SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE CARTIER

Classes de formes bilinéaires sur les espaces de Banach

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. n° 211, p. 85-98

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__85_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
13e année, 1960/61, n° 211

Février 1961

CLASSES DE FORMES BILINÉAIRES SUR LES ESPACES DE BANACH

par Pierre CARTIER

Introduction.

Cet exposé est un résumé d'un long article de GROTHENDIECK [3] consacré aux produits tensoriels d'espaces de Banach. On a choisi ici le point de vue dual des formes bilinéaires qui nécessite moins de développements préliminaires ; ceci a amené à modifier quelquefois la terminologie et les notations.

Les problèmes étudiés ont peu de rapport avec ceux dont traite la thèse de GROTHENDIECK [2], consacrée surtout aux espaces localement convexes les plus généraux. De même ils n'ont guère de rapport avec les travaux de SCHATTEN [4], qui s'intéresse avant tout aux opérateurs dans les espaces de Hilbert.

On a divisé cet exposé en deux parties : dans la première, on a fait l'étude des classes de formes bilinéaires sur les espaces de Banach ; les démonstrations ne présentent en général, pas de difficulté, et nous n'en donnons aucune, imitant en cela GROTHENDIECK lui-même. Dans la deuxième partie se trouvent des résultats sur les formes bilinéaires définies dans certains espaces fonctionnels usuels. A notre avis, c'est dans cette deuxième partie que se trouvent les résultats nouveaux les plus susceptibles d'applications ; aussi leurs démonstrations ont-elles été rendues indépendantes de la première partie.

I. CLASSES DE FORMES BILINÉAIRES

1. Notations.

On prend pour scalaires les nombres réels.

On note E , F , E_1 , F_1 , ... des espaces de Banach (réels).

On note $L(E , F)$ l'ensemble des applications linéaires u de E dans F pour lesquelles il existe une constante $M \geqslant 0$ avec $\|u(x)\| \leqslant M.\|x\|$ pour tout x dans E ; la plus petite des constantes M qui conviennent est notée $\|u\|$; muni de cette norme, $L(E , F)$ est un espace de Banach. Lorsque $F = \underset{\sim}{R}$ (corps des scalaires), l'espace de Banach $L(E , \underset{\sim}{R})$ est le dual E' de E. Une application linéaire $u \in L(E , F)$ est appelée un morphisme si $\|u\| \leqslant 1$, un monomorphisme si $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout x dans E , un épimorphisme si

tout y dans F de norme < 1 est l'image $u(x)$ d'un vecteur x de E de norme < 1.

Soit A une forme bilinéaire sur $E_1 \times E_2$; si $u_i : F_i \to E_i$ est un morphisme pour $i = 1, 2$, on définit une forme bilinéaire $u_1 \cdot A \cdot u_2$ sur $F_1 \times F_2$ par la formule $(u_1 \cdot A \cdot u_2)(x_1, x_2) = A(u_1(x_1), u_2(x_2))$; on définit de plus une forme bilinéaire ${}^tA$ sur $E_2 \times E_1$ par ${}^tA(x_2, x_1) = A(x_1, x_2)$. La topologie considérée sur l'ensemble des formes bilinéaires est celle de la convergence simple : des formes A_ι ont A pour limite (suivant un filtre donné sur l'ensemble des indices ι) si $A_\iota(x_1, x_2)$ a pour limite $A(x_1, x_2)$ pour tout $x_1 \in E_1$ et tout $x_2 \in E_2$.

Soit M un espace compact. On note $C(M)$ l'espace de Banach formé des fonctions continues sur M, avec la norme $\|f\| = \sup|f(m)|$. Les éléments du dual de $C(M)$ sont les mesures sur M. Si μ est une mesure positive sur un espace localement compact M et si $p \geqslant 1$, l'expression $(\mu|f|^p)^{1/p}$ est une semi-norme sur l'espace $K(M)$ des fonctions continues à support compact ; l'espace de Banach obtenu par complétion de $K(M)$ pour cette semi-norme se note $L^p(\mu)$. Un espace de Banach E est dit de type $\mathcal{C}$ s'il est isomorphe à un espace $C(M)$, de type $\mathcal{L}$ s'il est isomorphe à un espace $L^1(\mu)$, de type $\mathcal{H}$ s'il existe un produit scalaire hermitien $(x|y)$ sur E tel que $(x|x) = \|x\|^2$ (i. e. si E est un espace de Hilbert).

2. Classes de formes bilinéaires.

Une classe α de formes bilinéaires est définie par la donnée, pour chaque couple d'espaces de Banach E_i et E_2, d'un ensemble fermé convexe de formes bilinéaires sur $E_1 \times E_2$, les axiomes suivants étant vérifiés :

(C_1) *Si A est une forme de classe α sur $E_1 \times E_2$ et si $u_i : F_i \to E_i$ est un morphisme pour $i = 1, 2$, la forme $u_1 \cdot A \cdot u_2$ sur $F_1 \times F_2$ est de classe α.*

(C_2) *Soit A une forme bilinéaire sur $E_1 \times E_2$; supposons que, pour tout sous-espace de dimension finie F_i de E_i, la restriction de A à $F_1 \times F_2$ soit de classe α ; alors A est de classe α.*

(C_3) *La forme bilinéaire $\lambda \cdot xy$ sur $\underset{\sim}{R} \times \underset{\sim}{R}$ est de classe α si et seulement si $|\lambda| \leqslant 1$.*

Cette définition axiomatise les propriétés des "applications c-intégrales de norme α-intégrale ≤ 1" de GROTHENDIECK.

Si α et β sont deux classes, on écrit $\alpha \subset \beta$ si toute forme de classe α est aussi de classe β.

Il y a une "plus grande" classe ε ; une forme bilinéaire A sur $E_1 \times E_2$ est de classe ε si l'on a $|A(x_1 , x_2)| \leq \|x_1\| \cdot \|x_2\|$ quel que soit x_i dans E_i pour $i = 1 , 2$; l'ensemble des formes bilinéaires de classe ε sur $E_1 \times E_2$ est compact, et il en est par suite de même de l'ensemble des formes de classe α quelle que soit la classe α. Si M et N sont deux espaces compacts, μ une mesure positive de masse 1 sur M et ν une mesure positive de masse 1 sur N, les formes de classe ε sur $L^1(\mu) \times L^1(\nu)$ sont définies par la formule $A(f , g) = \iint f(m)\, g(n)\, K(m , n)\, d\mu(m)\, d\nu(n)$ où K parcourt l'ensemble des fonctions mesurables sur $M \times N$ (pour la mesure produit de μ et ν) telles que $|K(m , n)| \leq 1$.

Il y a aussi une "plus petite" classe π ; les formes de classe π sur $E_1 \times E_2$ sont les limites de formes décomposées du type $\sum_i f_i(x_1)\, g_i(x_2)$ avec des $f_i \in E_1'$ et $g_i \in E_2'$ en nombre fini tels que $\sum_i \|f_i\| \cdot \|g_i\| \leq 1$. Si μ est une mesure positive de masse 1 sur un espace compact M, la forme bilinéaire $I_\mu(f , g) = \mu(fg)$ sur $C(M) \times C(M)$ est de classe π. Si la forme A sur $E_1 \times E_2$ est de classe π, il existe un espace compact M, une mesure positive μ de masse 1 sur M et desmorphismes $u_i : E_i \to C(M)$ tels que $A = u_1 \cdot I_\mu \cdot u_2$. Si M et N sont deux espaces compacts, les formes de classe π sur $C(M) \times C(N)$ sont données par la formule $A(f , g) = \iint f(m)\, g(n)\, d\rho(m , n)$ où ρ parcourt l'ensemble des mesures de norme ≤ 1 sur $M \times N$.

3. Formes bilinéaires sur les espaces de Hilbert.

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Les formes de classe ε sur $H_1 \times H_2$ sont données par la formule $A(x_1 , x_2) = (u(x_1) | x_2)$ avec un morphisme arbitraire u de H_1 dans H_2 ; la forme A est de classe π si et seulement si l'on a $|\mathrm{Tr}(v,u)| \leq 1$ pour tout morphisme de rang fini v de H_2 dans H_1. Les formes de classe π sont aussi les formes qui admettent le développement en série :

$$A(x_1 , x_2) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n \cdot (e_n | x_1) \cdot (f_n | x_2)$$

avec une suite de nombres réels $\lambda_n \geq 0$ de somme ≤ 1, et des suites orthonormales de vecteurs e_n dans H_1 et f_n dans H_2 (théorème de Dixmier-Schatten).

On étend les propriétés des formes bilinéaires sur les espaces de Hilbert aux espaces de Banach généraux, au moyen de deux nouvelles classes. Soient E_1 et

E_2 deux espaces de Banach, et A une forme bilinéaire sur $E_1 \times E_2$. On dit que A est de classe η s'il existe des espaces de Hilbert H_i et des morphismes $u_i : E_i \to H_i$ tels que A soit de la forme $u_1 \cdot B \cdot u_2$ pour une forme convenable B de classe ε sur $H_1 \times H_2$. On peut caractériser de la manière suivante les forme de classe η. Introduisons l'espace de Banach F somme directe de E_1 et E_2 dont la norme est définie par $\|x_1 \oplus x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$; alors les formes de classe η sur $E_1 \times E_2$ sont les restrictions à $E_1 \times E_2$ des formes symétriques positives B sur $F \times F$ telles que $B(x , x) \leqslant \|x\|^2$.

On dira que A est de classe θ si pour tout couple de morphismes $u_i : H_i \to E_i$ (où les H_i sont de type $\mathcal{H}$), la forme $u_1 \cdot A \cdot u_2$ sur $H_1 \times H_2$ est de classe π. Il revient au même de supposer que l'on a $|\sum_i A(x_i , y_i)| \leqslant 1$ quels que soient les vecteurs $x_1 , \dots , x_n$ de E_1 et les vecteurs $y_1 , \dots , y_n$ de E_2 vérifiant les inégalités $\sum_i |f(x_i)|^2 \leqslant \|f\|^2$ et $\sum_i |g(y_i)|^2 \leqslant \|g\|^2$ (pour $f \in E_1'$ et $g \in E_2'$). Par exemple, si M et N sont deux espaces compacts, les formes de classe θ sur $C(M) \times C(N)$ sont les formes A telles que $|\sum_i A(f_i , g_i)| \leqslant 1$ quelles que soient les fonctions f_i sur M et g_i sur N avec $\sum_i |f_i|^2 \leqslant 1$ et $\sum_i |g_i|^2 \leqslant 1$.

On peut caractériser autrement les formes de classe θ. Une forme bilinéaire A sur $E_1 \times E_2$ est de classe θ si l'on peut trouver sur E_i (pour $i = 1 , 2$) une forme bilinéaire positive B_i, limite de formes décomposées $\sum_k \lambda_k f_k(x) \cdot f_k(y)$ (avec $\sum_k \lambda_k = 1$, $\lambda_k \geqslant 0$ et f_k dans E_i' de norme $\leqslant 1$), de sorte que l'on ait $|A(x , y)|^2 \leqslant B_1(x , x) \cdot B_2(y , y)$. On montre en effet facilement que les formes bilinéaires vérifiant le critère précédent forment une classe, et que si E_1 et E_2 sont de dimension finie, on obtient les formes de classe θ sur $E_1 \times E_2$.

4. Construction de classes de formes bilinéaires.

Rappelons qu'un espace de Banach E est dit métriquement accessible si pour tout $\varepsilon > 0$ et toute partie finie M de E, il existe un morphisme u de rang fini de E dans E tel que $\|u(x) - x\| < \varepsilon$ pour $x \in M$. Les espaces de type $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{H}$ sont métriquement accessibles ; il est peu vraisemblable que tout espace de Banach ait cette propriété, mais on ne connaît pas de contre-exemple.

Soit α une classe de formes bilinéaires. On peut lui associer un certain

nombre d'autres classes. Tout d'abord la classe transposée ${}^t\alpha$ se compose des formes bilinéaires A sur $E_1 \times E_2$ telles que la forme ${}^tA$ sur $E_2 \times E_1$ soit de classe α. La classe α est dite symétrique si $\alpha = {}^t\alpha$; il en est ainsi si $\alpha = \varepsilon, \pi, \theta, \eta$.

La classe duale α' de α se définit ainsi (cf. axiome C_2). Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach de dimension finie ; on a alors la propriété suivante :

(P) Une forme bilinéaire sur $E_1 \times E_2$ est de classe α' si et seulement si, pour toute forme bilinéaire B de classe α sur $E_1' \times E_2'$ du type $B(f, g) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} f(x_i) \cdot g(y_i)$, on a $\left| \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} A(x_i, y_i) \right| \leqslant 1$.

La propriété (P) est alors encore satisfaite dans chacun des cas suivants

a) E_1 et E_2 sont métriquement accessibles.

b) E_1 ou E_2 est métriquement accessible et $\alpha = \pi$.

c) E_1 et E_2 sont réflexifs et $\alpha = \pi$.

d) $\alpha = \varepsilon$.

On a $\alpha'' = \alpha$ pour toute classe α et $\varepsilon' = \pi$, $\pi' = \varepsilon$, $\eta' = \theta$, $\theta' = \eta$.

La formation de la classe $\alpha_{\mathfrak{L}}$ est analogue à celle d'un 0-ième foncteur dérivé ; on pourrait sans doute définir des foncteurs dérivés de tous ordres (les formes bilinéaires de classe α sur $E_1 \times E_2$ sont les éléments de norme $\leqslant 1$ d'un espace de Banach $B^{\alpha}(E_1, E_2)$ qui est un bifoncteur contravariant en E_1 et E_2 !).

Une forme bilinéaire A sur $E_1 \times E_2$ est dite de classe $\alpha_{\mathfrak{L}}$ si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

a) Quels que soient les morphismes $u_i : L_i \to E_i$, où L_i est de classe $\mathfrak{L}$, la forme $u_1 \cdot A \cdot u_2$ sur $L_1 \times L_2$ est de classe α.

b) Il existe des épimorphismes $v_i : F_i \to E_i$ tels que la forme $v_1 \cdot A \cdot v_2$ soit de classe α sur $F_1 \times F_2$.

Pour construire l'ensemble des formes de classe $\alpha_{\mathfrak{L}}$ sur $E_1 \times E_2$, on choisit des espaces L_i de classe $\mathfrak{L}$ et des épimorphismes $u_i : L_i \to E_i$ et l'on considère l'ensemble des formes A sur $E_1 \times E_2$ telles que $u_1 \cdot A \cdot u_2$ soit de classe α.

La classe $\alpha_{\mathcal{C}}$ se définit de manière duale ; une forme A sur $E_1 \times E_2$ est dite de classe $\alpha_{\mathcal{C}}$ si elle satisfait aux deux propriétés équivalentes suivantes :

a') Il existe des morphismes $u_i : E_i \to C_i$, où C_i est de classe $\mathcal{C}$, et une forme B de classe α sur $C_1 \times C_2$ tels que $A = u_1 \cdot B \cdot u_2$.

b') Quels que soient les monomorphismes $v_i = E_i \to F_i$, il existe une forme B sur $F_1 \times F_2$, de classe α, telle que $A = v_1 \cdot B \cdot v_2$.

On a $\alpha_{\mathcal{C}} \subset \alpha \subset \alpha_{\mathcal{L}}$ et $(\alpha_{\mathcal{L}})' = (\alpha')_{\mathcal{C}}$. On dit que la classe α est injective si $\alpha = \alpha_{\mathcal{L}}$ (par exemple ε et η sont injectives) et qu'elle est projective si $\alpha = \alpha_{\mathcal{C}}$ (par exemple π et θ sont projectives). Il est immédiat que $\alpha_{\mathcal{L}}$ est la plus petite classe injective contenant α et que $\alpha_{\mathcal{C}}$ est la plus grande classe projective contenue dans α.

5. Tableau des principales classes.

Le tableau suivant résume les relations connues entre les différentes classes ; un symbole $\alpha \to \beta$ signifie qu'il existe un nombre réel $h > 0$ tel que toute forme de classe α soit de la forme $h.B$ où B est de classe β. Certaines des relations qui suivent sont des cryptographies pour les résultats de la deuxième partie.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & \eta_{\mathcal{C}} & & \theta_{\mathcal{L}} & & & & \\ & & & & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow & & & & \\ \pi_{\mathcal{C}} = \pi & \to & \varepsilon_{\mathcal{C}} & \rightleftarrows & \theta & \to & \eta & \rightleftarrows & \pi_{\mathcal{L}} & \to & \varepsilon = \varepsilon_{\mathcal{L}} \\ & & & & \| & & \| & & & & \\ & & & & \theta_{\mathcal{C}} & & \eta_{\mathcal{L}} & & & & \end{array}$$

Nous ajoutons un tableau donnant la correspondance entre nos notations et celles de GROTHENDIECK.

ε	π	η	θ	$\alpha_{\mathcal{C}}$	$\alpha_{\mathcal{L}}$	$\pi_{\mathcal{L}}$	$\varepsilon_{\mathcal{C}}$	$\alpha \subset \beta$
$\vee$	$\wedge$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{K}'$	$\backslash\alpha/$	$/\alpha\backslash$	$/\wedge\backslash$	$\backslash\vee/$	$\alpha \geqslant \beta$

II. CLASSES DE FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

1. Fonctions de type positif.

Soit M un espace compact. Une fonction continue K sur $M \times M$ est dite de type positif si $K(x, y) = K(y, x)$ et si l'on a les inégalités :

(1) $$\sum_{i,j} K(x_i , x_j)\ \lambda_i\ \lambda_j \geqslant 0$$

pour tous les systèmes finis de points x_i de M et de scalaires λ_i . On écrit $K \gg L$ pour exprimer que $K - L$ est de type positif.

Les fonctions de type positif interviennent en relation avec les espaces de Hilbert. Tout d'abord, si f est une application continue de M dans un espace de Hilbert H , et si l'on pose $K(x , y) = (f(x) | f(y))$ l'expression (1) est égale à $\| \sum_i \lambda_i\ f(x_i) \|^2$ donc est positive. Réciproquement, si K est de type positif, considérons l'espace vectoriel H formé des fonctions continues u sur M telles que $K(x , y) . m^2 - u(x)\ u(y)$ soit de type positif pour une constante $m \geqslant 0$ convenable ; si l'on note $\|u\|$ la plus petite des constantes possibles, on définit une norme sur H , pour laquelle H devient un espace de Hilbert. Posons $K_x(y) = K(x , y)$; alors K_x est un élément de H , l'application $x \to K_x$ de M dans H est continue, et l'on a $(K_x | K_y) = K(x , y)$.

Supposons la fonction de type positif K définie au moyen d'une application continue f de M dans un espace de Hilbert ; comme $f(M)$ est un sous-espace compact de H , il admet une suite dénombrable partout dense, et le sous-espace vectoriel fermé H_1 de H engendré par $f(M)$ admet une base orthonormale **dénombrable** $\{e_n\}$; si l'on pose $f_n(x) = (f(x) | e_n)$, on a $f(x) = \sum_n f_n(x) . e_n$, d'où :

(2) $$K(x , y) = \sum_n f_n(x)\ f_n(y)$$

(série uniformément convergente sur $M \times M$).

De la représentation (2), on déduit l'inégalité :

(3) $$\iint K(x , y)\ u(x)\ u(y)\ d\mu(x)\ du(y) \geqslant 0$$

pour toute mesure μ sur M , et toute fonction u sommable pour $|\mu|$. On notera que (1) est le cas particulier de (3) correspondant à $u = 1$ et $\mu = \sum_i \lambda_i\ \delta_{x_i}$ (où l'on pose $\delta_x(f) = f(x)$). Réciproquement, si le support de μ est égal à M , et si une fonction continue K sur $M \times M$ vérifie la formule (3) pour toute fonction continue u sur M , alors K est de type positif.

Choisissons maintenant une mesure μ positive sur M . On dira qu'une fonction K sommable sur $M \times M$ pour la mesure produit $\pi = \mu \otimes \mu$ est de type positif si l'on a l'inégalité (3) pour toute fonction continue u sur M ; la même

inégalité est alors valable pour u mesurable et bornée. De plus, par des raisonnements analogues aux précédents, on déduit l'existence d'une décomposition $K(x , y) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(x)\, f_{\alpha}(y)$, qui converge pour la topologie faible induite par la dualité entre $L^1(\pi)$ et l'espace des fonctions continues sur $M \times M$ (noter que sur toute partie bornée de $L^{\infty}(\pi)$, cette topologie faible coïncide avec la topologie faible résultant de la dualité entre $L^{\infty}(\pi)$ et $L^1(\pi)$; nous considérons exclusivement cette topologie faible sur $L^1(\pi)$).

2. Fonctions de type intégral.

On conserve l'espace compact M . On notera Γ l'ensemble des fonctions mesurables et bornées par 1 en module, qui sont limites faibles de fonctions de la forme $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|\, f_i(x) . f_i(y)$ où les scalaires λ_i vérifient $\sum_i |\lambda_i| \leqslant 1$ et où les fonctions mesurables f_i sont majorées par 1 en module. D'après le théorème des bipolaires, Γ n'est autre que l'ensemble des fonctions mesurables et bornées K sur $M \times M$ telles que $\left| \iint_{M \times M} K . L \, d\pi \right| \leqslant 1$ pour toute fonction L dans $L^1(\pi)$ vérifiant $\left| \iint L(x , y)\, f(x) . f(y) \, \right| d\mu(x)\, d\mu(y) \, | \leqslant 1$ pour f mesurable et majorée en module par 1 sur M . En utilisant la compacité de la boule unité de $L^{\infty}(\mu)$ pour la topologie faible, et un théorème de GROTHENDIECK sur la représentation intégrale d'une application linéaire continue d'un espace L^1 dans un espace L^{∞} au moyen d'un noyau mesurable et borné, on obtient finalement la caractérisation suivante :

L'ensemble Γ se compose des fonctions de la forme

$$K(x , y) = \int_T L(x , t)\, L(y , t)\, d\nu(t) \tag{4}$$

où ν est une mesure de norme $\leqslant 1$ sur un espace compact T , et où L est une fonction mesurable, pour la mesure produit $\mu \otimes \nu$ sur $M \times T$, bornée par 1 en module.

Il résulte immédiatement de cette caractérisation que Γ est stable par multiplication. On dira qu'une fonction de type positif est intégrale si elle appartient à Γ .

Après ces préliminaires, on peut énoncer le résultat fondamental de GROTHENDIECK.

THÉORÈME 1. - Soit μ une mesure positive sur l'espace compact M . Si la fonction K sur $M \times M$ est mesurable, bornée par 1 en module et de type positif, alors $\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1} K$ est intégrale.

On a vu que K admet une représentation comme somme faiblement convergente $K(x , y) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(x).f_{\alpha}(y)$; comme Γ est faiblement fermé, on peut se ramener au cas où la série précédente a un nombre fini de termes ; autrement dit, on peut supposer que l'on a $K(x , y) = (f(x) \,|\, f(y))$ où f est une application mesurable de M dans un espace de Hilbert H de dimension finie.

Soit S l'ensemble compact formé des vecteurs a de H de norme 1. Sur S, il existe une mesure ν positive de masse 1 invariante par le groupe des automorphismes unitaires de H, et une seule. Notons $\sigma(x)$ le signe du nombre réel x, défini par $\sigma(0) = 0$ et $\sigma(x) = x/|x|$ si $x \neq 0$. Un calcul élémentaire donne alors l'identité :

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{Arc\,sin}(a\,|\,b) = \int_S \sigma(a\,|\,t)\ \sigma(b\,|\,t)\ d\nu(t) \tag{5}$$

en convenant que Arc sin x est l'unique nombre réel compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont le sinus soit égal à x. La formule (5) prouve alors que la fonction

$$L(x , y) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arc\,sin}(f(x)\,|\,f(y)) \tag{6}$$

est de type positif et intégrale. Mais en utilisant le développement en série bien connu du sinus, on trouve :

$$K(x , y) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k\, L(x , y)^{2k+1}/(2k + 1)\,!$$

et, comme Γ est fermé, convexe et stable par multiplication, le théorème résulte immédiatement de là

C. Q. F. D.

REMARQUE. - On ne sait pas si toute fonction mesurable et bornée de type positif sur $M \times M$ est de la forme (4) avec une mesure ν positive sur T. On peut cependant prouver qu'elle est majorée (au sens de la relation d'ordre $>>$) par une telle fonction. En effet, avec les notations de la démonstration précédente, on peut prouver l'inégalité $K << \frac{\pi}{2} L$. Pour démontrer cela, on se ramène d'abord facilement au cas où $M = S$ et $\mu = \nu$; soit E l'espace de Hilbert formé des fonctions de carré sommable sur S pour la mesure ν, et soit E_1 le sous-espace, isomorphe à H, formé des fonctions de la forme $x \to (a\,|\,x)$ pour a parcourant H. Le projecteur orthogonal P de E sur E_1 est un opérateur intégral, admettant pour noyau la fonction $n.(x\,|\,y)$, si l'on

note n la dimension de H. Si l'on note A l'opérateur continu dans E ayant pour noyau la fonction mesurable $\sigma(x|y)$, notre assertion équivaut à dire que l'opérateur $\frac{\pi}{2} A^* A - P/n$ dans E est hermitien positif. Comme E_1 est stable par A et A^*, et que ces opérateurs induisent dans E_1 des homothéties (cela résulte d'un argument facile de théorie des groupes), on voit facilement que notre assertion équivaut à l'inégalité

$$\frac{\pi}{2}|\mathrm{Tr}(AP)|^2 \geqslant n ;$$

or on a

$$\mathrm{Tr}(AP) = n \iint |(x|y)|\, d\nu(x)\, d\nu(y) = n \int_S |(a|x)|\, d\nu(x) \quad ,$$

et l'on achève la démonstration en calculant explicitement ces intégrales, ce qui ramène à une inégalité sur la fonction Γ d'Euler.

3. Formes bilinéaires sur les espaces de fonctions continues.

Pour les fonctions continues de type positif, on peut donner une représentation au moyen d'une série analogue à (2), mais avec de meilleures propriétés de convergence.

THÉORÈME 2. - *Soit M un espace compact et soit $\varepsilon > 0$. Toute fonction K de type positif sur $M \times M$, continue et bornée par 1 en module, admet une représentation sous forme de série :*

$$K(x, y) = \sum_n \lambda_n f_n(x) \cdot f_n(y) \tag{7}$$

où les fonctions f_n, continues sur M, sont majorées par 1 en module, et où $\sum_n |\lambda_n| \leqslant \mathrm{sh}(\pi/2) + \varepsilon$.

Soit C l'espace des fonctions continues sur M, muni de la norme usuelle $\|f\| = \sup|f(x)|$. Par ailleurs soit E l'ensemble des fonctions sur $M \times M$ qui sont "symétriques" et "décomposées", c'est-à-dire de la forme $h(x, y) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i f_i(x) \cdot f_i(y)$; on notera Δ le sous-ensemble de E formé des fonctions h telles que $\|f_i\| \leqslant 1$ et $\sum_i |\lambda_i| < 1$. Au moyen de la formule $\tilde{u}(h) = \sum_i \lambda_i u(f_i, f_i)$, on définit une correspondance bijective entre les formes linéaires $\tilde{u}$ sur E et les formes bilinéaires symétriques u sur $C \times C$;

l'inégalité $|\tilde{u}(h)| \leqslant 1$ pour tout h dans Δ équivaut alors à $|u(f , f)| \leqslant \|f\|^2$ pour tout f dans C, ou encore à $\|u(f , g)\| \leqslant \|f\| \|g\|$ pour f et g dans C (démonstration immédiate). Le théorème de Hahn-Banach montre alors que la relation $h \in m.\Delta$ équivaut à $|\tilde{u}(h)| < m$ pour toute forme bilinéaire symétrique u sur $C \times C$ telle que $|u(f , f)| \leqslant \|f\|^2$ pour tout f dans C.

On sait qu'on peut représenter K sous la forme d'une série uniformément convergente

$$K(x , y) = \sum_i g_i(x) . g_i(y) \tag{8}$$

et chaque somme partielle est majorée en module par 1 sur $M \times M$. Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'un nombre fini n de termes dans la série (8). Soit u une forme bilinéaire symétrique sur $C \times C$ telle que $|u(f , f)| \leqslant \|f\|^2$. On va prouver $\tilde{u}(K) < \operatorname{sh}(\frac{\pi}{2}) + \varepsilon$. Comme les g_i sont continues et en nombre fini, on peut trouver un recouvrement ouvert fini $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M tel que l'oscillation de chaque g_i dans chaque U_α soit $< \varepsilon/4n$. On choisira un point x_α dans chaque U_α et une partition continue de l'unité $\{\varphi_\alpha\}$ subordonnée au recouvrement $\{U_\alpha\}$. Alors l'opérateur linéaire P dans C défini par $P(f) = \sum_{\alpha \in A} f(x_\alpha) . \varphi_\alpha$ vérifie $\|P(f)\| \leqslant \|f\|$ et $\|P(g_i) - g_i\| < \varepsilon/4n$, d'où

$$\left| \sum_i u(g_i , g_i) - \sum_i u(Pg_i , Pg_i) \right| < \varepsilon/2 \quad . \tag{9}$$

Par ailleurs, il existe une matrice symétrique $T = \|t_{\alpha\beta}\|$ telle que $u(Pf , Pg) = \sum_{\alpha,\beta} f(x_\alpha)\, t_{\alpha\beta}\, g(x_\beta)$ et telle que $|{}^t v . T . v| \leqslant 1$ pour tout vecteur $v = (v_\alpha)$ dont les composantes sont $\leqslant 1$ en module. On a alors $\sum_i u(Pg_i , Pg_i) = \sum_{\alpha,\beta} t_{\alpha\beta} . K(x_\alpha , x_\beta)$. Mais la matrice $\|K(x_\alpha , x_\beta)\|$ est symétrique, positive et ses éléments sont majorés par 1 en module. En appliquant le théorème 1 à l'espace discret A, on voit qu'il existe un espace compact T avec une mesure ν positive de norme $\leqslant \operatorname{sh}(\pi/2)$ et une fonction mesurable L sur $A \times T$ de module $\leqslant 1$ telles que

$$K(x_\alpha , x_\beta) = \int_T L(\alpha , t)\, L(\beta , t)\, d\nu(t) \quad .$$

Un calcul facile montre alors qu'on a $|\sum_i u(Pg_i , Pg_i)| \leqslant \operatorname{sh}(\pi/2)$ et finalement $\tilde{u}(K) < \operatorname{sh}(\pi/2) + \varepsilon/2$.

On règle facilement le cas général. Comme la série (8) converge uniformément, on voit qu'on peut trouver une suite strictement croissante $\{i_k\}$ telle que

$\left| \sum_{i_k \leq i < i_{k+1}} g_i(x) \cdot g_i(y) \right| \leq \varepsilon / 20 \cdot 2^k$, et on appliquera à chacune de ces sommes partielles le résultat précédent.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - Soit u une forme bilinéaire symétrique sur $C \times C$ telle que $|u(f , g)| \leq \|f\| \, \|g\|$. Il existe alors une mesure μ positive de masse $\leq \operatorname{sh}(\frac{\pi}{2})$ sur M telle que $|u(f , f)| \leq \mu(f^2)$, et la forme bilinéaire u se prolonge par continuité en une forme bilinéaire sur $L^2(\mu) \times L^2(\mu)$.

[Démonstration copiée de [1]].

Posons $v = \operatorname{sh}(\frac{\pi}{2})^{-1} . u$. Le théorème 2 montre que l'on a alors $\left| \sum_i v(f_i , f_i) \right| \leq \left\| \sum_i f_i^2 \right\|$, et par conséquent la quantité

$$Q(g , f_1 , \cdots , f_n) = \left\| g + \sum_i f_i^2 \right\| - \left| \sum_i v(f_i , f_i) \right|$$

reste bornée en module par $\|g\|$ lorsque n et les f_i varient. On notera $Q(g)$ la borne inférieure de $Q(g , f_1 , \cdots , f_n)$ lorsque n et les f_i varient ; on vérifie immédiatement les relations suivantes :

$$Q(\lambda . g) = \lambda . Q(g) \qquad \text{si} \quad \lambda > 0 \tag{9}$$

$$Q(g_1 + g_2) \leq Q(g_1) + Q(g_2) \tag{10}$$

$$|Q(g)| \leq \|g\| \tag{11}$$

$$Q(-|g|^2) \leq - |v(g , g)| \tag{12}$$

D'après les deux premières propriétés et le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire μ' sur C telle que $\mu'(g) \leq Q(g)$. D'après (11), μ' est de norme ≤ 1 , et l'on a $|v(g , g)| < \mu' |g|^2$ d'après (12). Il en résulte que μ' est une mesure positive de masse ≤ 1 , et si l'on pose $\mu = \mu' \operatorname{sh}(\pi/2)$. , on a bien $|u(g , g)| \leq \mu |g|^2$.

REMARQUES. C. Q. F. D.

1) Si M est un groupe compact, et si la forme bilinéaire v est invariante par les translations à gauche, il en sera de même de la fonctionnelle Q ; si μ' est une mesure telle que $\mu'(g) \leq Q(g)$, on aura encore $\nu(g) \leq Q(g)$, en notant ν la moyenne des translatées à gauche de μ' ; ceci prouve que l'on peut alors supposer que μ' est une mesure de Haar sur G , et que u se prolonge par continuité en une forme bilinéaire sur $L^2(\mu) \times L^2(\mu)$ pour une mesure

de Haar μ .

2) Le corollaire s'étend facilement au cas des formes bilinéaires continues sur $C(M) \times C(N)$ où M et N sont deux espaces compacts ; il suffit d'appliquer le corollaire à l'espace compact P somme topologique de M et N et à une forme bilinéaire symétrique sur $C(P) \times C(P)$ convenablement déduite de u .

4. Conséquences diverses.

Les théorèmes précédents permettent de prouver un certain nombre de résultats d'analyse fonctionnelle. Nous donnerons seulement quelques exemples.

A) Opérateurs linéaires.

Soient H_1 , H_2 des espaces de Hilbert, C_1 , C_2 des espaces de type $\mathcal{C}$ et L_1 , L_2 des espaces de type $\mathcal{L}$. Rappelons qu'une application linéaire $u : E \to F$ où E et F sont des espaces de Banach est dite nucléaire si elle se représente sous la forme $u(x) = \sum_{n \geqslant 0} f_n(x) . e_n$ avec $f_n \in L'$ et $e_n \in F$ tels que $\sum_{n \geqslant 0} \|e_n\| \, \|f_n\|$ soit fini.

Toute application composée :

$$C_1 \to L_1 \to C_2 \to L_2$$

$$H_1 \to C_1 \to L_1$$

$$C_1 \to L_1 \to H_1$$

est nucléaire. Toute application composée : $H_1 \to C_1 \to H_2$ ou $H_1 \to L_1 \to H_2$ est du type de Hilbert-Schmidt.

B) Intégration.

Soit M un espace compact et C l'espace de Banach des fonctions continues sur M . Si u est une application linéaire de C dans un espace de Banach E de type $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{L}$, il existe une mesure positive μ sur M telle que u se prolonge par continuité en une application linéaire de $L^2(\mu)$ dans E .

Si μ est une mesure positive sur M et si u est une application linéaire continue d'un espace de Hilbert H à valeurs dans $L^1(\mu)$, il existe une fonction $f \in L^2(\mu)$ telle que u se factorise en une application linéaire continue de H dans $L^2(\mu)$ suivie de la multiplication par f (qui applique $L^2(\mu)$ dans $L^1(\mu)$).

C) Théorème de Littlewood.

Si μ est une mesure positive sur un espace localement compact M, et si la série $\sum_n f_n$ des fonctions sommables est commutativement convergente dans $L^1(\mu)$, la somme des carrés des normes des f_n est sommable.

En corollaire, si f est une fonction sur un groupe discret G et si le produit de f par toute fonction f' de carré égal à 1 est combinaison linéaire de fonctions de type positif, alors f est de carré sommable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMEMIYA (I.) and SHIGA (K.). - On tensor products of Banach spaces, Kodai math. Semin. Reports, t. 9, 1957, p. 161-186.

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Memoirs of the American mathematical Society, 16).

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Bol. Soc. Mat. Sao Paulo, t. 8, 1956, p. 1-79.

[4] SCHATTEN (Robert). - A theory of cross-spaces. - Princeton, Princeton University Press, 1950 (Annals of Mathematics Studies, 26).