

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

CLAUDE CHEVALLEY

Certains schémas de groupes semi-simples

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. n° 219, p. 219-234

[<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__219_0>](http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__219_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CERTAINS SCHEMAS DE GROUPES SEMI-SIMPLES

par Claude CHEVALLEY

1. Schémas de groupes.

Si C est une catégorie et $X \in \text{Ob } C$, une structure de groupe sur X consiste, par définition, en la donnée, pour tout $Y \in \text{Ob } C$, d'une structure de groupe sur l'ensemble $\text{Hom}_C(Y, X)$, ces structures de groupes satisfaisant à la condition suivante : si $\eta : Y \rightarrow Y'$ est un morphisme de C , l'application $\xi' \rightsquigarrow \xi' \eta$ de $\text{Hom}_C(Y', X)$ dans $\text{Hom}_C(Y, X)$ est un homomorphisme de groupes. Dans ce qui suit, nous ne nous intéresserons qu'au cas où C est la catégorie des schémas affines sur un anneau commutatif K ; aussi appellerons-nous schémas sur K les schémas affines sur K et schéma de groupes sur K une structure de groupe sur un schéma affine sur K .

Revenant pour un instant au cas d'une catégorie quelconque, C , supposons données des structures de groupes G et G' sur des objets X et X' de C . Un homomorphisme de G dans G' est, par définition, un morphisme $\varphi : X \rightarrow X'$ dans C tel que, pour tout $Y \in \text{Ob } C$, l'application $\xi \rightarrow \varphi \xi$ de $\text{Hom}(Y, X)$ dans $\text{Hom}(Y, X')$ soit un homomorphisme de groupes.

Soit $\mathcal{G}$ un schéma de groupes sur K , et soit P son algèbre affine. Le produit dans $\text{Hom}(\mathcal{G} \times \mathcal{G}, \mathcal{G})$ des deux projections pr_1 et pr_2 de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ est un morphisme $m : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ dont la connaissance détermine la structure de groupe de $\mathcal{G}$, car, pour tout schéma affine $\mathcal{G}$ sur K , la multiplication dans $\text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ est donnée par la formule $(\xi_1, \xi_2) \rightsquigarrow m \circ (\xi_1 \times \xi_2)$. Le morphisme m se traduit par un homomorphisme d'algèbres $\mu : P \rightarrow P \otimes P$.

L'élément neutre de $\text{Hom}(\text{Spec } K, \mathcal{G})$ est un morphisme $e : \text{Spec } K \rightarrow \mathcal{G}$ qui se traduit en un morphisme $\epsilon : P \rightarrow K$. L'anneau local du noyau de ϵ s'appelle l'anneau local de l'élément neutre de $\mathcal{G}$.

EXEMPLE. - Soit M un module libre de rang fini sur K . Désignons par E le module des endomorphismes de M , par E^* le dual de E , et par S l'algèbre symétrique de E^* . La composition des endomorphismes fournit une application linéaire $E \times E \rightarrow E$, d'où une application linéaire $E^* \rightarrow E^* \times E^*$ et un homomorphisme d'algèbres $\mu_S : S \rightarrow S \otimes S$. A toute base de M correspond canoniquement

une base de E , donc une base (ε_{ij}) de E^* , et l'élément $D = \det(\varepsilon_{ij}) \in S$ ne dépend pas du choix de la base de M ; de plus, on voit facilement que l'application canonique de S dans son anneau de fractions $P = S[D^{-1}]$ est injective, ce qui permet d'identifier S à une sous-algèbre de P , puisque μ_S se prolonge en un homomorphisme $\mu : P \rightarrow P \otimes P$. Enfin, on démontre que μ définit une structure de schéma de groupes sur K admettant P comme algèbre affine; on désigne ce schéma de groupes par $\mathcal{G}(M)$.

Soit maintenant Γ un groupe d'automorphismes de M . Les éléments de P définissent des fonctions à valeurs dans K sur le groupe des automorphismes de M ; ceux des éléments de P dont la fonction associée est nulle sur Γ forment un idéal $\mathfrak{I}$ de P , et on a $\mu(\mathfrak{I}) \subset \mathfrak{I} \otimes P + P \otimes \mathfrak{I}$; il en résulte que μ définit par passage aux quotients un homomorphisme $\bar{\mu}$ de $\bar{P} = P/\mathfrak{I}$ dans $\bar{P} \otimes \bar{P}$, et on voit tout de suite que cet homomorphisme définit un schéma de groupes $\mathcal{G}$ sur K admettant $\bar{P}$ comme algèbre affine; on dit que $\mathcal{G}$ est le schéma de groupes sur K associé à Γ . Il est clair que $\mathcal{G}$, en tant que schéma, est un sous-schéma de $\mathcal{G}(M)$ et que l'injection canonique $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}(M)$ est un homomorphisme de schémas de groupes; on exprime ces faits en disant que $\mathcal{G}$ est un sous-schéma de groupes de $\mathcal{G}(M)$.

Supposons maintenant que K soit un corps algébriquement clos. Soit $\mathcal{G}$ un schéma de groupes quelconque sur K , d'algèbre affine P . On montre alors que, pour que $\mathcal{G}$ soit associé à un groupe d'automorphismes d'un espace vectoriel V de dimension finie sur K , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

1° P est de type fini sur K ;

2° P ne contient aucun élément nilpotent différent de 0 (il suffit même que l'anneau local de l'élément neutre ne contienne aucun élément nilpotent différent de 0).

Revenons au cas où K est un anneau commutatif quelconque. Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ des schémas en groupes sur K et h un homomorphisme de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}'$. En tant que morphisme de schémas, h admet une image fermée $\mathfrak{H}$, qui est un sous-schéma de $\mathcal{G}'$. On voit facilement que $\mathfrak{H}$ peut être muni d'une structure de schéma de groupes, et d'une seule, telle que l'injection canonique $i : \mathfrak{H} \rightarrow \mathcal{G}'$ soit un homomorphisme; $\mathfrak{H}$ devient donc un sous-schéma de $\mathcal{G}'$, qu'on appelle l'image de l'homomorphisme h . Le morphisme h se met sous la forme $h = i \circ h_1$, où h_1 est un épimorphisme de schémas: $\mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{H}$; h_1 est un homomorphisme de schémas de groupes.

Soient maintenant K un anneau commutatif et L une algèbre sur K . Soit $\mathcal{G}$ un schéma de groupes sur K , et soit $\mathcal{G}_L$ le schéma sur L qui s'en déduit par extension des scalaires. La multiplication $m : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ définit un morphisme de schémas $m_L : \mathcal{G}_L \times \mathcal{G}_L \rightarrow \mathcal{G}_L$. On vérifie facilement que m_L définit sur $\mathcal{G}_L$ une structure de schéma en groupes sur L ; on dit que $\mathcal{G}_L$ est le schéma de groupes déduit de $\mathcal{G}$ par extension à L des scalaires. Soit $\mathcal{G}$ un schéma sur K ; l'application canonique $h \mapsto h_L$ de $\text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ dans $\text{Hom}(\mathcal{G}_L, \mathcal{G}_L)$ est un homomorphisme pour les structures de groupes de ces deux ensembles. Par ailleurs, si $\mathcal{G}$ est un schéma de groupes sur K , et si h est un homomorphisme de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$, h_L est un homomorphisme de schémas de groupes sur L . Si $\mathcal{H}$ est un sous-schéma de groupes de $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}_L$ s'identifie à un sous-schéma de groupes de $\mathcal{G}_L$.

Donnons-nous maintenant un sous-schéma en groupes $\mathcal{R}$ de $\mathcal{G}_L$. On peut alors associer à $\mathcal{R}$ un sous-schéma en groupes de $\mathcal{G}$ qui se définit comme suit : $\mathcal{G}_L$ est muni d'une structure de schéma (pas de schéma en groupes !) sur K , et il y a un morphisme canonique $p : \mathcal{G}_L \rightarrow \mathcal{G}$; on voit alors facilement que le sous-schéma de $\mathcal{G}$ image fermée de $\mathcal{R}$ par p est un sous-schéma en groupes de $\mathcal{G}$.

Dans la suite de cet exposé, nous appellerons simplement schémas, ou schémas en groupes, les schémas, ou schémas en groupes, sur $\mathbb{Z}$.

2. Le principal résultat.

Le problème dont nous nous occupons est le suivant : définir, pour chaque type de groupe semi-simple complexe Γ , un schéma en groupes $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{Z}$ tel que, pour tout corps algébriquement clos F , le schéma de groupes $\mathcal{G}^F$ sur F déduit de $\mathcal{G}$ par extension à F du corps de base soit associé au groupe semi-simple Γ^F sur F homologue de Γ (on sait que la classification des groupes semi-simples sur des corps algébriquement clos se fait au moyen d'invariants qui ne dépendent pas du corps, d'où la possibilité de comparer des groupes sur des corps différents). Le problème a été partiellement résolu par T. ONO ([3]) qui associe à tout groupe semi-simple complexe Γ qui est son propre groupe adjoint un schéma en groupes $\mathcal{G}$ tel que, pour tout corps algébriquement clos F , $\mathcal{G}^F$ soit associé à un groupe algébrique admettant Γ^F comme composante algébrique de l'élément neutre (les résultats de ONO ne sont pas exprimés dans le langage des schémas, mais équivalent à ce qu'on vient de dire). Nous montrons que le problème ci-dessus formulé admet une solution ; il resterait encore à caractériser cette solution par des conditions convenables imposées a priori.

Au lieu de partir, dans ce qui suit, des groupes semi-simples complexes, nous utilisons les groupes algébriques semi-simples sur $\mathbb{Q}$ dont les algèbres de Lie sont "antcompactes" (Cf. n° 3), ce qui revient au même, mais est plus commode pour ce que nous voulons faire.

3. Groupes linéaires semi-simples antcompactes sur $\mathbb{Q}$.

Nous supposerons donnée une algèbre semi-simple $\mathfrak{g}$ sur le corps $\mathbb{Q}$ qui possède la propriété suivante : il existe une algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telle que, pour tout $h \in \mathfrak{h}$, $\text{ad}_{\mathfrak{g}} h$ soit un endomorphisme diagonalisable de $\mathfrak{g}$; nous dirons alors que $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Cartan "décomposée" de $\mathfrak{g}$; nous appellerons antcompactes les algèbres de Lie semi-simples qui admettent des algèbres de Cartan décomposées. Les algèbres de Lie semi-simples antcompactes se classifient exactement de la même manière que les algèbres de Lie semi-simples complexes ; en fait, deux algèbres de Lie semi-simples antcompactes sur $\mathbb{Q}$ sont isomorphes si leurs "complexifications" sont isomorphes.

Nous supposerons choisie une algèbre de Cartan décomposée $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. Les notions de racine, ou de poids d'une représentation, se définissent comme pour les algèbres de Lie complexes. A chaque racine α on peut associer un élément x_α appartenant à α (i. e. on a $[\mathfrak{h}, x_\alpha] = \alpha(\mathfrak{h}) x_\alpha$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$) de telle manière que les conditions suivantes soient satisfaites :

1° pour toute racine α , si on désigne par h_α l'élément $[x_\alpha, x_{-\alpha}]$ de $\mathfrak{h}$, on a $\alpha(h_\alpha) = 2$;

2° si $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ sont des racines, on a

$$[x_\alpha, x_\beta] = \pm (p+1) x_{\alpha+\beta}$$

où p est le plus grand entier tel que $\beta - p\alpha$ soit une racine.

On dit alors que les x_α forment un système d'éléments radiciels normalisés ; nous supposerons choisis des éléments x_α satisfaisant à ces conditions.

L'algèbre $\mathfrak{g}$ peut se représenter comme somme directe de $\mathfrak{h}$ et de deux sous-algèbres nilpotentes $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{u}'$ telles que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{u}] \subset \mathfrak{u}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{u}'] \subset \mathfrak{u}'$. Nous supposerons choisies des sous-algèbres satisfaisant à ces conditions. On sait que chacun des espaces $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{u}'$ est engendré par ceux des x_α qu'il contient. De plus, il existe sur le dual de $\mathfrak{h}$ une structure d'espace vectoriel (totalement) ordonné telle que les conditions $\alpha > 0$, $x_\alpha \in \mathfrak{u}$ (sur une racine α) soient équivalentes.

Soit V l'espace d'une représentation linéaire de g , que nous désignerons par ρ_V ; posons

$$g_V = \rho_V(g), \quad u_V = \rho_V(u), \quad u'_V = \rho_V(u'), \quad h_V = \rho_V(h) \quad .$$

L'algèbre de Lie semi-simple g_V et les algèbres nilpotentes u_V et u'_V sont algébriques ([1], IV, § 2, n°2, corollaire à la proposition 9, et V, § 3, n°4, prop. 14); ce sont les algèbres de Lie de groupes algébriques irréductibles Γ_V , U_V , U'_V d'automorphismes de V . L'algèbre h_V est une algèbre de Cartan de g_V ; c'est l'algèbre de Lie d'un groupe de Cartan H_V de Γ_V .

L'algèbre g_V est anticomacte; l'application $\alpha_V \rightsquigarrow \alpha_V \circ \rho'_V$ (où ρ'_V est la restriction de ρ_V à h_V) est une injection de l'ensemble des racines de g_V dans l'ensemble des racines de g . Nous désignerons par $S(V)$ (resp. $S(+; V)$, $S(-; V)$) l'ensemble des racines (resp. des racines > 0 , des racines < 0) de g qui sont de la forme $\alpha_V \circ \rho'$. Tout élément de U_V (resp. U'_V) se met d'une manière, et d'une seule, sous la forme
$$\prod_{\alpha \in S(+; V)} \exp \zeta_\alpha \rho_V(x_\alpha) \quad (\text{resp.} \quad \prod_{\alpha \in S(-; V)} \exp \zeta_\alpha \rho_V(x_\alpha)),$$

où les ζ_α sont des nombres rationnels et où, comme dans les produits analogues que nous aurons l'occasion d'écrire, les facteurs sont arrangés par ordre de grandeur croissante des racines (Cf. [1], V, § 3, n°4, prop. 14).

Nous appellerons caractères de H_V les homomorphismes rationnels de ce groupe dans $GL(1; \mathbb{Q})$; ils forment un groupe, que nous noterons X_V ; X_V est un groupe commutatif libre de rang $\dim H_V$. Pour toute racine $\alpha \in S(V)$, il y a un caractère χ_α de H_V tel que l'on ait

$$t(\exp \zeta \rho(x_\alpha)) t^{-1} = \exp \zeta \chi_\alpha(t) \rho_V(x_\alpha)$$

pour tout $t \in H_V$ et tout $\zeta \in \mathbb{Q}$. Nous appellerons caractères radiciels les χ_α ; ils engendrent un sous-groupe d'indice fini de X_V , que nous noterons X'_V .

Nous noterons $P(\Gamma_V)$ (resp. $P(U_V)$, $P(U'_V)$, $P(H_V)$) les algèbres affines des groupes algébriques Γ_V (resp. U_V , U'_V , H_V). L'algèbre $P(U_V)$ (resp. $P(U'_V)$) est une algèbre de polynômes sur $\mathbb{Q}$ engendrée par des fonctions algébriquement indépendantes Z_α^V pour $\alpha \in S(+; V)$ (resp. $\alpha \in S(-; V)$) telles que l'on ait

$$u = \prod_{\alpha \in S(+; V)} \exp Z_\alpha^V(u) \rho_V(x_\alpha), \quad u' = \prod_{\alpha \in S(-; V)} \exp Z_\alpha^V(u') \rho_V(x_\alpha)$$

pour tout $u \in U_V$ et tout $u' \in U'_V$ ([1], V, § 3, n°4, prop. 14). Si $(\chi_1, \dots, \chi_r)$ est une base de X_V , les χ_i sont algébriquement indépendants sur K , et on a

$$P(H_V) = \mathbb{Q}[\chi_1, \dots, \chi_r, \chi_1^{-1}, \dots, \chi_r^{-1}] .$$

Pour toute racine $\alpha \in S(V)$, nous poserons

$$\sigma_{\alpha}^V = (\exp \rho_V(x_{\alpha}))(\exp \rho_V(x_{-\alpha}))^{-1} (\exp \rho_V(x_{\alpha})) \quad .$$

Le normalisateur N_V de H_V dans Γ_V est alors engendré par H_V et par les σ_{α}^V pour toutes les racines $\alpha \in S(V)$. Pour tout $s \in \Gamma_V$, il y a une classe R de N_V modulo H_V , et une seule, telle que s appartienne à l'ensemble $U_V' R U_V$; de plus, si $s \in U_V' H_V U_V$, il n'y a qu'un seul élément $(u', t, u) \in U_V' \times H_V \times U_V$ tel que $s = u'tu$ (ces résultats s'obtiennent en appliquant le théorème de Bruhat (Cf. par exemple [2], exposé 13, corollaire au théorème 3) au groupe complexe déduit de Γ_V par extension du corps de base).

4. Modules admissibles.

Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}$ et $\mathcal{G}$ un sous-schéma de groupes de $\mathcal{GL}(V)$. Soit M un réseau dans l'espace V (i. e. un groupe additif contenu dans V tel que l'application canonique $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \rightarrow V$ soit bijective); le module M définit alors un schéma de groupes $\mathcal{GL}(M)$ tel que $\mathcal{GL}(V)$ soit le schéma de groupes déduit de $\mathcal{GL}(M)$ par extension à $\mathbb{Q}$ des scalaires; d'où un morphisme de schémas $\mathcal{GL}(V) \rightarrow \mathcal{GL}(M)$. En composant cet homomorphisme avec l'homomorphisme d'injection $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{GL}(V)$, on obtient un morphisme $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{GL}(M)$ dont l'image est un sous-schéma de groupes $\mathcal{G}_M$ de $\mathcal{GL}(M)$: on dit que $\mathcal{G}_M$ est le schéma de groupes défini par $\mathcal{G}$ et par M . Si $\mathcal{G}$ est le schéma associé à un groupe algébrique irréductible Γ d'automorphismes de V , on dit que $\mathcal{G}_M$ est le schéma associé à Γ et à M . Puisque $\mathcal{G}_M$ est un sous-schéma de groupes de $\mathcal{GL}(M)$, son algèbre affine est toujours de type fini sur $\mathbb{Z}$; comme il y a un épimorphisme $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_M$, on voit que, si $\mathcal{G}$ est associé à un groupe algébrique d'automorphismes de V , l'algèbre affine de $\mathcal{G}_M$ est sans éléments nilpotents, et est même intègre, si Γ est irréductible. Par ailleurs, il est clair que l'algèbre affine de $\mathcal{G}_M$ est un $\mathbb{Z}$ -module sans torsion, donc plat. Ce module est même fidèlement plat comme il résulte de l'existence de l'homomorphisme fourni par l'élément neutre.

Soient Γ un groupe algébrique d'automorphismes de V et $B = (v_1, \dots, v_n)$ une base de V ; l'algèbre affine $P(\Gamma)$ est alors engendrée sur $\mathbb{Q}$ par les fonctions $f_{i,i}$, D^{-1} où les $f_{i,i}$ sont les fonctions définies par la formule

$$s \cdot v_i = \sum_{i'=1}^n f_{i,i'}(s) v_{i'}, \quad (s \in \Gamma)$$

(on les appelle les coefficients relatifs à la base B) et où $D = \det(f_{ii'})$.

Si B est la base d'un réseau M dans V , l'algèbre affine $P(\mathbb{G}_M)$ du schéma de groupes $\mathbb{G}_M$ associé à Γ s'identifie à la sous-algèbre de $P(\Gamma)$ engendrée sur $\mathbb{Z}$ par les éléments $f_{i,1}$, D^{-1} .

Soient V et V' des espaces vectoriels de dimensions finies, Γ et Γ' des groupes algébriques d'automorphismes de V et V' , φ une application linéaire injective de V dans V' . Supposons qu'il y ait un homomorphisme $\psi : \Gamma' \rightarrow \Gamma$ tel que $\varphi \circ \psi(s') = s' \circ \varphi$ pour tout $s' \in \Gamma'$ (i. e. que les opérations de Γ' transforment $\varphi(V)$ en lui-même). Soient M' un réseau de V' , M le réseau $\varphi^{-1}(M')$ de V , $\mathbb{G}_{M'}$ (resp. $\mathbb{G}_M$) le schéma de groupes associé à Γ' et M' (resp. à Γ et M). L'homomorphisme ψ définit un homomorphisme ψ' de l'algèbre affine de Γ dans celle de Γ' ; tenant compte de la description de $P(\mathbb{G}_M)$ donnée ci-dessus, on voit tout de suite que ψ' applique $P(\mathbb{G}_M)$ dans $(\mathbb{G}_{M'})$, donc définit un homomorphisme $\psi_M : \mathbb{G}_{M'} \rightarrow \mathbb{G}_M$, dont nous dirons qu'il est associé à φ .

Nous allons supposer à partir de maintenant que V est l'espace d'une représentation ρ de $\mathbb{G}$. Nous dirons qu'un réseau M de V est un $\mathbb{Z}$ -module admissible si les conditions suivantes sont satisfaites :

- 1° M est engendré par des vecteurs qui appartiennent à des poids de ρ (i. e. qui sont des vecteurs propres des opérations de $\rho(h)$);
- 2° Pour toute racine α et tout entier $k > 0$, $(k!)^{-1} (\rho(x_\alpha))^k$ applique M dans lui-même.

On peut montrer que tout espace de représentation de ρ contient un $\mathbb{Z}$ -module admissible. A tout $\mathbb{Z}$ -module admissible M il correspond un schéma en groupes que nous désignerons par $\mathbb{G}_M$ (le schéma en groupes associé à Γ_V et à M).

Si V est l'espace d'une représentation ρ de $\mathfrak{g}$, son dual V^* est l'espace de la représentation duale ρ^* . Soit M un $\mathbb{Z}$ -module admissible dans V ; son dual M^* s'identifie à un réseau de V^* , et il est clair que M^* est un $\mathbb{Z}$ -module admissible relativement à V^* . Soit par ailleurs V' l'espace d'une autre représentation ρ' de $\mathfrak{g}$; $V \otimes_{\mathbb{Q}} V'$ est alors l'espace du produit tensoriel des représentations ρ et ρ' ; on voit facilement que, si M et M' sont des $\mathbb{Z}$ -modules admissibles dans V et V' respectivement, $M \otimes_{\mathbb{Z}} M'$ est un $\mathbb{Z}$ -module admissible dans $V \otimes_{\mathbb{Q}} V'$.

Soient V et V' les espaces de représentations ρ et ρ' de $\mathfrak{g}$, et $\varphi : V \rightarrow V'$ un homomorphisme injectif de $\mathfrak{g}$ -modules. Soit M' un $\mathbb{Z}$ -module admissible dans V' ; alors $M = \varphi^{-1}(M')$ est un $\mathbb{Z}$ -module admissible dans V . En effet, pour tout poids ϖ' de la représentation ρ' , notons $V'_{\varpi'}$,

l'espace engendré par les vecteurs qui appartiennent à ϖ' et $M'_{\varpi'}$, le module $M' \cap V'_{\varpi'}$, d'où $M' = \sum_{\varpi'} M'_{\varpi'}$ (la somme étant directe). Or on voit facilement que $\varphi(V)$ est somme directe des $\varphi(V) \cap V'_{\varpi'}$; il en résulte que M est somme directe des $\varphi^{-1}(M'_{\varpi'})$; comme tout vecteur $\neq 0$ de $\varphi^{-1}(M'_{\varpi'})$ appartient à un poids de ρ , notre assertion résulte immédiatement de là.

On a en particulier un homomorphisme injectif φ_V de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_V$ de Γ_V dans $V \otimes V^*$, et cet homomorphisme est un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ -modules si on considère $\mathfrak{g}_V$ comme espace d'une représentation quotient de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ et $V \otimes V^*$ comme l'espace de la représentation produit tensoriel de ρ_V et de sa duale. On associe donc à tout $\mathbb{Z}$ -module admissible M dans V un $\mathbb{Z}$ -module admissible $\mathfrak{g}_M$ dans $\mathfrak{g}_V$, image réciproque de $M \circ_Z M^*$ par φ_V . Tenant compte de l'isomorphisme canonique de $V \otimes V^*$ sur $\text{Hom}(V, V)$, on voit que $\mathfrak{g}_M$ est l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}_V$ qui appliquent M dans lui-même; on a donc $[\mathfrak{g}_M, \mathfrak{g}_M] \subset \mathfrak{g}_M$.

Nous noterons $\mathcal{U}_M$, $\mathcal{H}_M$ et $\mathcal{U}'_M$ les schémas de groupes associés à $\mathcal{U}_V$, $\mathcal{H}_V$, $\mathcal{U}'_V$ et au réseau M ; ce sont des sous-schémas de groupes de $\mathcal{G}_M$, dont nous noterons les algèbres affines $P(\mathcal{U}_M)$, $P(\mathcal{H}_M)$, $P(\mathcal{U}'_M)$. Les projections du schéma affine $\mathcal{U}'_M \times \mathcal{H}_M \times \mathcal{U}_M$ sur ses trois facteurs donnent trois morphismes de ce schéma dans $\mathcal{G}_M$, d'où, par multiplication, un morphisme

$$\theta_M : \mathcal{U}'_M \times \mathcal{H}_M \times \mathcal{U}_M \rightarrow \mathcal{G}_M$$

qui va jouer un rôle fondamental dans ce qui suit.

PROPOSITION 1. - Le morphisme θ_M définit un isomorphisme de $\mathcal{U}'_M \times \mathcal{H}_M \times \mathcal{U}_M$ sur un sous-schéma affine ouvert Ω_M de $\mathcal{G}_M$; l'algèbre affine $P(\Omega_M)$ de Ω_M est de la forme $(P(\mathcal{G}_M))[d^{-1}]$, d étant un élément de $P(\mathcal{G}_M)$ qui prend la valeur 1 en l'élément neutre. Si on désigne par Z_α pour $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$) les éléments de $P(\mathcal{U}_V)$ (resp. $P(\mathcal{U}'_V)$) tels que l'on ait $u = \prod_{\alpha \in S(+;V)} \exp Z_\alpha(u) \rho_V(x_\alpha)$ (resp. $u' = \prod_{\alpha \in S(-;V)} \exp Z_\alpha(u') \rho_V(x_\alpha)$) pour tout $u \in \mathcal{U}_V$ (resp. $u' \in \mathcal{U}'_V$), $P(\mathcal{U}_M)$ (resp. $P(\mathcal{U}'_M)$) est l'algèbre de polynômes sur $\mathbb{Z}$ engendrée par les Z_α pour $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$); l'algèbre $P(\mathcal{H}_M)$ est engendrée sur $\mathbb{Z}$ par les caractères rationnels χ .

Pour faire la démonstration, on peut évidemment supposer que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_V$ (ρ_V étant l'application identique).

Puisque $\mathfrak{g}_M$ est admissible, on a $\mathfrak{g}_M = \sum_{\alpha} (\mathfrak{g}_M \cap \mathbb{Q} x_\alpha) + \mathfrak{g}_M \cap \mathfrak{h}$; puisque $\mathfrak{g}_M$ est

l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ qui appliquent M dans lui-même, on a $x_\alpha \in \mathfrak{g}_M$. Soit δ un entier > 0 tel que $\delta^{-1} x_\alpha \in \mathfrak{g}_M$; alors $\delta^{-1} x_{-\alpha} = \frac{1}{2}(\text{ad } x_{-\alpha})^2 (\delta^{-1} x_\alpha) \in \mathfrak{g}_M$, d'où, puisque $[\mathfrak{g}_M, \mathfrak{g}_M] \subset \mathfrak{g}_M$,

$$\delta^{-2} h_\alpha = [\delta^{-1} x_\alpha, \delta^{-1} x_{-\alpha}] \in \mathfrak{g}_M, \quad ,$$

$$2\delta^{-3} x_\alpha = [\delta^{-2} h_\alpha, \delta^{-1} x_\alpha] \in \mathfrak{g}_M, \quad ,$$

d'où $\delta^{-2} x_\alpha \in \mathfrak{g}_M$, et par suite $\delta^{-2k} x_\alpha \in \mathfrak{g}_M$ pour tout $k > 0$. Comme $\mathfrak{g}_M$ est un réseau, on a $\delta = 1$. Nous désignerons par $(h_1, \dots, h_j)$ une base de $\mathfrak{g}_M \cap \mathfrak{h}$. On notera que les $h_\alpha = [x_\alpha, x_{-\alpha}]$ appartiennent à $\mathfrak{g}_M \cap \mathfrak{h}$, et que la condition $h \in \mathfrak{g}_M \cap \mathfrak{h}$ entraîne $\alpha(h) \in \mathbb{Z}$ pour toute racine α .

Soit ν le nombre des racines > 0 . Nous introduirons une base $(Y_1, \dots, Y_N)$ de la puissance extérieure ν -ième de $\mathfrak{g}_M$ possédant les propriétés suivantes : chaque Y_k est produit extérieur de ν éléments pris parmi les h_j, x_α ; Y_1 (resp. Y_N) est produit extérieur des x_α pour $\alpha > 0$ (resp. pour $\alpha < 0$); pour chaque racine α et pour $1 \leq j \leq r$, il existe un $a(\alpha, j)$ tel que $Y_{a(\alpha, j)}$ soit le produit déduit de Y_1 si $\alpha > 0$, de Y_N si $\alpha < 0$, en y remplaçant le facteur x_α par h_j . Pour chaque k , nous désignerons par $\tau(k)$ la somme des racines α telles que $x_\alpha \wedge Y_k = 0$. Si $s \in \Gamma_V$, nous désignerons par $\text{Ad}_\nu s$ la puissance extérieure ν -ième de $\text{Ad } s$, et nous poserons

$$(\text{Ad}_\nu s) \cdot Y_k = \sum_{k'=1}^N g_{k',k}(s) Y_{k'}, \quad .$$

Les fonctions $g_{kk'}$ appartiennent à l'algèbre affine $P(\mathfrak{G}_M)$ de $\mathfrak{G}_M$, qui sera identifiée dans tout ce qui suit à un sous-anneau de $P(\Gamma_V)$. Si $s \in U_V$ (resp. $s \in U_V^!$), on a $g_{k',k}(s) = 0$ si $\tau(k') < \tau(k)$ (resp. $\tau(k') > \tau(k)$) ou si $\tau(k') = \tau(k)$, $k' \neq k$, et on a $g_{kk}(s) = 1$. Si $t \in H_V$, on a $g_{kk'}(t) = 0$ si $k \neq k'$, $g_{kk}(t) = \chi_{\tau(k)}(t)$ où $\chi_{\tau(k)}$ est le produit des caractères radiciels χ_α pour les racines α telles que $x_\alpha \wedge Y_k = 0$. Nous poserons $d = g_{11}$; on voit facilement que $g_{NN}(s) = d(s^{-1})$.

Si s est un élément du normalisateur de H_V , on a $(\text{Ad } s) \cdot x_\alpha \in \mathbb{Q} x_{\pi(\alpha)}$, π étant une permutation des racines produite par un élément du groupe de Weyl; si π permute entre elles les racines > 0 , i. e. si $d(s) \neq 0$, on a $s \in H_V$. Il résulte facilement de là, et de ce qui précède, que $U_V^! H_V U_V$ est l'ensemble des $s \in \Gamma_V$ tels que $d(s) \neq 0$.

Soit α une racine > 0 et soit $1 \leq j \leq r$; posons $h_\alpha = \sum_{j=1}^r c_{\alpha,j} h_j$. Il y a

des polynômes Q_1^+ , Q_2^+ (resp. Q_1^- , Q_2^-) à coefficients entiers en des lettres Z_β (resp. $Z_{-\beta}$) indexées par les racines $\beta > 0$ telles que $\beta < \alpha$ qui possèdent les propriétés suivantes : si

$$u = \prod_{\beta > 0} \exp \zeta_\beta x_\beta, \quad t \in H_V, \quad u' = \prod_{\beta < 0} \exp \zeta_\beta x_\beta$$

(les ζ_β étant rationnels), on a

$$\begin{cases} g_{a(\alpha, j), 1}(u'tu) = d(s)(-\zeta_{-\alpha} c_{\alpha, j} + Q_1^-(\dots, \zeta_{-\beta}, \dots)) \\ g_{1, a(\alpha, j)}(u'tu) = d(s)(-\alpha(h_j) \zeta_\alpha + Q_1^+(\dots, \zeta_\beta, \dots)) \\ g_{a(-\alpha, j), N}(u^{-1} t^{-1} u'^{-1}) = d(s)(c_{\alpha, j} \zeta_\alpha + Q_2^+(\dots, \zeta_\beta, \dots)) \\ g_{N, a(-\alpha, j)}(u^{-1} t^{-1} u'^{-1}) = d(s)(\alpha(h_j) \zeta_\alpha + Q_2^-(\dots, \zeta_\beta, \dots)) \end{cases} .$$

De plus, on voit tout de suite que ou bien les $c_{\alpha, j}$ ($1 \leq j \leq r$) sont premiers entre eux dans leur ensemble, ou bien les $\alpha(h_j)$ le sont. Ceci étant, il résulte facilement des formules précédentes que, u , t , u' étant comme ci-dessus, et $s = u'tu$, les ζ_β s'expriment comme polynômes à coefficients entiers en les $(d(s))^{-1} g_{kk'}(s)$. Si on suppose que $s \in U_V$ (resp. $s \in U_V'$), on voit d'abord que les fonctions Z_α définies dans l'énoncé de la proposition 1 appartiennent à $P(U_M)$ pour $\alpha > 0$, à $P(U_M')$ pour $\alpha < 0$. Or, les coefficients de la matrice qui représente l'élément $\exp \zeta x_\alpha$ (où α est une racine, $\zeta \in \mathbb{Q}$) par rapport à une base de M s'expriment comme polynômes à coefficients entiers en ζ ; on voit donc que $P(U_M)$ (resp. $P(U_M')$) est l'anneau engendré par les Z_α pour $\alpha > 0$ (resp. pour $\alpha < 0$). Les coefficients $\neq 0$ de la matrice qui représente un élément t de H_V par rapport à une base de M composée de vecteurs appartenant à des poids sont les valeurs en t de certains caractères rationnels χ_ω de H_V (si v appartient à un poids ω , $t.v = \chi_\omega(t)v$), et les χ_ω engendrent le groupe X_V ; la dernière assertion de la proposition 13 résulte de là.

Le morphisme θ_M définit un homomorphisme θ_M' de $P(\zeta_M)$ dans l'algèbre affine

$$P(U_M' \times \mathfrak{H}_M \times U_M) = P(U_M') \otimes_{\mathbb{Z}} P(\mathfrak{H}_M) \otimes_{\mathbb{Z}} P(U_M)$$

de $U_M' \times \mathfrak{H}_M \times U_M$. L'image de d par θ_M' est inversible dans $P(U_M' \times \mathfrak{H}_M \times U_M)$ en vertu de la formule

$$d(u'tu) = \chi_{\tau(1)}(t) \quad (u' \in U_V', \quad t \in H_V, \quad u \in U_V) \quad ;$$

θ_M' se prolonge donc en un homomorphisme, que nous désignerons encore par θ_M' , de

$(P(\mathfrak{G}_M))[d^{-1}]$ dans $P(\mathfrak{U}_M' \times \mathfrak{H}_M \times \mathfrak{U}_M)$. Il résulte de ce que nous avons dit que les fonctions $Z_\alpha \circ 1 \circ 1$ ($\alpha < 0$), $1 \circ 1 \circ Z_\alpha$ ($\alpha > 0$) de $P(\mathfrak{U}_M' \times \mathfrak{H}_M \times \mathfrak{U}_M)$ appartiennent à l'image de $(P(\mathfrak{G}_M))[d^{-1}]$. Par ailleurs, si $s = u'tu$, $u' \in \mathfrak{U}_V'$, $t \in \mathfrak{H}_V$, $u \in \mathfrak{U}_V$, on peut écrire $t = u'^{-1}su^{-1}$, de sorte que les coefficients de la matrice qui représente t par rapport à une base de M s'expriment comme polynômes à coefficients entiers en les $Z_\alpha(s)$ et en les coefficients de la matrice qui représente s ; il en résulte immédiatement que, pour toute fonction $f \in P(\mathfrak{H}_M)$, $1 \circ f \circ 1$ appartient à l'image de $(P(\mathfrak{G}_M))[d^{-1}]$, ce qui achève la démonstration de la proposition 1.

Nous poserons désormais

$$P(\mathfrak{Q}_V) = (P(\Gamma_V))[d^{-1}], \quad P(\mathfrak{Q}_M) = (P(\mathfrak{G}_M))[d^{-1}].$$

Si F désigne un corps, nous désignerons par $\mathfrak{G}_M^F$, $\mathfrak{U}_M^F$, $\mathfrak{U}_M'^F$, $\mathfrak{H}_M^F$ les schémas de groupes déduits de $\mathfrak{G}_M$, $\mathfrak{U}_M$, $\mathfrak{U}_M'$, $\mathfrak{H}_M$ par extension à F des scalaires. Leurs algèbres affines $P(\mathfrak{G}_M^F)$, $P(\mathfrak{U}_M^F)$, $P(\mathfrak{U}_M'^F)$, $P(\mathfrak{H}_M^F)$ se déduisent de $P(\mathfrak{G}_M)$, $P(\mathfrak{U}_M)$, $P(\mathfrak{U}_M')$, $P(\mathfrak{H}_M)$ par tensorisation avec F . Nous poserons $d^F = d \otimes 1_F$. Le morphisme θ_M définit un morphisme

$$\theta_M^F : \mathfrak{U}_M'^F \times \mathfrak{H}_M^F \times \mathfrak{U}_M^F \rightarrow \mathfrak{G}_M^F$$

qui induit un isomorphisme du schéma affine qui figure au premier membre sur un sous-schéma ouvert Ω_M^F de $\mathfrak{G}_M^F$; l'algèbre affine de Ω_M^F est l'anneau de fractions $(P(\mathfrak{G}_M^F))[(d^F)^{-1}]$.

PROPOSITION 2. - Soit F un corps algébriquement clos ; $\mathfrak{G}_M^F$ est alors le schéma de groupes défini par un groupe algébrique irréductible semi-simple Γ_M^F d'automorphismes de l'espace vectoriel $M^F = M \otimes_{\mathbb{Z}} F$ sur F ; $\mathfrak{U}_M^F$, $\mathfrak{U}_M'^F$, $\mathfrak{H}_M^F$ sont associés à des sous-groupes irréductibles U_M^F , $U_M'^F$, H_M^F de Γ_M^F ; H_M^F est un tore maximal de Γ_M^F et $H_M^F U_M^F$ en est un groupe de Borel.

Pour faire la démonstration, nous supposons de nouveau que $g = g_V$.

Il résulte tout de suite de la proposition 1 que $P(\mathfrak{U}_M'^F \times \mathfrak{H}_M^F \times \mathfrak{U}_M^F)$ est intègre, donc que $(P(\mathfrak{G}_M^F))[d^F]^{-1}$ est intègre, et, en particulier, que l'anneau local de l'élément neutre de $\mathfrak{G}_M^F$ est intègre. Il est clair que $\mathfrak{G}_M^F$ est un sous-schéma en groupes de $\mathfrak{GL}(M^F)$; il résulte alors de ce que nous venons de dire que $\mathfrak{G}_M^F$ est le schéma en groupes défini par un groupe algébrique Γ_M^F d'automorphismes de M^F . Les algèbres $P(\mathfrak{U}_M'^F)$, $P(\mathfrak{H}_M^F)$, $P(\mathfrak{U}_M^F)$ étant intègres, $\mathfrak{U}_M'^F$, $\mathfrak{H}_M^F$ et $\mathfrak{U}_M^F$ sont les schémas en groupes définis par des sous-groupes algébriques irréductibles $U_M'^F$,

H_M^F , U_M^F de Γ_M^F .

On voit facilement qu'il existe une base de M telle que, pour tout $u \in U_V$, la matrice qui représente u par rapport à cette base soit une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont égaux à 1. On en déduit aussitôt que le groupe U_M^F est unipotent; on voit de même que $U_M'^F$ est unipotent et que H_M^F est un tore.

Les fonctions Z_α étant définies comme dans la proposition 7, nous poserons $\bar{Z}_\alpha = Z_\alpha \circ 1_F$; $P(U_M)$ (resp. $P(U_M')$) est donc engendré sur F par les fonctions Z_α pour $\alpha > 0$ (resp. pour $\alpha < 0$), et ces fonctions sont algébriquement indépendantes sur F . De même, pour tout $\chi \in X_V$, nous désignerons par $\bar{\chi}$ l'élément $\chi \otimes 1_F$ de $P(\mathfrak{H}_M^F)$. Pour toute racine α , on désigne par χ_α le caractère radical associé à α .

On a, si $t \in H_V$, $\zeta_\alpha \in \mathbb{Q}$,

$$t \left(\prod_{\alpha > 0} \exp \zeta_\alpha x_\alpha \right) t^{-1} = \prod_{\alpha > 0} \exp \zeta_\alpha \chi_\alpha(t) x_\alpha.$$

Soient t^* et u^* les morphismes du schéma affine $\mathfrak{H}_M \times U_M$ dans $\mathfrak{GL}(M)$ obtenus en composant les projections sur les deux facteurs avec les morphismes d'injection de $\mathfrak{H}_M$ et U_M dans $\mathfrak{GL}(M)$. Il y a un automorphisme de l'algèbre affine $P(\mathfrak{H}_M) \otimes_Z P(U_M)$ de $\mathfrak{H}_M \times U_M$ qui conserve les $\chi \otimes 1$ pour $\chi \in X_V$ et qui transforme $\bar{1} \otimes Z_\alpha$ en $\chi_\alpha \otimes Z_\alpha$; cet automorphisme définit un automorphisme λ de $\mathfrak{H}_M \times U_M$, et la formule écrite ci-dessus donne $t^* u^* (t^*)^{-1} = u^* \circ \lambda$. Les morphismes t^{*F} , u^{*F} de $\mathfrak{H}_M^F \times U_M^F$ dans $\mathfrak{GL}(M^F)$ déduits de t^* , u^* par extension des scalaires s'obtiennent en composant les projections sur les deux facteurs avec les morphismes d'injection de ces facteurs dans $\mathfrak{GL}(M^F)$; soit λ^F l'automorphisme de $\mathfrak{H}_M^F \times U_M^F$ déduit de λ par extension des scalaires. On a alors

$$t^{*F} u^{*F} (t^{*F})^{-1} = u^{*F} \circ \lambda^F.$$

On en déduit que les conditions $t \in H_M^F$, $u \in U_M^F$ entraînent $t u t^{-1} \in U_M^F$, $\bar{Z}_\alpha(t u t^{-1}) = \bar{\chi}_\alpha(t) \bar{Z}_\alpha(u)$ ($\alpha > 0$). On voit de même que les conditions $t \in H_M^F$, $u' \in U_M'^F$ entraînent $t u' t^{-1} \in U_M'^F$ et $\bar{Z}_\alpha(t u' t^{-1}) = \bar{\chi}_\alpha(t) \bar{Z}_\alpha(u')$ ($\alpha < 0$). On déduit de là que l'ensemble $H_M^F U_M^F$ est un sous-groupe résoluble algébrique irréductible de Γ_M^F .

Il résulte de l'existence de l'isomorphisme Θ_M^F de $U_M'^F \times \mathfrak{H}_M^F \times U_M^F$ sur un sous-schéma ouvert de $\mathfrak{G}_M^F$ que l'application $(u', t, u) \mapsto u' t u$ de $U_M'^F \times H_M^F \times U_M^F$ dans Γ_M^F est injective. Montrons que l'intersection de l'ensemble

$$U_M'^F H_M^F U_M^F$$

avec le normalisateur de $H_M^F U_M^F$ est $H_M^F U_M^F$. Il suffit de montrer que, si un élément u' de U_M^F appartient au normalisateur de $H_M^F U_M^F$, u' est l'élément neutre. Si $t \in H_M^F$, soit $tu't^{-1} = u'' \in U_M^F$; on a $u'^{-1} tu' = u'^{-1} u'' t \in H_M^F U_M^F$, d'où $u' = u''$; mais on a, pour toute racine $\alpha < 0$, $\bar{Z}_\alpha(u'') = \bar{\chi}_\alpha(t) \bar{Z}_\alpha(u')$, et il est clair que $\bar{\chi}_\alpha \neq 1$, de sorte qu'il y a des éléments $t \in H_M^F$ tels que $\bar{\chi}_\alpha(t) \neq 1$. Il vient donc $\bar{Z}_\alpha(u') = 0$ pour toute racine $\alpha < 0$, ce qui démontre notre assertion. La formule qu'on vient d'utiliser montre aussi qu'un élément $t \in H_M^F$ ne peut appartenir au centre de la composante irréductible Δ_M^F de l'élément neutre dans Γ_M^F que si les $\chi_\alpha(t)$ sont tous égaux à 1. Comme les caractères radiciels engendrent un sous-groupe d'indice fini du groupe des caractères, le centre de Δ_M^F est fini.

Comme $U_M^F H_M^F U_M^F$ est un voisinage de l'élément neutre dans Δ_M^F , le groupe $H_M^F U_M^F$, qui est résoluble et qui est la composante connexe de l'élément neutre dans son normalisateur dans Δ_M^F , est un groupe de Borel de Δ_M^F . Il est clair que H_M^F est un tore maximal de $H_M^F U_M^F$, donc de Δ_M^F . On a

$$\dim \Delta_M^F = \dim U_M^F + \dim H_M^F + \dim U_M^F = \dim H_M^F + 2 \dim U_M^F ;$$

il en résulte facilement que Δ_M^F est semi-simple.

Il reste à prouver que Γ_M^F est connexe. Nous savons déjà que l'ensemble des $s \in \Gamma_M^F$ tels que $d^F(s) \neq 0$ est contenu dans Δ_M^F ; il suffira donc de prouver que toute composante irréductible de Γ_M^F rencontre cet ensemble. Nous utiliserons pour cela les notations de la démonstration de la proposition 1. Soit $(y_1, \dots, y_n)$ la base de $\mathfrak{g}_M$ composée des x_α et des h_j ; posons, si $s \in \Gamma_V$,

$$(\text{Ad } s) \cdot y_i = \sum_{i=1}^n f_{i,i}(s) y_i, \quad ;$$

on sait que les fonctions f_{ii} appartiennent à $P(\mathfrak{G}_M)$. Posons $\bar{f}_{ii} = f_{ii} \otimes 1_F$, et désignons par $\mathfrak{g}_M^F$ l'espace vectoriel $\mathfrak{g}_M \otimes_{\mathbb{Z}} F$ sur F ; posons $\bar{y}_i = y_i \otimes 1_F$, $\bar{x} = x \otimes 1_F$, $\bar{h}_j = h_j \otimes 1_F$. Il est alors clair qu'il y a une représentation linéaire $\bar{\text{Ad}}$ de Γ_M^F , d'espace $\mathfrak{g}_M^F$, qui fait correspondre à tout $s \in \Gamma_M^F$ l'automorphisme défini par

$$(\bar{\text{Ad}} s) \cdot \bar{y}_i = \sum_{i=1}^n \bar{f}_{i,i}(s) y_i, \quad .$$

L'espace $(\wedge^v \mathfrak{g}_M) \otimes_{\mathbb{Z}} F$ s'identifie à la puissance extérieure v -ième de $\mathfrak{g}_M^F$; posons $\bar{Y}_k = Y_k \otimes 1_F$. Alors $\bar{Y}_1$ est produit extérieur des $\bar{x}_\alpha$ pour $\alpha > 0$, et

$d^F(s)$ est le coefficient de $\bar{Y}_1$ dans l'expression de $(\bar{\text{Ad}}_v s) \cdot Y_1$ comme combinaison linéaire de $\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_N$ ($\bar{\text{Ad}}_v s$ désignant la puissance extérieure v -ième de $\bar{\text{Ad}} s$). Il en résulte que, si un $s \in \Gamma_M^F$ est tel que $\bar{\text{Ad}} s$ conserve le sous-espace de $\mathfrak{g}_M^F$ engendré par les $\bar{x}_\alpha$ pour $\alpha > 0$, on a $d^F(s) \neq 0$.

On observera par ailleurs que l'on a $t \cdot \bar{x}_\alpha = \bar{x}_\alpha(t) \bar{x}_\alpha$, $t \cdot \bar{h}_j = \bar{h}_j$ pour tout $t \in H_M^F$.

Ceci étant, soit s_1 un élément quelconque de Γ_M^F . L'automorphisme intérieur produit par s_1 transforme $H_M^F U_M^F$ (resp. H_M^F) en un groupe de Borel (resp. en un tore maximal) de Δ_M^F . Comme tous les groupes de Borel de Δ_M^F sont conjugués les uns aux autres dans Δ_M^F et comme tous les tores maximaux de $H_M^F U_M^F$ sont conjugués entre eux dans $H_M^F U_M^F$, on voit qu'il y a un élément $s \in s_1 \Delta_M^F$ tel que $s(H_M^F U_M^F) s^{-1} = H_M^F U_M^F$, $s H_M^F s^{-1} = H_M^F$. La première égalité entraîne que

$$s U_M^F s^{-1} = U_M^F.$$

Les fonctions $\bar{x}_\alpha$, pour les diverses racines α , étant toutes distinctes les unes des autres et de 1, la relation $s H_M^F s^{-1} = H_M^F$ entraîne que $\bar{\text{Ad}} s$ transforme $F\bar{x}_\alpha$ en $F\bar{x}_{\pi(\alpha)}$, π étant une certaine permutation des racines. Tenant compte des relations $\bar{x}_{-\alpha} \bar{x}_\alpha = 1$, on voit que $\pi(-\alpha) = -\pi(\alpha)$ pour toute racine α . On a $s U_M^F s^{-1} = U_M^F$, et les opérations $\bar{\text{Ad}} u$, $u \in U_M^F$, conservent l'espace $\sum_{\alpha > 0} F\bar{x}_\alpha$; il en résulte qu'elles conservent aussi l'espace $\sum_{\alpha > 0} F\bar{x}_{\pi(\alpha)}$. Supposons pour un moment qu'il y ait une racine $\alpha > 0$ telle que $\pi(\alpha) = -\beta$ soit < 0 ; pour tout $\zeta \in F$, désignons par u_ζ l'élément de U_M^F tel que $\bar{Z}_\beta(u_\zeta) = \zeta$, $\bar{Z}_{\beta'}(u_\zeta) = 0$ pour toute racine $\beta' > 0$, $\beta' \neq \beta$. L'expression de $(\bar{\text{Ad}} u_\zeta) \bar{x}_{-\beta}$ comme combinaison linéaire de $\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n$ ne ferait donc pas intervenir l'élément de base $\bar{x}_\beta$. Or on a

$$(\bar{\text{Ad}} u_\zeta) \cdot \bar{x}_{-\beta} = \bar{x}_{-\beta} + \zeta \bar{h}_\beta - \zeta^2 \bar{x}_\beta$$

(où $\bar{h}_\beta = h_\beta \otimes 1_F$, $h_\beta = [x_\beta, x_{-\beta}]$), d'où contradiction. On voit donc que s conserve l'espace $\sum_{\alpha > 0} F\bar{x}_\alpha$, d'où $d^F(s) \neq 0$, ce qui termine la démonstration.

COROLLAIRE 1. - L'idéal engendré par un nombre premier dans l'algèbre affine $P(\mathfrak{G}_M)$ est premier.

Cela résulte immédiatement de la proposition 2.

COROLLAIRE 2. - On a $P(\mathfrak{G}_M) = P(\Gamma_V) \cap P(\Omega_M)$.

Il est clair que le premier membre est contenu dans le second. Soit f une fonction de $P(\Gamma_V) \cap P(\Omega_M)$. L'ensemble des entiers k tels que $kf \in P(\mathfrak{G}_M)$ est un idéal $\neq \{0\}$ de $\mathbb{Z}$, dont nous choisirons un générateur k_0 . Puisque $f \in P(\Omega_M)$, il y a un $m > 0$ tel que $d^m f \in P(\mathfrak{G}_M)$, d'où $d^m(k_0 f) \in k_0 P(\mathfrak{G}_M)$. Si p est un nombre premier, aucun des éléments d , $k_0 f$ de $P(\mathfrak{G}_M)$ n'appartient à $pP(\mathfrak{G}_M)$, d'où $k_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$. On a donc $k_0 \equiv \pm 1$, ce qui démontre le résultat.

Pour toute représentation ρ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, appelons groupe des poids de ρ le groupe engendré par les poids de ρ .

COROLLAIRE 3. - Soient V et V' les espaces de représentations ρ et ρ' de $\mathfrak{g}$ qui admettent le même groupe des poids, c'est-à-dire tels que les groupes algébriques $\Gamma_V, \Gamma_{V'}$ soient isomorphes. Si M et M' sont des $\mathbb{Z}$ -modules admissibles de V et V' , les schémas de groupes $\mathfrak{G}_M$ et $\mathfrak{G}_{M'}$ sont isomorphes.

Considérant l'espace de représentation $V \times V'$, on se ramène tout de suite au cas suivant : $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_V$, ρ étant l'application identique ; il existe une application injective $\varphi : V' \rightarrow V$ qui est un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ -modules telle que $M' = \varphi^{-1}(M)$. Il résulte de l'hypothèse faite sur V et V' qu'il existe un isomorphisme $\varphi_\Gamma : \Gamma_{V'} \rightarrow \Gamma_V$, tel que $\varphi \circ s = \varphi_\Gamma(s) \circ \varphi$ pour tout $s \in \Gamma_{V'}$. Cet isomorphisme définit un isomorphisme $\varphi_\Gamma^!$ de $P(\Gamma_{V'})$ sur $P(\Gamma_V)$. Pour toute racine α , on a $\varphi_\Gamma(\exp \zeta_\rho(x_\alpha)) = \exp \zeta_{\rho'}(x_\alpha)$ ($\zeta \in \mathbb{Q}$). Par ailleurs, φ_Γ induit un isomorphisme de $H_{V'}$ sur H_V . Tout poids ω' de ρ' est aussi un poids de ρ : si v' est un vecteur de poids ω' dans V' , $\varphi(v')$ est un vecteur de poids ω' dans V . A ω' correspondent un caractère $\chi_{\omega'}^{V'}$ de $H_{V'}$, et un caractère $\chi_{\omega'}^V$ de H_V ; il est clair que $\chi_{\omega'}^{V'}(\varphi_\Gamma(t)) = \chi_{\omega'}^V(t)$ pour tout $t \in \Gamma_{V'}$. Il en résulte tout de suite qu'il y a un isomorphisme $\chi \rightsquigarrow \chi' : X_V \rightarrow X_{V'}$, tel que l'on ait $\chi'(\varphi_\Gamma(t)) = \chi(t)$ pour tout $t \in H_{V'}$. On déduit de là que, si $u = \prod_{\alpha > 0} \exp \zeta_\alpha \rho(x_\alpha)$, $t \in H_V$, $u' = \prod_{\alpha < 0} \exp \zeta_\alpha \rho(x_\alpha)$, on a $\varphi_\Gamma(u'tu) = u'_1 t_1 u_1$ avec $u_1 = \prod_{\alpha > 0} \exp \zeta_\alpha \rho'(x_\alpha)$, $t_1 \in H_{V'}$, $\chi'(t_1) = \chi(t)$ ($\chi \in X_V$)

$$u'_1 = \prod_{\alpha < 0} \exp \zeta_\alpha \rho(x_\alpha) .$$

Ceci montre que l'isomorphisme du corps des fractions de $P(\Gamma_{V'})$ sur celui de $P(\Gamma_V)$ qui prolonge $\varphi_\Gamma^!$ applique $P(\Omega_{V'})$ sur $P(\Omega_V)$; $\varphi_\Gamma^!$ applique donc $P(\mathfrak{G}_{M'})$ sur $P(\mathfrak{G}_M)$ en vertu du corollaire 2, ce qui démontre le corollaire 3.

REMARQUE 1. - Soient M et M' des $\mathbb{Z}$ -modules admissibles d'un même espace de représentation V de ρ ; $\mathfrak{G}_M$ et $\mathfrak{G}_{M'}$ sont alors des sous-schémas de groupes

de $\mathfrak{G}(M)$ et $\mathfrak{G}(M')$ respectivement. Bien que $\mathfrak{G}_M$ et $\mathfrak{G}_{M'}$ soient isomorphes, il n'y a en général aucun isomorphisme de $\mathfrak{G}_M$ sur $\mathfrak{G}_{M'}$ qui se prolonge en isomorphisme de $\mathfrak{G}(M)$ sur $\mathfrak{G}(M')$.

REMARQUE 2. - Le schéma de groupes $\mathfrak{G}_M$ que nous associons à un $\mathbb{Z}$ -module admissible M d'un espace de représentation de $\mathfrak{g}$ ne dépend pas des choix arbitraires que nous avons faits : choix d'une algèbre de Cartan décomposée $\mathfrak{h}$, des algèbres $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{u}'$, de la structure d'ordre sur le dual de $\mathfrak{h}$, des éléments radiciels normalisés x_α .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHEVALLEY (Claude). - Théorie des groupes de Lie, Tomes 2 et 3. - Paris, Hermann, 1951-1955 (Act. scient. et ind., 1152 et 1226 ; Publ. Inst. math. Univ. Nancago, 1 et 4).
- [2] CHEVALLEY (Claude). - Classification des groupes de Lie algébriques, Séminaire Chevalley, t. 1, 1956-1958. - Paris, Secrétariat mathématique, 1958.
- [3] ONO (Takashi). - Sur les groupes de Chevalley, J. Math. Soc. Japan, t. 10, 1958, p. 307-313.