ALAIN GUICHARDET

Représentations des algèbres involutives

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. n° 207, p. 33-40
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__33_0>

Séminaire BOURBAKI
13e année, 1960/61, n° 207

Décembre 1960

REPRÉSENTATIONS DES ALGÈBRES INVOLUTIVES

par Alain GUICHARDET
(d'après un article de James GLIMM [6])

Il ne sera question ici que de C^*-algèbres et de représentations dans des espaces hilbertiens. Si $\mathfrak{A}$ est une telle algèbre, l'espace de ses idéaux primitifs, muni de la topologie de Jacobson, est toujours un T_0-espace ; on munit le spectre $\hat{\mathfrak{A}}$ de $\mathfrak{A}$ de la topologie image réciproque de la précédente par l'application $\varphi \to \operatorname{Ker} \varphi$; $\hat{\mathfrak{A}}$ est évidemment un T_0-espace si et seulement si deux représentations irréductibles de $\mathfrak{A}$ de même noyau sont équivalentes.

Supposons $\mathfrak{A}$ séparable ; soient H_n un espace hilbertien de dimension n ($n = 1, 2, \ldots, \infty$, où ∞ désigne la puissance du dénombrable). $\hat{\hat{\mathfrak{A}}}_n$ l'espace des représentations (concrètes) irréductibles de $\mathfrak{A}$ dans H_n et $\hat{\mathfrak{A}}_n$ l'espace de leurs classes d'équivalence ; l'ensemble $\hat{\mathfrak{A}}$ est la somme des $\hat{\mathfrak{A}}_n$ et la topologie de Jacobson sur $\hat{\mathfrak{A}}_n$ est identique à la topologie quotient de la topologie simple faible sur $\hat{\hat{\mathfrak{A}}}_n$.

On peut considérer [8] sur $\hat{\mathfrak{A}}_n$ la structure borélienne (séparée, plus fine que la structure borélienne sous-jacente à la topologie de Jacobson) quotient de la structure borélienne sous-jacente à la topologie simple faible et sur $\hat{\mathfrak{A}}$ la structure borélienne somme des précédentes ; et on dit que $\hat{\mathfrak{A}}$ est <u>lisse</u> si, muni de cette structure borélienne, il est dénombrablement séparé, et <u>métriquement lisse</u> si pour toute mesure borélienne finie sur $\hat{\mathfrak{A}}$ il existe un sous-ensemble borélien de $\hat{\mathfrak{A}}$ de complémentaire négligeable qui soit dénombrablement séparé.

Une C^*-algèbre $\mathfrak{A}$ est dite CCR-algèbre (ou de Kaplansky) si pour toute représentation irréductible φ de $\mathfrak{A}$, $\varphi(\mathfrak{A})$ est l'algèbre des opérateurs compacts ; alors $\mathfrak{A}$ admet une suite de composition dont les quotients ont des spectres séparés. Une C^*-algèbre est dite GCR-algèbre si elle admet une suite de composition à quotients CCR ou encore une suite de composition dont les quotients ont des spectres séparés. On démontre [7] que toute C^*-algèbre contient un plus grand idéal GCR et que le quotient est sans idéaux GCR . .

<u>Exemples de CCR-algèbres</u> : Les C^*-algèbres des groupes de Lie connexes semi-simples et des groupes de Lie réels nilpotents simplement connexes.

<u>Exemples de GCR-algèbres</u> : Les C^*-algèbres des groupes algébriques réels.

Exemples de C^*-algèbres sans idéaux GCR : Toute C^*-algèbre d'opérateurs dont l'adhérence faible n'a pas de composante de type I [5].

Propriétés relatives aux C^*-algèbres.

(a) $\mathfrak{A}$ est GCR .

(b) $\mathfrak{A}$ est de type I (i. e. toute représentation factorielle de $\mathfrak{A}$ est de type I).

(c) $\hat{\mathfrak{A}}$ est un T_o-espace.

(d) Pour toute représentation irréductible φ de $\mathfrak{A}$, $\varphi(\mathfrak{A})$ contient l'algèbre des opérateurs compacts.

(e) $\hat{\mathfrak{A}}$ est lisse.

(f) $\hat{\mathfrak{A}}$ est métriquement lisse.

Les implications (a) $\Longrightarrow$ (d) et (d) $\Longrightarrow$ (c) se démontrent relativement facilement (voir par exemple le présent article).

(a) $\Longrightarrow$ (b) : voir [7].

(c) $\Longrightarrow$ (a) , (c) $\Longrightarrow$ (e) et (e) $\Longrightarrow$ (c) pour les C^*-algèbres séparables : voir respectivement [3], [4] et [2].

Enfin l'implication (e) $\Longrightarrow$ (f) est évidente.

On va démontrer ici, pour les C^*-algèbres séparables, les résultats suivants :

THÉORÈME 1.

(i) (b) $\Longrightarrow$ (a) . Plus précisemment, toute C^*-algèbre séparable non GCR admet des représentations factorielles de types II et III .

(ii) (c) $\Longrightarrow$ (a) .

THÉORÈME 2. - (f) $\Longrightarrow$ (a) .

L'outil essentiel pour leur démonstration sera le lemme suivant.

LEMME. - Soit $\mathfrak{A}$ une C^*-algèbre séparable à unité sans idéaux GCR et soit S_o , S_1 , S_2 , ... une suite d'éléments hermitiens de $\mathfrak{A}$; on suppose $S_o \geq 0$ et $\|S_o\| = 1$. Pour tout entier $n \geq 1$, il existe des éléments de $\mathfrak{A}$ non nuls et de norme ≤ 1 $V(a_1 , \dots , a_n)$ ($a_i = 0$ ou 1) et une matrice hermitienne $\alpha(a_1,\dots, a_n), (b_1,\dots, b_n)$ tels que si on pose

$$T_n = \sum_{\substack{a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n}} \alpha_{(a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)} \cdot V(a_1 , \dots , a_n) \cdot V(b_1 , \dots , b_n)^*$$

$$E(n) = \sum_{a_1,\dots,a_n} V(a_1 , \dots , a_n) \cdot V(a_1 , \dots , a_n)^*$$

<u>les conditions suivantes soient vérifiées</u> :

(1) <u>si</u> $i \geq 2$, $\|E(i) \cdot (S_{i-1} - T_{i-1}) \cdot E(i)\| < \frac{1}{i}$

(2) $S_o + \frac{1}{4} I \geq V(0) \cdot V(0)^*$.

(3) <u>si</u> $j \leq i$ <u>et si</u> $a_1 , \dots , a_j \neq b_1 , \dots , b_j$, <u>alors</u>

$$V(a_1 , \dots , a_j)^* \cdot V(b_1 , \dots , b_j) = 0 .$$

(4) <u>si</u> $i \geq 2$, $V(a_1 , \dots , a_i) = V(a_1 , \dots , a_{i-1}) \cdot V(0 , \dots , 0 , a_i)$

(5) <u>si</u> $j < i$

$$V(a_1 , \dots , a_j)^* \cdot V(a_1 , \dots , a_j) \cdot V(0 , \dots , 0 , a_i) = V(0 , \dots , 0 , a_i)$$

(6) $V(0 , \dots , 0) \geq 0$.

<u>De plus si</u> $\mathfrak{M}(n)$ <u>est l'espace vectoriel engendré par les</u> $V(a_1 , \dots , a_n) \cdot V(b_1 , \dots , b_n)^*$, <u>si</u> φ <u>est une représentation de</u> $\mathfrak{A}$ <u>qui n'annule aucun</u> $E(n)$ <u>et si</u> $F(n)$ <u>est l'adhérence de l'image de</u> $\varphi(E(n))$, $F(n)$ <u>est une fonction décroissante de</u> n , $\varphi(\mathfrak{M}(n))$ <u>conserve</u> $F(n + 1)$ <u>et l'algèbre induite</u> $\varphi(\mathfrak{M}(n))_{F(n+1)}$ <u>est isomorphe à l'algèbre des matrices à</u> 2^n <u>dimensions, les opérateurs</u> $\varphi(V(a_1 , \dots , a_n) \cdot V(b_1 , \dots , b_n)^*)_{F(n+1)}$ <u>correspondant aux éléments de base habituels.</u>

Nous esquisserons seulement la construction des $V(a_1 , \dots , a_n)$ et des $\alpha_{(a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)}$ et la vérification de la condition (1), le reste ne présentant pas de difficultés majeures.

On va construire en plus des éléments $B(n)$ positifs de norme 1 tels que :

(7) $$V(a_1 , \dots , a_n)^* \cdot V(a_1 , \dots , a_n) \cdot B(n) = B(n) .$$

Procédant par récurrence, on pose $B(0) = S_o^{1/2}$, $V(\emptyset) = I$ et on suppose construits $B(n)$, les $V(a_1 , \dots , a_i)$ pour $i = 1 , \dots , n$ et les $\alpha_{(a_1,\dots,a_i) \cdot (b_1,\dots,b_i)}$

pour $i = 1, \ldots n-1$, de façon que l'on ait (7) et (1) à (6) pour $0 < j \leq i \leq n$; on va construire les $\alpha_{(a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n)}$, $V(0,\ldots,0,0)$, $V(0,\ldots,0,1)$ et $B(n+1)$ et on définira $V(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1})$ par (4) pour $n \geq 0$.

Le spectre de $B(n)$ contient 1, par suite, il existe une forme linéaire positive élémentaire μ sur $\mathfrak{A}$ telle que

$$\mu(I) = \mu(B(n)) = 1 \quad .$$

On pose

$$\alpha_{(a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n)} = \mu(V(a_1,\ldots,a_n)^* . S_n . V(b_1,\ldots,b_n)) \; .$$

μ définit une représentation irréductible φ dans un hilbertien H et un vecteur $x \in H$ de norme 1 tels que

$$\mu(A) = (\varphi(A)\, x \,|\, x) \qquad \text{pour tout } A \in \mathfrak{A} \quad .$$

Soit K le sous-espace vectoriel fermé de H engendré par les $\varphi(V(a_1,\ldots,a_n))\, x$; on a

$$K . \varphi(S_n) . K = K . \varphi(T_n) . K$$

donc

$$(\varphi(S_n - T_n) . y \,|\, y) = 0 \qquad \text{pour tout } y \in K \quad .$$

Il existe $B \in \mathfrak{A}$ tel que $0 \leq B \leq I$ et que $\varphi(B)$ conserve les $V(a_1,\ldots,a_n) . x$. Posons

$$A = B(n) . \prod_{a_1,\ldots,a_n} V(a_1,\ldots,a_n)^* . B . V(a_1,\ldots,a_n)$$

ce produit étant pris dans un ordre quelconque.

Il existe un nombre réel positif γ tel que pour toute forme linéaire positive normée λ sur $\mathfrak{A}$

$$\lambda(B) > 1 - \gamma \implies |\lambda(S_n - T_n)| < \frac{1}{n+1} \quad .$$

Puis il existe un nombre réel positif δ tel que pour toute suite A_i ($i = 1, \ldots, 2^{n+1} + 2$) d'éléments de $\mathfrak{L}(H)$ tels que $0 \leq A_i \leq I$ et pour tout vecteur unitaire $t \in H$:

$$(A_1 \dots A_{2^{n+1}+2} A_{2^{n+1}+2} \dots A_1 t \mid t) > 1 - \delta$$

implique

$$(A_i t \mid t) > 1 - \frac{\gamma}{2} \text{ et } \|A_i t - t\| < \frac{\gamma}{2} \qquad \text{pour tout } i \quad .$$

Posons $\sigma = \inf \left(\frac{1}{16}, \delta\right)$.

Pour tout ε tel que $0 < \varepsilon < 1$ on note f_ε la fonction égale à 0 entre $-\infty$ et $1 - \varepsilon$, à 1 entre $1 - \frac{\varepsilon}{2}$ et $+\infty$ et linéaire entre $1 - \varepsilon$ et $1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $B_\varepsilon = f_\varepsilon(A A^*)$; alors $B_\sigma \neq 0$ et, <u>comme</u> $\mathfrak{A}$ <u>est sans idéaux</u> GCR, il existe une représentation irréductible ψ de $\mathfrak{A}$ telle que rang $\psi(B_\sigma) \geq 2$; soient y et z des vecteurs orthogonaux unitaires appartenant à l'image de $\psi(B_\sigma)$; il existe $C \in \mathfrak{A}$ tel que $0 \leq C \leq 1$ et que $\psi(C)\, y = y$ et $\psi(C).z = 0$.

Posons $D_o = B_{2\sigma}.C.B_{2\sigma}$ et $D_1 = B_{4\sigma} - D_o$. Il existe un élément unitaire $U \in \mathfrak{A}$ tel que $\psi(U)\, y = z$. Posons $V = f_\sigma(D_1).U.f_\sigma(D_o)$ et notons $k(x)$ la fonction égale à $(f_{1/2}(x).x^{-1})^{1/2}$ pour $x \neq 0$ et à 0 pour $x = 0$.

On pose enfin

$$V(0, \dots, 0, 0) = (f_{1/2}(V^*V))^{1/2}$$

$$V(0, \dots, 0, 1) = V.k(V^*V)$$

$$B(n+1) = f_{1/4}(V^*V) \ .$$

<u>Principe de la vérification de la condition (1).</u>

On suppose $\mathfrak{A}$ réalisée comme algèbre d'opérateurs dans un hilbertien. On montre facilement que pour tout vecteur unitaire w appartenant à l'image de $V(a_1, \dots, a_{n+1})$:

$$(A A^*.V(a_1, \dots, a_{n+1})^*.w \mid V(a_1, \dots, a_{n+1})^*.w) \geq 1 - \delta$$

d'où, d'après la définition de δ

$$(V(a_1,\dots,a_{n+1})^* B.V(a_1,\dots,a_{n+1}).V(a_1,\dots,a_{n+1})^*.w \mid V(a_1,\dots,a_{n+1})^*.w) > 1 - \frac{\gamma}{2}$$

et enfin

$$(Bw \mid w) > 1 - \frac{\gamma}{2} \quad .$$

Puis, pour tout s unitaire appartenant à l'image de $E(n+1)$:

$$(Bs \mid s) > 1 - \gamma$$

d'où, par définition de γ :

$$|((S_n - T_n)\, s \mid s)| < \frac{1}{n+1}$$

d'où enfin la condition (1).

<u>Démonstration du théorème 1, (i)</u> (esquisse).

Il suffit de montrer que si $\mathfrak{A}$ est sans idéaux GCR , $\mathfrak{A}$ a des représentations factorielles de types II et III ; on peut supposer que $\mathfrak{A}$ possède un élément unité.

On applique le lemme avec des S_i partout denses dans l'ensemble des éléments hermitiens de $\mathfrak{A}$ et tels que pour tout i il existe $j > i$ avec $S_i^- = S_j$.
Soit h un prolongement à $\mathfrak{A}$ de la forme linéaire positive sur $\mathfrak{M}$ (= C^*-algèbre engendrée par les $\mathfrak{M}(n)$) définie par $h(I) = 1$ et

$$h(V(a_1 , \dots , a_n) \cdot V(b_1 , \dots , b_n)^*) = \delta^{b_1,\dots,b_n}_{a_1,\dots,a_n} \cdot q^{\Sigma a_i} \cdot p^{n-\Sigma a_i}$$

où p est un nombre réel fixe, $0 < p \leq \frac{1}{2}$ et $q = 1 - p$. h définit une représentation φ de $\mathfrak{A}$ dans un espace hilbertien H séparable et un vecteur totalisateur $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$ et $h(A) = (\varphi(A) \cdot x \mid x)$ pour $A \in \mathfrak{A}$. On a $\varphi(S_0) \neq 0$ d'après le choix de h et la condition (2) du lemme. Posons $F = \inf F(n)$; on a $F \in \overline{\varphi(\mathfrak{A})}$ (dans la suite, la barre désignera l'adhérence faible), $x \in F$; $\varphi(\mathfrak{M}(n))$ conserve F et $\varphi(\mathfrak{M}(n))_F$ est isomorphe à l'algèbre des matrices à 2^n dimensions. $\varphi(\mathfrak{M})_F$ est dense dans $\varphi(\mathfrak{A})_F$ pour la topologie de la norme d'après la condition (1) du lemme et le choix des S_i , donc $\overline{\varphi(\mathfrak{A})}_F = \overline{\varphi(\mathfrak{M})}_F$.

Si on montre que $\overline{\varphi(\mathfrak{M})}_F$ est un facteur de type II ou III , il en sera de même de $\varphi(\mathfrak{A})'_F$: comme F contient x (totalisateur pour $\varphi(\mathfrak{A})$) , $\varphi(\mathfrak{A})'$ est isomorphe à $\varphi(\mathfrak{A})'_F$; enfin $\overline{\varphi(\mathfrak{A})}$ sera un facteur de type II ou III .

On va montrer que $\overline{\varphi(\mathfrak{M})}_F$ est un facteur de type II ou III suivant que $p = \frac{1}{2}$ ou $p \neq \frac{1}{2}$, et pour cela, on va utiliser des exemples connus de facteurs.

Soit $X = [0 , 1[$ dont les points seront représentés par leurs développements binaires normalisés ; soit μ la mesure positive définie par $\mu(X) = 1$, $\mu([0 , \frac{1}{2}[) = p$

$$\mu([\frac{k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}[) = p.\mu([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[) \quad .$$

Soit Δ l'ensemble des points de X dont le développement ne contient qu'un nombre fini de 1 ; avec l'addition modulo 2 indice par indice, Δ devient un groupe de permutations de X, engendré par les éléments γ_n correspondant à $\frac{1}{2^n}$. Δ laisse μ quasi-invariante.

Soit $\mathcal{H} = L^2(\Delta) \otimes L^2(X, \mu)$ dont les éléments seront notés $F(\gamma, x)$; soit $L_{a_1,\dots,a_n}$ l'opérateur de multiplication par la fonction caractéristique du sous-ensemble de X défini par $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$; soit enfin U_a $(a \in \Delta)$ l'opérateur unitaire défini par

$$(U_a F)(\gamma, x) = (\frac{d\mu_a}{d\mu}(x))^{1/2}.F(\gamma + a, xa) \quad .$$

Ces opérateurs engendrent un facteur de type II ou III suivant que $p = \frac{1}{2}$ ou $p \neq \frac{1}{2}$. ([1] et [9]).

En associant $L_{a_1,\dots,a_n}$ à $\varphi(V(a_1, \dots, a_n)V(a_1, \dots, a_n)^*)_F$, et U_{γ_n} à

$$\sum_{a_1,\dots,a_{n-1}} \varphi(V(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)V(a_1, \dots, a_{n-1}, 1)^* + V(a_1, \dots, a_{n-1}, 1)V(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)^*)_F ,$$

on définit un isomorphisme θ de $\varphi(\mathcal{M})_F$ sur la C^*-algèbre N engendrée par les $L_{a_1,\dots,a_n}$ et les U_a. x est totalisateur pour $\varphi(\mathcal{M})_F$ et l'élément de $\mathcal{H}$ défini par

$$F(\gamma, x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \gamma = \text{unité de } \Delta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

l'est pour N ; θ fait correspondre les formes linéaires positives associées à ces éléments totalisateurs, donc est spatial et se prolonge aux adhérences faibles.

<u>Démonstration du théorème 1, (ii)</u> (esquisse).

Il suffit de montrer que si $\mathfrak{A}$ est sans idéaux GCR, $\mathfrak{A}$ admet deux représentations irréductibles de même noyau non équivalentes, et on peut supposer que $\mathfrak{A}$ possède un élément unité. On applique le lemme avec des S_i choisis comme précédemment, soit e un prolongement à $\mathfrak{A}$ de la forme linéaire positive sur $\mathcal{M}$ définie par $e(I) = 1$.

$$e(V(a_1 , \dots , a_n).V(b_1 , \dots , b_n)^*) \equiv \delta^{d_1,\dots,d_n}_{a_1,\dots,a_n}.\delta^{d_1,\dots,d_n}_{b_1,\dots,b_n}$$

où (d_i) est une suite quelconque de 0 et de 1 . La forme e est élémentaire et définit une représentation irréductible φ de dimension ∞ telle que $\varphi(S_o) \neq 0$.

le noyau de φ ne dépend pas de (d_i) , et est égal à l'ensemble des $A \in \mathfrak{A}$ tels que $\|E(n).B.A.C.E(n)\| \to 0$ quels que soient B et C dans $\mathfrak{A}$.

Puis, si les représentations correspondant à deux suites (d_i) et (e_i) sont équivalentes, on a $d_i = e_i$ sauf pour un nombre fini d'indices.

Démonstration du théorème 2 (esquisse).

Il suffit de montrer que si $\mathfrak{A}$ est sans idéaux GCR , $\hat{\mathfrak{A}}$ n'est pas métriquement lisse, car si $\mathfrak{A}$ contient un plus grand idéal GCR , $\mathcal{K}$, $(\mathfrak{A}/\mathcal{K})^\wedge$ s'identifie avec sa structure borélienne à un sous-ensemble borélien de $\hat{\mathfrak{A}}$. De plus, on peut supposer que $\mathfrak{A}$ contient un élément unité. Avec les notations du théorème 1, (ii) , on montre que si $d_i = e_i$ sauf pour un nombre fini d'indices, les représentations correspondantes sont équivalentes ; si K est l'ensemble des classes d'équivalence des représentations définies par toutes les suites (d_i) , on a donc une correspondance biunivoque entre K et $Y/\mathcal{R}$, où Y désigne l'ensemble des suites (d_i) et $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence : $d_i = e_i$ sauf pour un nombre fini d'indices ; on montre enfin que cette correspondance est un isomorphisme borélien et que $Y/\mathcal{R}$ n'est pas métriquement lisse.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIXMIER (Jacques). - Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. - Paris, Gauthier-Villars, 1957 (Cahiers scientifiques, 25).

[2] DIXMIER (Jacques). - Sur les structures boréliennes du spectre d'une C^*-algèbre, Publ. math. Inst. H. Et. scient. Paris, n° 6, 1960, 11 p.

[3] DIXMIER (Jacques). - Sur les C^*-algèbres, Bull. Soc. math. France, t. 88, 1960, p. 95-112.

[4] FELL (J. M. G.). - C^*-algebras with smooth dual, Illinois J. of Math. t. 4, 1960, p. 221-230.

[5] GLIMM (J.). - A Stone-Weierstrass theorem for C^*-algebras, Annals of Math., Series 2, t. 72, 1960, p. 216-224.

[6] GLIMM (J.). - Type I : C^*-algebras (à paraître).

[7] KAPLANSKY (Irving). - The structure of certain operator algebras, Trans. Amer. math. Soc., t. 70, 1951, p. 219-255.

[8] MACKEY (George W.). - Borel structure in groups and their duals, Trans. Amer. math. Soc., t. 85, 1957, p. 134-165.

[9] PUKÁNSKY (L.). - Some examples of factors, Publicationes mathematicae, t. 4, 1956, p. 135-156.