l'injection canonique $E'_B \rightarrow \hat{E}'_B$. Puisque B est bornée dans E , l'injection $E'_B \rightarrow E$ est continue ; elle se prolonge en une application continue des quasi-complétés, et alors, comme E est quasi-complet, il existe une application linéaire continue $H' \rightarrow E$, telle que l'injection $E' \rightarrow E$ soit la composée $E' \rightarrow H' \rightarrow E$. Par transposition, il existe une application linéaire faiblement continue $E' \rightarrow H$ telle que l'injection $E' \rightarrow E$ soit la composée $E' \rightarrow H \rightarrow E$. Donc E' est un sous-espace de H , avec injection faiblement continue. D'autre part, le fait que la boule-unité B de E'_B soit fermée dans E'_B pour la topologie induite par E , entraîne que l'application prolongée aux quasi-complétés, $H' \rightarrow E$, soit injective ; donc E' est dense dans H par transposition, et H est un sous-espace normal de E .

Remarque 1. - On peut remplacer les conditions sur B par les conditions équivalentes :

il faut et il suffit que l'espace E'_B , c'est-à-dire E' muni de la semi-norme $\|e'\|_B = \langle Le' , e' \rangle^{1/2}$, ait une injection continue dans E et admette un complété dans E .

Remarque 2. - Nous dirons que l'application L est prolongeable, si elle se prolonge en une application antilinéaire continue de E dans E ; au quel cas, par transposition, elle applique E' dans E' . S'il en est ainsi B est sûrement fermée dans E' pour la topologie induite par E . En effet, B est l'intersection avec E' de l'image réciproque par L , continue de E dans E , de la boule-unité de H , partie faiblement compacte de H donc fermée dans E .

THÉOREME 7. - Soit H un sous-espace hilbertien de E' , d'antinyau L prolongeable. Pour que H soit normal, il faut et il suffit qu'il existe un antinyau $M \geq 0$, inverse bilatère de L ; dans ce cas, l'antinyau L' du dual H' de H

est le plus petit antinoyau ≥ 0 inverse bilatère de L .

Démonstration. - Soit M un antinoyau quelconque. Alors $L \circ M$ et $M \circ L$ ont un sens, car $L \circ M$ est $E' \xrightarrow{M} E \xrightarrow{L} E$, et $M \circ L$ est $E' \xrightarrow{L} E' \xrightarrow{M} E$. M est inverse bilatère de L si $L \circ M = M \circ L = I$, injection canonique donnée de E' dans E .

Si H est normal, et si L' est l'antinoyau de son dual H' , L' est un inverse bilatère de L d'après le début du paragraphe 6.

Inversement, soit M un antinoyau ≥ 0 inverse bilatère de L ; soit K son sous-espace hilbertien associé. Soit $N = K \cap L^{-1}(\{0\})$, et soit K_1 l'orthogonal de N dans K . L'image $L(K) = L(K_1)$ a pour antinoyau, d'après le théorème 4, $L \circ M \circ {}^tL$; mais ${}^tL = L$ (symétrie hermitienne), et $L \circ M = I$, donc cet antinoyau est L ; alors $L(K) = H$, et E' est un sous-espace dense de K_1 . Alors, comme M est faiblement continu $E' \rightarrow K$ et que $M(E')$ est dense dans K , $L \circ M = I$ est faiblement continue de E' dans $L(K) = H$, et E' est dense dans H : H est normal. Pour $e' \in E'$, $\|e'\|_{K_1} = \|Le'\|_H = \|e'\|_{H'}$; donc sur E' , dense dans K_1 et dans H' , les normes induites par K_1 et H' coïncident, donc $K_1 = H'$. Alors $K \geq H'$ et, par suite, $M \geq L'$, L' est le plus petit antinoyau ≥ 0 inverse bilatère de L . On voit même comment on obtient tous les sous-espaces K ou tous les antinoyaux M : on prend n'importe quel sous-espace hilbertien N de $L^{-1}(\{0\})$, alors $N \cap H' = (\{0\})$, et $K = H' + N$.

7. Applications à la théorie du potentiel.

Prenons, par exemple, $E = \mathcal{O}'(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit D un opérateur différentiel à coefficients C^∞ , de type positif :

$$(24 \text{ bis}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}, \quad \langle D\varphi, \overline{\varphi} \rangle \geq 0.$$

Alors l'antinoyau $\varphi \rightarrow \overline{D\varphi}$ définit un sous-espace hilbertien H de $\mathcal{O}'$. On appelle espace des charges d'énergie finie le conjugué $\overline{H}$; c'est le complété dans $\mathcal{O}'$ de l'espace $D\mathcal{O}$, pour la norme $\|D\varphi\|_H = \|\overline{D\varphi}\|_H = \langle D\varphi, \overline{\varphi} \rangle^{1/2}$. On dit que D définit une théorie du potentiel si $\overline{H}$ est un espace de distributions normal. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit (théorème 6 et remarques 1 et 2 qui le suivent) que $B = \{\varphi; \langle D\varphi, \overline{\varphi} \rangle \leq 1\}$ soit borné dans $\mathcal{O}'$, ou encore que $\mathcal{O}_B$ ($\mathcal{O}$ muni de la norme $\varphi \rightsquigarrow \langle D\varphi, \overline{\varphi} \rangle^{1/2}$) ait une injection

continue dans $\mathcal{Q}'$; le complété de $\mathcal{Q}_B$ dans $\mathcal{Q}'$ est alors H' . D'après le théorème 7, il faut et il suffit que D ait un noyau élémentaire bilatère, de type positif ; alors il en existe un plus "petit" que tous les autres (pour la relation d'ordre : de type positif), le noyau de Green G ; l'antinoyau de H' est $\varphi \rightarrow G\bar{\varphi}$. D et G sont les isomorphismes canoniques réciproques $H' \rightarrow \bar{H}$ et $\bar{H} \rightarrow H'$. H' est l'espace des potentiels d'énergie finie. Si $T \in \bar{H}$, GT est son potentiel ; si $U \in H'$, DU est sa charge.

Soit ω un ouvert $\subset \Omega$. Alors D a dans ω les mêmes propriétés que dans Ω , donc définit encore une théorie des potentiels dans ω . Le noyau de Green G_Ω induit encore dans ω un noyau élémentaire bilatère de D , de type positif, mais ce n'est pas le plus petit ; d'où un nouveau noyau de Green $G_\omega \leq G_\Omega$.

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, et si D est à coefficients constants, $\mathfrak{S}D$ est un polynôme $P \geq 0$. L'espace H (ou $\bar{H}$) est invariant par translation ; s'il est normal, son dual H' est nécessairement invariant par translation. Le noyau de Green est donc, s'il existe, un noyau de convolution. Il y a donc théorie du potentiel, autrement dit H est normal, si et seulement si D a une solution élémentaire de type positif ; alors le noyau de Green est l'opérateur de convolution avec la solution élémentaire la plus petite (pour la relation d'ordre : de type positif). Il faut et il suffit pour cela que $\frac{1}{P}$ soit localement intégrable et tempéré ; alors la solution élémentaire la plus petite est $\mathfrak{F} \frac{1}{P}$. Pour $D = -\Delta$,

$$P = 4\pi^2 r^2 , \quad \frac{1}{P} = \frac{1}{4\pi^2 r^2} ,$$

on doit avoir

$$n \geq 3 , \quad \text{et} \quad \mathfrak{F} \frac{1}{4\pi^2 r^2} = - \frac{1}{(n-2)s_n} \frac{1}{r^{n-2}} ;$$

G est l'opérateur de convolution avec cette distribution.

Pour montrer les nombreuses relations de cette théorie avec celle des équations aux dérivées partielles, nous ajouterons ceci. Si $H^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions sur Ω , dans L^2 ainsi que leurs dérivées premières, avec

$$(25) \quad \|f\|_{H^1}^2 = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 + \lambda |f|^2 \right) ,$$

et si $H^1_0(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, l'antinoyau de H^1_0 est $\varphi \rightarrow G\bar{\varphi}$, et celui de H^1 est $\varphi \rightarrow N\bar{\varphi}$, où G est l'opérateur de Green et N

l'opérateur de Neumann de $-\Delta + \lambda$; on a bien $N \geq G$, G est le plus petit noyau élémentaire bilatère de $-\Delta + \lambda$.

$-\Delta + \lambda$ définit une théorie des potentiels dans Ω , avec

$$\text{espace des charges} = H^{-1}(\Omega) \quad ,$$

$$\text{espace des potentiels} = H_0^1(\Omega) \quad .$$

8. Sous-espaces hermitiens et antinoyaux hermitiens associés.

On appelle espace hermitien H un espace vectoriel topologique hilbertisable, muni d'une forme sesquilinéaire hermitienne continue (non nécessairement ≥ 0), telle que l'application antilinéaire canonique qu'elle définit de H dans H' soit un anti-isomorphisme de H sur H' . Une structure hilbertienne H_0 choisie arbitrairement sur H permet d'associer à la forme hermitienne un opérateur hermitien continu inversible A de H_0 dans H_0 ; alors $A = A_+ - A_-$, de sorte que H est somme directe topologique de deux sous-espaces H_1, H_2 orthogonaux pour la forme hermitienne, tels que cette forme soit définie positive sur H_1 , définie négative sur H_2 et définisse sur chacun d'eux une structure hilbertienne compatible avec la topologie induite par H . On écrira $H \approx H_1 \ominus H_2$; H sera différence hermitienne des espaces hilbertiens H_1, H_2 . Naturellement cette décomposition n'est pas intrinsèque, car H_0 n'est pas donné dans la structure de H .

Un sous-espace hermitien de E est un sous-espace vectoriel de E , muni d'une structure d'espace hermitien avec injection continue.

Bien qu'ayant donné la définition générale d'un antinoyau au § 2, nous entendons désormais par antinoyau relatif à E , un antinoyau hermitien, majoré par un antinoyau ≥ 0 , donc pouvant s'exprimer comme différence de deux antinoyaux ≥ 0 .

THÉORÈME 8. - A tout sous-espace hermitien H de E , on peut associer un antinoyau L . Tout antinoyau L est l'associé d'au moins un sous-espace hermitien H (mais en général d'une infinité).

Démonstration.

1° Si H est donné, $L \in \overline{\mathcal{E}}(E' ; E)$ se définit par (8) ; il est caractérisé par (9) et vérifie (10). Comme on peut exprimer H par une différence $H_1 \ominus H_2$,

on aura $L = L_1 - L_2$, L_1 et L_2 antinoyaux ≥ 0 de H_1 et H_2 ; donc L est bien un antinoyau au sens restreint adopté ici, et peut même s'exprimer comme différence de deux antinoyaux ≥ 0 étrangers.

2° Soient K un sous-espace hilbertien de E , H un sous-espace hermitien de K . Compte tenu de la structure hilbertienne de K , l'antinoyau de H relativement à K peut être remplacé par un noyau A , opérateur hermitien continu de K dans K (et même dans H). Soit L l'antinoyau de K relativement à E . Alors l'antinoyau de H dans E est $A \circ L$ ($L: E' \rightarrow K$, $A: K \rightarrow H$). En effet, $A \circ L$ n'est autre que

$$(25\text{bis}) \quad \underbrace{E' \rightarrow K' \rightarrow K}_{L} \rightarrow \underbrace{K' \rightarrow H' \rightarrow H}_A$$

où $E' \rightarrow H' \rightarrow H$, noyau de H dans E . Ce résultat était également intéressant dans le cadre des paragraphes précédents, lorsque H était hilbertien; si, en particulier, H est un sous-espace fermé de K , avec la structure hilbertienne induite, A est le projecteur orthogonal de K sur H , ce que nous utiliserons plus loin.

3° Inversement soit L un antinoyau $E' \rightarrow E$, et M un antinoyau ≥ 0 tel que

$$(26) \quad \forall e', f' \in E', \quad |\langle Le', f' \rangle| \leq \langle Me', e' \rangle^{1/2} \langle Mf', f' \rangle^{1/2}.$$

Soit K le sous-espace hilbertien de E d'antinoyau M . La forme sesquilinéaire hermitienne $(Me', Mf') \rightsquigarrow \langle Le', f' \rangle$ sur $M(E') \times M(E')$ est continue de norme ≤ 1 ; elle se prolonge en une forme analogue sur $K \times K$, donc il existe une application linéaire hermitienne continue A , de norme ≤ 1 , de K dans K , telle que

$$(27) \quad \langle Le', f' \rangle = (AMe' | Mf')_H = \langle AMe', f' \rangle$$

ou $L = A \circ M$.

On peut écrire $A = A_+ - A_-$ (avec, par exemple, $A^{-1}(\{0\}) = A_+^{-1}(\{0\})$). A_+ et A_- définissent, dans K , deux sous-espaces hilbertiens H_1, H_2 , $H_1 \cap H_2 = \{0\}$; donc A est associé dans K à l'espace hermitien $H_1 - H_2$ de définition évidente; alors $L = A \circ M$ est associé dans E à $H_1 - H_2$, d'après le 2°, ce qui démontre la 2e affirmation du théorème. Cela revient à dire qu'on

peut (d'une infinité de manières, en général) représenter un antinoyau par une différence $L_1 - L_2$ de deux antinoyaux ≥ 0 étrangers, d'où un sous-espace hermitien $H = H_1 - H_2$ qui lui donne naissance. Si nous disons, à la fin de l'énoncé du théorème, qu'il n'y a pas unicité, nous entendons par là que $H = H_1 - H_2$ va, en général, varier quand la décomposition $L_1 - L_2$ varie. C'est cette non-unicité que nous allons préciser.

- Voici d'abord des résultats d'unicité.

THÉORÈME 9.

1° Si G, H sont deux sous-espaces hermitiens de E , de même antinoyau L , et si $G \subset H$, alors $G = H$.

2° Si $L = L_1 - L_2$, L_1 et L_2 antinoyaux ≥ 0 , L_2 de rang fini n , alors, pour toutes les décompositions $L = L_3 - L_4$, où L_3 et L_4 sont des antinoyaux ≥ 0 étrangers, L_4 a le même rang fini $m \leq n$; en outre, il existe un seul sous-espace hermitien de E d'antinoyau L .

Démonstration.

1° Soit K une structure hilbertienne sur le sous-espace H , et soit M l'antinoyau de K . Alors G et H ont des injections continues dans E , donc dans K d'après le théorème du graphe fermé, donc ont, relativement à K , des noyaux associés U et V , et (voir théorème 8, démonstration, 2°), $L = U \circ M = V \circ M$; comme $M(D')$ est dense dans K , cela implique $U = V$. En outre, H est l'espace K lui-même, donc V est hermitien inversible de K dans K . Mais G contient $U(K) = V(K) = K$, donc $G = H = K$ en tant qu'ensembles. Le théorème du graphe fermé montre que leurs topologies sont les mêmes. Enfin, pour $\xi, \eta \in K$:

$$(28) \quad (V\xi \mid V\eta)_H = (V\xi \mid \eta)_K = (V\xi \mid V\eta)_G \quad ;$$

comme V est inversible, cela prouve que les formes hermitiennes sur G et H coïncident.

2° Soient H_1, H_2, H_3, H_4 les sous-espaces hilbertiens d'antinoyaux L_1, L_2, L_3, L_4 .

On a $H_1 + H_4 = H_2 + H_3$, que nous appellerons K . Mesurons les codimensions relativement à K . On a $\dim H_2 = n$, donc $\text{codim } H_3 \leq n$; comme $H_3 \cap H_4 = \{0\}$,

on a $\dim H_4 = m \leq n$. Si on compare deux décompositions $L_3 - L_4$, $L_5 - L_6$, avec chaque fois deux antinoyaux ≥ 0 étrangers, elles donnent la même dimension pour H_4 et H_6 , car on a alors deux inégalités en sens inverse.

Soient deux espaces hermitiens de même antinoyau L . On aura deux décompositions $L = L_3 - L_4 = L_5 - L_6$, chaque fois comme différence de deux antinoyaux ≥ 0 étrangers ; et les deux sous-espaces hermitiens seront $H_3 - H_4$ et $H_5 - H_6$. Appelons H , cette fois, l'espace $H_3 + H_6 = H_4 + H_5$, et mesurons les codimensions par rapport à H . On a $\dim H_4 = \dim H_6 = m$; de $H = H_3 + H_6$, on tire $\text{codim } H_3 \leq m$, et, de $H = H_4 + H_5$, $\text{codim } H_5 \leq m$; comme $H_3 \cap H_4 = \{0\}$, on a

$$\text{codim } H_3 = m, \quad \text{et} \quad H_3 + H_4 = H \quad ;$$

de même, comme $H_5 \cap H_6 = \{0\}$,

$$\text{codim } H_5 = m, \quad \text{et} \quad H_5 + H_6 = H \quad .$$

Alors les structures hermitiennes $H_3 - H_4$ et $H_5 - H_6$ sont placées sur l'espace $H_3 + H_4 = H_5 + H_6 = H$, donc, d'après le 1°, elles coïncident.

Ainsi une condition de finitude entraîne l'unicité du sous-espace hermitien donnant un antinoyau L . Mais cette condition de finitude n'est pas nécessaire pour assurer l'unicité : si E est hilbertisable, si L est un antinoyau associé à une structure hermitienne H sur E lui-même, le 1° montre qu'il existe un seul sous-espace hermitien d'antinoyau L , même si $L = L_1 - L_2$, L_1 et L_2 antinoyaux ≥ 0 étrangers de rangs infinis.

Voici maintenant des résultats de non-unicité. Nous dirons qu'un sous-espace hilbertien H de E est Hilbert-compact, s'il existe un sous-espace hilbertien K de E , $K \supset H$, tel que l'injection $H \rightarrow K$ soit compacte. Si E est le dual d'un tonnelé nucléaire (exemple : $E = \mathcal{Q}'$, $\mathcal{S}'$, etc.), tout sous-espace hilbertien de E est Hilbert compact. Alors :

THÉOREME 10. - Soit L un antinoyau de la forme $L_1 - L_2$ où L_1 et L_2 sont des antinoyaux ≥ 0 étrangers, représentant des sous-espaces hilbertiens Hilbert-compacts de dimension infinie, alors il existe une infinité de sous-espaces hermitiens de E d'antinoyau L .

La démonstration est trop longue pour pouvoir être donnée ici. Bornons-nous à donner un autre exemple de non-unicité, essentiel pour la démonstration du

théorème 10 (et qui montre aussi que la condition de non-unicité donnée dans ce théorème est bien trop forte).

Soit E un Hilbert, et soient H_1, H_2 deux sous-espaces vectoriels fermés, d'intersection $\{0\}$ et de somme dense mais distincte de E . Leurs orthogonaux H_4, H_3 ont la même propriété. Nous les munirons tous de la structure hilbertienne induite. Puisque E est hilbertien on pourra, au lieu d'antinoiaux, considérer les noyaux de ces espaces ; le noyau A_1 de H_1 est le projecteur orthogonal de E sur H_1 . Alors $H_1 + H_4 = H_2 + H_3 = E$, donc $A_1 + A_4 = A_2 + A_3$, et, par suite, $A_1 - A_2$ et $A_3 - A_4$ sont le même opérateur hermitien A . Cependant les espaces hermitiens $H_1 - H_2$ et $H_3 - H_4$ sont distincts ; sans quoi leurs espaces vectoriels sous-jacents, $H_1 + H_2, H_3 + H_4$, seraient confondus ; on aurait alors $H_2 \subset H_1 + H_2, H_3 \subset H_1 + H_2$ donc $E = H_2 + H_3 \subset H_1 + H_2$, ou $H_1 + H_2 = E$, or il est supposé que $H_1 + H_2$ est dense mais $\neq E$.

Remarque. - L'ensemble des antinoiaux a une structure d'espace vectoriel ordonné. Le résultat du théorème 1 montre qu'il n'existe aucune structure raisonnable de ce type sur l'ensemble des sous-espaces hermitiens de E (même si E est un Hilbert). Car on peut trouver quatre sous-espaces hilbertiens H_1, H_2, H_3, H_4 , $H_1 \cap H_2 = \{0\}, H_3 \cap H_4 = \{0\}$, pour lesquels $H_1 + H_4 = H_2 + H_3$, et pour lesquels $H_1 - H_2 \neq H_3 - H_4$, avec la définition raisonnable adoptée pour $H_1 - H_2$ lorsque $H_1 \cap H_2 = \{0\}$.

9. Bibliographie

C'est ARONSZAJN qui a introduit, et systématiquement étudié les "noyaux reproduisants" (qui correspondent au cas où E est l'espace $\mathbb{C}^X$ des fonctions complexes sur un ensemble X , muni de la topologie de la convergence simple). Citons, par exemple :

ARONSZAJN (N.). - Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. math. Soc., t. 68, 1950, p. 337-404.

Le noyau de Bergman correspond à $H =$ espace des fonctions holomorphes sur un ouvert X de $\mathbb{C}^n$, muni de la norme L^2 .

Une partie des résultats de cet exposé se trouve dans mes conférences multigraphiées de Berkeley :

SCHWARTZ (Laurent). - Application of distributions to the study of elementary particles in relativistic quantum mechanics. - Berkeley, University of California, Department of Mathematics, 1961 (Technical Report, 7).

et dans celles du Centro internazionale Matematico Estivo [Septembre 1961. Vallombrosa (Italie)] qui ne sont pas encore parues.