SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE EYMARD

Homomorphismes des algèbres de groupe

Séminaire N. Bourbaki, 1962, exp. nº 231, p. 129-142
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__129_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
14e année, 1961/62, n° 231

Février 1962

HOMOMORPHISMES DES ALGÈBRES DE GROUPE

par Pierre EYMARD

(d'après Paul J. COHEN)

I. Introduction.

1. Notations.

Soit G un groupe abélien localement compact. Notons $M(G)$ l'algèbre de Banach des mesures complexes bornées sur G, pour le produit de composition

$$\mu * \nu(h) = \iint h(x + y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

($\mu \in M(G)$, $\nu \in M(G)$, h continue à support compact sur G), et la norme $\|\mu\| = \int_G d|\mu|(x)$. Soit $L^1(G)$ l'ensemble des (classes de) fonctions f intégrables par rapport à dx, mesure de Haar sur G ; en identifiant f à la mesure $f(x)\, dx$, $L^1(G)$ apparaît comme un idéal fermé de $M(G)$. Si $x \in G$, on note δ_x la masse 1 en x. Soit $\hat{G}$ le groupe dual de G. Si $x \in G$ et si $\hat{x} \in \hat{G}$, on note $\langle \hat{x}, x \rangle$ la valeur en x du caractère $\hat{x}$. On note $\hat{\mu}$ la transformée de Fourier

$$\hat{x} \to \int_G \overline{\langle \hat{x}, x \rangle}\, d\mu(x) \quad \text{de} \quad \mu \in M(G) .$$

Soient G et H deux groupes abéliens localement compacts. Adjoignons à $\hat{G}$ un point ω, et munissons $\hat{G} \cup \{\omega\}$ de la topologie du compactifié d'Aleksandrov si $\hat{G}$ n'est pas compact ; si $\hat{G}$ est compact, ω lui est adjoint comme point isolé. Soit φ un homomorphisme de l'algèbre $L^1(G)$ dans l'algèbre $M(H)$; comme $M(H)$ est semi-simple, φ est automatiquement continu (cf. [9], p. 75). Si $\hat{x} \in \hat{H}$, l'application $f \to \widehat{\varphi f}(\hat{x})$ est un homomorphisme de l'algèbre de Banach $L^1(G)$ dans les complexes, éventuellement nul ; donc il lui correspond un élément de $\hat{G} \cup \{\omega\}$, noté $\hat{\varphi}\hat{x}$, tel que, pour tous $f \in L^1(G)$ et $\hat{x} \in \hat{H}$,

$$\widehat{\varphi f}(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{\varphi}\hat{x}) \quad ,$$

où l'on convient que $\hat{\varphi}\hat{x} = \omega$ si $f \to \widehat{\varphi f}(\hat{x})$ est identiquement nul, et où l'on pose $\hat{f}(\omega) = 0$. L'application $\hat{x} \to \hat{\varphi}\hat{x}$ de $\hat{H}$ dans $\hat{G} \cup \{\omega\}$ sera dite l'application duale de l'homomorphisme φ ; elle est continue ; deux homomorphismes distincts ont des applications duales non identiques.

2. Énoncé des résultats.

Les travaux de Paul J. COHEN ([2] et [3]) concernent trois problèmes étroitement liés ; il résoud entièrement les deux premiers.

Problème 1. – Soit G un groupe abélien localement compact. Trouver toutes les mesures $\mu \in M(G)$ telles que $\mu \star \mu = \mu$.

Problème 2. – Soient G et H deux groupes abéliens localement compacts. Trouver tous les homomorphismes φ de l'algèbre $L^1(G)$ dans l'algèbre $M(H)$. Autrement dit, caractériser les applications $\hat{\varphi}$ de $\hat{H}$ dans $\hat{G} \cup \{\omega\}$ telles que, pour toute $f \in L^1(G)$, la fonction $\hat{f}(\hat{\varphi}\hat{x})$ soit transformée de Fourier d'une mesure appartenant à $M(H)$.

Problème 3. – Soit G un groupe abélien compact. Etudier pour $N \to \infty$ le comportement de la norme dans $L^1(G)$ d'une somme de N caractères de G .

Le problème 1 a d'abord été résolu par HELSON [5] dans le cas $G = T$, puis par RUDIN [11] dans le cas $G = T^n$. Voici le résultat de COHEN.

THÉORÈME 1. – *Pour qu'une mesure bornée μ sur G vérifie $\mu \star \mu = \mu$, il faut et il suffit que $\hat{\mu}$ soit la fonction caractéristique d'un ensemble $E \subset \hat{G}$, où E appartient à l'algèbre de Boole engendrée par les classes de $\hat{G}$ modulo ses sous-groupes ouverts.*

Autrement dit, il n'y a pas d'autres mesures idempotentes que celles qui sont évidentes, et fabriquées comme suit : disons qu'une $\nu \in M(G)$ est primitive, s'il existe un sous-groupe compact K de G et des $\hat{k}_1 , \dots , \hat{k}_p \in \hat{K}$ tels que ν soit l'image par injection canonique dans G de la mesure $(\hat{k}_1 + \dots + \hat{k}_p)\, dk$, où dk est la mesure de Haar normalisée sur K ; les μ idempotentes sont celles qui s'obtiennent à partir des ν primitives par une suite finie d'opérations du type $\nu_1 \star \nu_2$, $\delta - \nu$, $\nu_1 + \nu_2 - \nu_1 \star \nu_2$; elles sont combinaisons linéaires de mesures primitives. D'un autre point de vue, le théorème 1 caractérise tous les projecteurs continus de l'espace de Banach $L^1(G)$ qui commutent aux translations. Signalons que le problème 1 n'offre pas de difficulté sérieuse (même pour G non abélien) sous l'hypothèse supplémentaire $\|\mu\| = 1$, et en particulier si

μ est supposée positive : dans ce dernier cas, il n'y a pas d'autres solutions que les mesures de Haar des sous-groupes compacts (cf. [13]).

Pour $G = H = \underset{\sim}{R}$, la solution du <u>problème 2</u> est due essentiellement à BEURLING et HELSON ([1] et [6]), qui de là passent au cas où $\hat{H}$ est connexe en utilisant la densité dans $\hat{H}$ de la réunion des sous-groupes à un paramètre. Pour le cas $G = H = T$, le problème 2 est résolu par RUDIN [10], qui s'appuie sur la solution au problème 1 donnée dans ce cas par HELSON [5]. L'étude du cas $G = H = \underset{\sim}{Z}$ est due à LEJBENZON [8] et KAHANE [7]. Pour le cas général, COHEN se ramène d'abord, par compactification presque périodique, au cas où G et H sont compacts ; dans ce cas, il remarque que la partie du graphe de $\hat{\varphi}$ située dans $\hat{H} \times \hat{G}$ doit être le support de la transformée de Fourier d'une mesure idempotente sur $H \times G$: on est ainsi ramené au problème 1. Avant d'énoncer le théorème de Cohen, donnons quelques exemples d'homomorphismes :

i. Soit $\hat{\sigma}$ un homomorphisme continu de $\hat{H}$ dans $\hat{G}$; soit σ l'homomorphisme de G dans H défini par $\langle \hat{y} , \sigma x \rangle = \langle \hat{\sigma}\hat{y} , x \rangle$ pour tous $x \in G$, $\hat{y} \in \hat{H}$. Si $f \in L^1(G)$, posons

$$\varphi_{\hat{\sigma}}(f) = \int_G \delta_{\sigma(x)} f(x)\, dx \quad .$$

On a $\varphi_{\hat{\sigma}}(f) \in M(H)$, et $\varphi_{\hat{\sigma}}$ est un homomorphisme de $L^1(G)$ dans $M(H)$ tel que $\hat{\varphi}_{\hat{\sigma}} = \hat{\sigma}$.

ii. Soit α une mesure idempotente appartenant à $M(H)$; soit $E \subset \hat{H}$ le support de $\hat{\alpha}$. Si φ est un homomorphisme de $L^1(G)$ dans $M(H)$, l'application $f \to \alpha \star \varphi(f)$ en est un autre, dont l'application duale coïncide avec $\hat{\varphi}$ sur E , et vaut ω en dehors de E .

iii. Soit K un sous-groupe ouvert de $\hat{H}$, orthogonal au sous-groupe (compact) K_o de H ; soit $\hat{\sigma}$ un homomorphisme continu de K dans $\hat{G}$. Alors $\hat{\sigma}$ est la restriction à K d'une $\hat{\varphi}$ duale de l'homomorphisme φ de $L^1(G)$ dans $M(H)$ défini par

$$\varphi : \; L^1(G) \xrightarrow{\varphi_{\hat{\sigma}}} M(H/K_o) \xrightarrow{\pi} M(H) \quad ,$$

où $\varphi_{\hat{\sigma}}$ a été défini en (i), et où π est donné par la formule (convenablement normalisée)

$$\int_H h(x)\, d\pi(\mu)\,(x) = \int_{H/K_o} d\mu(\dot{x}) \int_{K_o} h(k_o + x)\, dk_o \quad .$$

Combinant cette remarque avec (ii), on voit que l'application de $\hat{H}$ dans $\hat{G} \cup \{\omega\}$, qui est identique à $\hat{\sigma}$ sur K et vaut ω hors de K, est duale d'un homomorphisme.

iv. Soient donnés $\hat{a} \in \hat{G}$, $\hat{b} \in \hat{H}$. Si $\hat{\varphi} : \hat{H} \to \hat{G} \cup \{\omega\}$ est duale d'un homomorphisme, il en est de même pour l'application $\hat{x} \to \hat{a} + \hat{\varphi}(\hat{x} + \hat{b})$.

COHEN démontre en somme qu'il n'y a pas d'autres solutions au problème 2 que celles qu'on obtient en combinant un nombre fini de fois les remarques précédentes. De façon précise :

THÉORÈME 2. – Soient G et H deux groupes abéliens localement compacts, et $\hat{\varphi}$ une application de $\hat{H}$ dans $\hat{G} \cup \{\omega\}$. Pour que $\hat{\varphi}$ soit duale d'un homomorphisme de $L^1(G)$ dans $M(H)$, il faut et il suffit qu'il existe :

1° un nombre fini de sous-groupes ouverts K_i de $\hat{H}$ et, pour chaque $i = 1, \dots, n$, un $\hat{a}_i \in \hat{G}$, un $\hat{b}_i \in \hat{H}$, et un homomorphisme continu $\hat{\sigma}_i$ de K_i dans $\hat{G}$;

2° une partition finie $\hat{H} = \bigcup_{j=1}^{p} S_j$, chaque S_j figurant dans l'algèbre de Boole engendrée par les classes $K_i - \hat{b}_i$;

tels que, pour tout $j = 1, \dots, p$, la restriction de $\hat{\varphi}$ à S_j ou bien vaut identiquement ω, ou bien est de la forme $\hat{x} \to \hat{a}_i + \hat{\sigma}_i(\hat{x} + \hat{b}_i)$ pour un indice i tel que $S_j \subset K_i - \hat{b}_i$.

Pour $G = T$, le problème 3 est de borner inférieurement la norme dans $L^1(T)$ des sommes finies d'exponentielles

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} \exp(in_j x) \quad ,$$

où les n_j sont des entiers tous distincts. LITTLEWOOD [4] conjecture que

$$\|f\| = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=1}^{N} \exp(in_j x) \right| dx > K \log N \quad ,$$

où K est une constante indépendante de N. Les résultats obtenus jusqu'à présent concernaient des suites n_j soumises à des hypothèses particulières (cf. SALEM [12]). On ignorait si, pour des suites n_j quelconques, $\|f\|$ augmente indéfiniment avec N. Les relations entre les problèmes 3 et 1 sont éclairées par la remarque suivante : s'il existait une suite de f_N, somme de N exponentielles, telle que les $\|f_N\|$ soient bornées (mais, d'après COHEN, ce n'est pas le cas!), on pourrait en extraire une suite infinie convergeant vaguement dans $M(T)$ vers une μ idempotente. L'estimation conjecturée par LITTLEWOOD est la meilleure possible (cas des $n_j = j$) ; COHEN démontre un peu moins.

THÉORÈME 3. – Soit G un groupe abélien compact connexe. Pour $j = 1, \ldots, N \geqslant 3$, soient $\hat{x}_j$ des caractères distincts sur G, et des constantes telles que $|c_j| \geqslant 1$. On a :

$$\int_G \Big| \sum_{j=1}^{N} c_j \langle \hat{x}_j , x \rangle \Big| \, dx > K(\log N / \log \log N)^{1/8} ,$$

où K est une constante indépendante des $\hat{x}_j$, des c_j, et de G.

La généralisation aux groupes connexes n'est pas sans intérêt ; par exemple, prenant pour G le compactifié presque périodique de $\mathbb{R}$, on obtient l'inégalité

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \Big| \sum_{j=1}^{N} \exp(i \lambda_j x) \Big| \, dx > K(\log N / \log \log N)^{1/8}$$

pour des nombres réels distincts λ_j quelconques.

II. Réduction du problème 2 au problème 1.

Admettons provisoirement le théorème 1.

1. Prolongement de φ à $M(G)$.

PROPOSITION 1. – Tout homomorphisme φ de $L^1(G)$ dans $M(H)$ se prolonge en un homomorphisme, de même norme, de $M(G)$ dans $M(H)$, par la formule

$$\widehat{\varphi\mu}(\hat{x}) = \hat{\mu}(\hat{\varphi}\hat{x}) , \qquad (\mu \in M(G) , \ \hat{x} \in \hat{H}) \tag{1}$$

où l'on convient que $\hat{\mu}(\omega) = 0$.

Dans l'espace des fonctions continues sur H nulles à l'infini, est uniformément dense le sous-espace des $g \in L^1(H)$, continues et telles que $\hat{g}$ soit à support compact. Soient $k_n \in L^1(G)$, $\|k_n\| = 1$. Dans l'inégalité

$$\Big| \int_{\hat{H}} \hat{g}(-\hat{x}) \, \hat{\mu}(\hat{\varphi}\hat{x}) \, \hat{k}_n(\hat{\varphi}\hat{x}) \, d\hat{x} \Big| = \Big| \int_{\hat{H}} \hat{g}(-\hat{x}) \, \widehat{\varphi(k_n * \mu)}(\hat{x}) \, d\hat{x} \Big| = \Big| \int_H g(x) \, d\varphi(k_n * \mu)(x) \Big|$$

$$\leq |||\varphi|||\ \|\mu\|\ \|g\|_\infty \qquad ,$$

prenons les k_n tels que les fonctions $\hat{x} \to \hat{k}_n(\hat{\varphi}\hat{x})$ tendent vers 1 uniformément sur $(-\text{ support}(\hat{g})) \cap \hat{\varphi}^{-1}(\hat{G})$. On voit que la forme linéaire

$$g \to \int_{\hat{H}} \hat{g}(-\hat{x})\ \hat{\mu}(\hat{\varphi}\hat{x})\ d\hat{x}$$

se prolonge par continuité en une mesure $\varphi(\mu) \in M(H)$, de norme $\leq |||\varphi|||\ \|\mu\|$, et dont la transformée de Fourier est donnée par (1).

C. Q. F. D.

Remarque. - Il résulte a posteriori du théorème 2 que le prolongement de φ est unique si et seulement si l'on est dans l'un des cas : G discret ; $\omega \notin \hat{\varphi}(\hat{H})$.

2. Cas des groupes compacts.

PROPOSITION 2. - Soient G et H abéliens compacts ; φ un homomorphisme de $L^1(G)$ dans $M(H)$. Soit E la partie de $\hat{H} \times \hat{G}$ formée des $(\hat{x}, \hat{\varphi}\hat{x})$, où $\hat{x} \in \hat{H}$ et $\hat{\varphi}\hat{x} \neq \omega$. Alors la fonction caractéristique χ_E de E est transformée de Fourier d'une mesure idempotente appartenant à $M(H \times G)$.

Soit $k \in L^1(H)$ tel que $\|k\| = 1$ et que $\hat{k}$ soit à support fini. Si

$$(x , y) \in H \times G \qquad ,$$

posons

$$F_k(x , y) = k *_{M(H)} \varphi(\delta_{-y}).(x) = \sum_{\substack{\hat{\alpha}\in\hat{H} \\ \hat{\varphi}\hat{\alpha}\neq\omega}} \hat{k}(\hat{\alpha})\ \langle \hat{\varphi}\hat{\alpha} , y\rangle\langle\hat{\alpha} , x\rangle \qquad .$$

On a

$$\|F_k\|_{L^1(H\times G)} \leq |||\varphi||| \quad \text{et} \quad \hat{F}_k(\hat{x} , \hat{y}) = \hat{k}(\hat{x})\ \chi_E(\hat{x} , \hat{y}) \qquad .$$

Prenons des $\hat{k}$ tendant vers 1 sur toute partie finie de $\hat{H}$. Alors les $\hat{F}_k$ tendent vers χ_E sur toute partie finie de $\hat{H} \times \hat{G}$, les $\|F_k\|$ étant bornées ; donc χ_E est une transformée de Fourier de mesure.

C. Q. F. D.

Ainsi (théorème 1), $E \in \mathcal{B}(\hat{H} \times \hat{G})$, algèbre de Boole engendrée par les classes de sous-groupes de $\hat{H} \times \hat{G}$. De plus E doit être un *graphe*, i. e. pour chaque $\hat{x} \in \hat{H}$ doit ~~exister~~ *au plus un* $\hat{y} \in \hat{G}$ tel que $(\hat{x}, \hat{y}) \in E$. Un raisonnement algébrique simple montre que, par le fait, E doit plus précisément appartenir à l'algèbre de Boole $\mathcal{B}'(\hat{H} \times \hat{G})$ engendrée par les classes des sous-groupes qui sont des graphes. La nécessité de la condition du théorème 2 s'en déduit immédiatement.

3. Réduction au cas compact.

On procède par compactification presque périodique. Désignons par $\hat{G}_d$ (resp. $\hat{H}_d$) le groupe $\hat{G}$ (resp. $\hat{H}$) muni de la topologie discrète, et par $\overline{G}$ (resp. $\overline{H}$) le groupe compact dual de $\hat{G}_d$ (resp. $\hat{H}_d$). Alors G (resp. H) s'identifie de manière évidente à un sous-groupe partout dense de $\overline{G}$ (resp. $\overline{H}$).

PROPOSITION 3. – *Soient G et H abéliens localement compacts, et φ un homomorphisme de $L^1(G)$ dans $M(H)$. Alors l'application duale $\hat{\varphi}$ de φ, considérée comme une application de $\hat{H}_d$ dans $\hat{G}_d \cup \{\omega\}$, est duale d'un homomorphisme $\overline{\varphi}$ de $L^1(\overline{G})$ dans $M(\overline{H})$.*

L'application identique $\hat{\sigma} : \hat{H}_d \to \hat{H}$ est duale d'un homomorphisme

$$\varphi_{\hat{\sigma}} : M(H) \to M(\overline{H}) \quad .$$

Soit $\mu \in M(\overline{G})$. Il existe des $\mu_\alpha \in M(G)$ telles que $\|\mu_\alpha\| \leqslant \|\mu\|$ et telles que les $\hat{\mu}_\alpha$ convergent vers $\hat{\mu}$ sur toute partie finie de $\hat{G}$. Les mesures

$$\varphi_{\hat{\sigma}} \circ \varphi(\mu_\alpha) \overset{\mathrm{T}}{=} \nu_\alpha \in M(\overline{H}) \quad ,$$

uniformément bornées en norme, sont telles que les $\hat{\nu}_\alpha$ convergent sur toute partie finie de $\hat{H}_d$ vers la fonction $\hat{\mu}(\hat{\varphi}\hat{x})$; cette dernière est donc transformée de Fourier d'une $\overline{\varphi}\mu \in M(\overline{H})$.

C. Q. F. D.

Ainsi $\hat{\varphi}$ satisfait à la condition "discrète" du théorème 2, avec des $K_i^!$, $S_j^!$, $\hat{\sigma}_i^!$ quelconques. Reste à voir, à l'aide de la continuité de $\hat{\varphi}$, qu'elle y satisfait pour les topologies initiales de $\hat{G}$ et $\hat{H}$. Voici quelques indications sur ce point.

Soit S l'ensemble des $\hat{x} \in \hat{H}$ tels que $\hat{\varphi}\hat{x} \neq \omega$, i. e. la projection de E sur $\hat{H}$. On montre d'abord que S est ouvert et fermé, et donc E fermé : cela tient à ce que la restriction de $\hat{\varphi}$ à chaque $S_j^! \subset S$ est uniformément continue (translatée d'homomorphisme), d'où $\overline{S_j^!} \subset S$, et S est fermé ; S est visiblement ouvert $(\hat{\varphi}^{-1}(\complement\omega))$. D'après les propositions 2 et 3 et le théorème 1, E est réunion finie d'ensembles de la forme

$$P = L \cap \left(\bigcap_{j=1}^{r} \complement M_j\right)$$

où L et M_j, classes de sous-groupes, sont, si l'on veut, des graphes et tels que $L \supset M_j$. En fait, E étant fermé, on montre qu'il est loisible de prendre les L et M_j dans l'algèbre de Boole engendrée par les fermés. Désignant par $\sim$ la projection sur $\hat{H}$, il vient alors que les $\tilde{L}$, $\tilde{M}_j$ et $\tilde{P}$ sont mesurables dans $\hat{H}$. Remarquant que, si une classe de sous-groupe est de mesure > 0, elle est nécessairement ouverte, et négligeant ceux des $\tilde{M}_j$ ou $\tilde{L}_j$ qui sont de mesure nulle, on en déduit la condition du théorème 2 avec des sous-groupes K_i ouverts.

Remarque. - Soit φ un homomorphisme de $L^1(G)$ dans $M(H)$. Pour que son image soit dans $L^1(H)$, il faut et il suffit que, pour tout ensemble C compact dans $\hat{G}$, $\hat{\varphi}^{-1}(C)$ soit compact dans $\hat{H}$.

III. La conjecture de Littlewood.

Le cas général n'offrant pas de difficulté sérieuse supplémentaire, nous nous placerons, pour esquisser la démonstration du théorème 3, dans les hypothèses $G = T$, $c_j = 1$ (du reste les seules intervenant dans l'application du théorème 3 au problème 1). On utilise deux lemmes, l'un de théorie de l'intégration, l'autre d'analyse combinatoire, que nous citons sans démonstration.

LEMME 1. - Soient μ une mesure sur un espace compact X, A un nombre $\geqslant 1$, r un entier $\geqslant 2(A+1)^2$. Soient g et $f_1 \ldots, f_r$ des fonctions continues sur X telles que, pour tout $j = 1, \ldots, r$.

(1.1) $$|g(x)| \leqslant 1 \; ; \qquad |f_j(x)| \leqslant 1$$

(1.2) $$\int f_j(x)\, d\mu(x) = 1 \; ; \qquad \int g(x)\, d\mu(x) = A$$

(1.3) $$\int g(x)\, f_i(x)\, \overline{f_j(x)}\, d\mu(x) = 0 \quad \text{quel que soit } i < j \quad .$$

Alors il existe des constantes α , β_j , γ_{ij} telles que, si l'on pose

$$g^1(x) = \alpha g(x) + \sum_j \beta_j f_j(x) + \sum_{i<j} \gamma_{ij} f_i(x) \overline{f_j(x)} g(x) \quad ,$$

on ait

$$|g^1(x)| \leq 1 \quad \text{et} \quad \int g^1(x)\, d\mu(x) = A + \frac{1}{64 A^3} \quad .$$

LEMME 2. – Soit $E = \{n_1 > n_2 > \dots > n_N\}$ une suite de N entiers, et soient r et s deux entiers positifs tels que $(2r^2)^{2s^2} \leq N$. Alors, pour tout $k = 1 , \dots , s$, il existe des ensembles d'entiers $T_k = \{m_1^{(k)} > \dots > m_r^{(k)}\}$ et P_k , avec $P_1 = \{n_1\}$, tels que

(2.1) $T_k \subset E$

(2.2) $p + m_i^{(k)} - m_j^{(k)} \notin E$, si $p \in P_k$ et $i < j$

(2.3) P_{k+1} est la réunion de P_k , T_k et des $p + m_i^{(k)} - m_j^{(k)}$ $(p \in P_k \; ; \; i < j)$.

Soit alors

$$\mu = \sum_{j=1}^{N} \exp(-\, i n_j\, x)\, dx \, , \qquad (n_j \text{ distincts}) \quad ,$$

et supposons que

$$\|\mu\| \leq M \quad ,$$

où $M \geq 1$. Soit $r = [2(M^2 + 1)] + 1$, et soit s un entier tel que $(2r^2)^{2s^2} \leq N$. A partir de ces données, le lemme 2 fournit des ensembles d'entiers T_k et P_k . Pour $1 \leq k \leq s$, on définit par récurrence sur k des fonctions g_k remplissant les conditions suivantes :

(3.1) g_k est combinaison linéaire d'exponentielles $\exp(inx)$, où $n \in P_k$;

(3.2) $|g_k(x)| \leq 1$ (et donc $| \int g_k(x)\, d\mu(x) | \leq M$) ;

(3.3) $\int g_k(x)\, d\mu(x) = 1 + \frac{k-1}{64 M^3}$.

Pour cela, il suffit de prendre $g_1(x) = \exp(i n_1\, x)$ et, pour passer de g_k à g_{k+1} , de faire jouer à g_k , g_{k+1} le rôle de g , g_1 dans le lemme 1, où l'on fait $A = 1 + \frac{k-1}{64 M^3}$ et où l'on prend pour $f_j(x)$ les $\exp(i m_j^{(k)}\, x)$ formées à l'aide des $m_j^{(k)} \in T_k$ du lemme 2, la condition (2.2) assurant (1.3).

Supposons alors que $\|\mu\|$ reste borné par M quand N devient arbitrairement grand ; la construction des $\mathfrak{g}_k$ pouvant alors se poursuivre aussi loin qu'on veut; l'inégalité

$$(3.4) \qquad 1 + \frac{k-1}{64\, M^3} \leqslant M \quad ,$$

impliquée par (3.2) et (3.3), finit par fournir contradiction ; donc $\|\mu\|$ augmente indéfiniment avec N. En fait un calcul simple, effectué à partir de (3.4) et de l'inégalité $(2r^2)^{2s^2} \leqslant N$, fournit plus précisément l'inégalité du théorème 3.

IV. Mesures idempotentes.

Notations. – $\mathfrak{J}(G)$ ensemble des $\mu \in M(G)$ telles que $\mu \star \mu = \mu$; $\mathcal{E}(G)$ ensemble des $\mu \in M(G)$ telles que $\hat{\mu}$ ne prenne que des valeurs entières ; $\mathcal{P}(G)$ ensemble des combinaisons linéaires de mesures primitives (cf. l'introduction).

1. Réduction au cas compact.

Si $\mu \in \mathfrak{J}(G)$, le support de μ est contenu dans un sous-groupe compact de G, l'orthogonal du sous-groupe des périodes de $\hat{\mu}$, lequel est ouvert dans $\hat{G}$ en vertu de l'uniforme continuité de $\hat{\mu}$. Cette remarque suffit déjà à établir le théorème 1 quand G est discret. Dans le cas général, elle ramène la démonstration du théorème 1 au cas où G est compact ($\hat{G}$ discret), ce que nous supposerons désormais.

2. Décomposition d'une mesure relativement à un sous-groupe.

Soit K un sous-groupe fermé de G. Si $\mu \in M(G)$, et si E est un ensemble μ-mesurable, posons

$$\mu_K(E) = \sum_{x+K} \mu[E \cap (x + K)] \quad ,$$

où $x + K$ parcourt l'ensemble des classes de G modulo K. On généralise ainsi la notion de partie discrète de μ, obtenue pour $K = \{0\}$. On a aisément les propriétés :

a. $\|\mu\| = \|\mu_K\| + \|\mu - \mu_K\|$;

b. $\mu \to \mu_K$ est un endomorphisme de l'algèbre $M(G)$, qui laisse fixe $\mathfrak{J}(G)$ et $\mathcal{E}(G)$;

c. si $\mu \in \mathcal{E}(G)$, le support de μ_K est contenu dans un sous-groupe fermé de G dans lequel K soit d'indice fini.

3. Enoncé et utilisation du lemme principal.

Admettons provisoirement le

LEMME principal. - *Si* $\mu \in \mathcal{E}(G)$, *ou bien* $\mu \in L^1(G)$, *ou bien il existe un sous-groupe fermé* K *d'indice infini dans* G *tel que* $\mu_K \neq 0$.

On en déduit le théorème 1 comme suit. Il suffit de démontrer que $\mathcal{E}(G) \subset \mathcal{P}(G)$. Si $\mu \in \mathcal{E}(G) \cap L^1(G)$, $\hat{\mu}$ est à support fini, donc $\mu \in \mathcal{P}(G)$. Soit $\mu \in \mathcal{E}(G)$, $\mu \notin L^1(G)$. On peut supposer que G est le plus petit sous-groupe fermé de G contenant le support de μ . Soit K le sous-groupe du lemme principal. On a $\|\mu_K\| \geq 1$ et, en vertu de (c), on a $\mu \neq \mu_K$. Supposons qu'on ait $\|\mu\| \leq n + 1$, (n **entier** ≥ 0) ; il résulte alors de (a) que $\|\mu_K\| \leq n$ et $\|\mu - \mu_K\| \leq n$. Comme μ_K et $\mu - \mu_K$ appartiennent à $\mathcal{E}(G)$, l'inclusion $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}$ est ainsi démontrée par récurrence sur n .

4. Existence d'ensembles de périodes. Application au cas $G = T$.

Soit $\mu \in \mathcal{J}(G)$ telle que $\mu \notin L^1(G)$; le support E de $\hat{\mu}$ est infini. Soit Π une partie finie de $\hat{G}$. On dit que Π est un *P-ensemble* pour E si, pour tout $\hat{x} \in E$ à l'exception d'un nombre fini, on a $(\hat{x} + \Pi) \cap E \neq \emptyset$. Un premier pas vers la "régularité par translation" de l'ensemble E est accompli par le

LEMME 3. - *Pour tout ensemble fini* $A \subset \hat{G}$, *il existe pour* E *un* *P-ensemble qui soit disjoint de* A .

Dans son principe, la démonstration de ce lemme est la même que celle du théorème 3. Supposant faux le lemme 3, on parvient à construire, pour $1 \leq k \leq s$, des ensembles T_k et P_k contenus dans $\hat{G}$ et remplissant les conditions (2.1), (2.2), (2.3) du lemme 2. La construction s'effectue par récurrence, utilisant notamment la non-existence de P-ensemble pour remplir la condition (2.2) ; elle est possible pour tout s parce que E est infini. Soit $\|\mu\| = M$, Procédant à l'aide du lemme 1 exactement comme dans le cas du théorème 3, on montre que, pour s assez grand, on obtiendrait $\|\mu\| > M$, d'où contradiction.

COROLLAIRE. - *Le théorème* 1 *est vrai pour* $G = T$.

Car, dans ce cas, le lemme principal s'obtient comme suit. Si μ était diffuse, ses coefficients de Fourier $\hat{\mu}(n)$ vérifieraient la condition ([14]) :

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{-p}^{p} |\hat{\mu}(n)| = 0 \quad .$$

Comme $\hat{\mu}(n)$ est à valeurs entières, l'ensemble E présenterait des lacunes arbitrairement grandes, ce qui contredit le lemme 3.

5. Démonstration du lemme principal.

On le démontre pour $\mathfrak{I}(G)$, car il s'en déduit immédiatement pour $\mathfrak{E}(G)$. Soit $\mu \in \mathfrak{I}(G)$, $\mu \notin L^1(G)$. Supposons désormais que μ mette en défaut le lemme principal, i. e. que $\mu_K = 0$ pour tout sous-groupe K d'indice infini dans G . Selon la méthode déjà utilisée en III et en IV. 4, on va montrer que toute inégalité $\|\mu\| \leqslant M$ serait contradictoire. Faisons d'abord deux remarques :

Remarque 1. – Pour tout $\hat{y}$ d'ordre infini et tout $\hat{x} \in \hat{G}$, le nombre d'éléments de la forme $\hat{x} + j\hat{y}$ $(j \in \underline{Z})$ qui tombent dans E est borné par un nombre fini N ne dépendant que de M .

Par dualité, c'est une conséquence facile du corollaire du lemme 3, et du théorème 3.

Remarque 2. – Soit une suite strictement croissante de sous-groupes finis F_n de $\hat{G}$. Il existe au moins un n tel que E ne contienne aucune classe modulo F_n .

Sinon on aurait $\mu_K \neq 0$ pour $K = \bigcap_n F_n^{\perp}$, d'indice infini dans G .

On s'appuie sur un lemme analogue au lemme 1, que nous énonçons sans démonstration :

LEMME 4. – Soient μ une mesure sur un espace compact X , et $A \geqslant 1$. Soient g , h , k des fonctions continues sur X telles que

(4.1) $|g(x)| \leqslant 1$; $|h(x)| \leqslant 1$; $|k(x)| \leqslant 1$;

(4.2) $\int g(x)\, d\mu(x) = A$; $\int g(x)\, h(x)\, d\mu(x) = A$; $\int k(x)\, d\mu(x) = 1$;

(4.3) $\int h(x)\, k(x)\, d\mu(x) = 0$.

Alors il existe des constantes α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , ne dépendant que de A , et non du choix de g , h , k , telles que, si l'on pose

$$g^1 = \alpha_1 g + \alpha_2 gh + \alpha_3 k + \alpha_4 hk \quad ,$$

on ait

$$|g^1(x)| \leqslant 1$$

et

$$\int g^1(x)\, d\mu(x) = A + \Delta(A) \qquad ,$$

où $\Delta(A)$ est > 0 et fonction décroissante de A .

Nous nous contenterons d'examiner le cas où G est <u>connexe</u> ($\hat{G}$ sans torsion), où la situation est un peu plus simple (dans le cas général, les complications techniques dues aux éléments d'ordre fini dans $\hat{G}$ sont levées grâce à la remarque 2).

A l'aide du lemme 4, on va construire par récurrence des fonctions $g_j^{(k)}$, $1 \leqslant j \leqslant \alpha(k)$, $|g_j^{(k)}| \leqslant 1$, et telles que, pour tout $\hat{x} \in E$ et quel que soit k , il existe j tel que

$$\int \overline{\langle \hat{x}\ ,\ x\rangle}\, g_j^{(k)}(x)\, d\mu(x) = 1 + k\Delta(M) \qquad ,$$

d'où contradiction, dès que $k \geqslant M/\Delta(M)$. Partant de $\alpha(0) = 1$ et $g_0^{(0)} = 1$, on passe des $g_j^{(k)}$ aux $g_i^{(k+1)}$ comme suit.

D'après le lemme 3, il existe des $\hat{y}_m$ $(1 \leqslant m \leqslant \alpha(k) + 1)$ deux à deux distincts tels que, pour tout $\hat{x} \in E$, il existe au moins un m avec $\hat{x} + \hat{y}_m \in E$. Fixons $\hat{x} \in E$. Par hypothèse de récurrence, on a des $g^k_{j(m)}$ tels que

$$\int \overline{\langle \hat{x}\ ,\ x\rangle} \overline{\langle \hat{y}_m\ ,\ x\rangle}\, g_{j(m)}^{(k)}(x)\, d\mu(x) = 1 + k\Delta(M) \qquad .$$

Pour un couple $m_1 \neq m_2$ au moins $j(m_1) = j(m_2)$. Soit $\hat{y} = y_{m_2} - \hat{y}_{m_1}$; d'après la remarque 1, pour un $0 \leqslant n \leqslant N$, on a $\hat{x} + n\hat{y} \in E$, mais $\hat{x} + (n+1)\,\hat{y} \notin E$. Appliquons le lemme 4 en faisant jouer aux fonctions

$$\overline{\langle \hat{x}\ ,\ x\rangle\langle \hat{y}_{m_1}\ ,\ x\rangle}\, g_{j(m_1)}^{(k)}(x)\ ; \qquad \overline{\langle \hat{y}\ ,\ x\rangle}\ ; \qquad \overline{\langle \hat{x} + n\hat{y}\ ,\ x\rangle}$$

le rôle de $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ respectivement, et en prenant $A = 1 + k\Delta(M)$. On obtient une fonction g^1 telle que

$$\hat{x}g^1 = \alpha_1\, g_{j(m_1)}^{(k)}\, \overline{\hat{y}}_{m_1} + \alpha_2\, g_{j(m_1)}^{(k)}\, \overline{\hat{y}}_{m_2} + \alpha_3\, \overline{\hat{y}^n} + \alpha_4\, \overline{\hat{y}^{n+1}} \qquad ;$$