

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-LOUIS VERDIER

Sur les intégrales attachées aux formes automorphes

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. n° 216, p. 149-175

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__149_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES INTÉGRALES ATTACHÉES AUX FORMES AUTOMORPHES

par Jean-Louis VERDIER

[d'après Goro SHIMURA]

1. Généralités sur le groupe hyperbolique.

1.1. Les espaces F_n . - Dans tout cet exposé, on pose $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ groupe hyperbolique. On note K le sous-groupe compact maximal

$$(1.1.1) \quad K(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{g}_0$ l'algèbre de Lie de G , et $\mathfrak{g}$ l'algèbre complexifiée dont on utilisera la base suivante

$$(1.1.2) \quad W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{Z} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où les relations

$$(1.1.3) \quad [W, \bar{Z}] = -\bar{Z}, \quad [W, Z] = Z, \quad [Z, \bar{Z}] = 2W$$

$$k(\theta) = \exp(2i\theta W) \quad .$$

Soit

$$\chi_n : k(\theta) \rightsquigarrow \exp(ni\theta)$$

un caractère de K . Si V est un espace vectoriel complexe de dimension finie, nous noterons $F_n(V)$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différentiables $\varphi : G \rightarrow V$ vérifiant

$$(1.1.4) \quad \varphi(gk) = \varphi(g) \chi_n(k), \quad \forall k \in K \quad .$$

En interprétant les éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ comme des distributions (à valeurs complexes) de support l'origine, on voit que la propriété (1.1.4) est équivalente à la suivante

$$(1.1.5) \quad \varphi * W = -\frac{n}{2} \varphi \quad .$$

Les relations (1.1.3) nous montrent alors que

$$(1.1.6) \quad \begin{cases} \varphi * Z \in F_{n+2} \\ \varphi * \bar{Z} \in F_{n-2} \end{cases} .$$

G opère sur $F_n(V)$ par les translations à gauche, et dans la suite de l'exposé $F_n(V)$ sera toujours muni de cette structure de G -module. Les translations à gauche commutant aux convolutions à droite, les opérateurs

$$\begin{aligned} * Z &: \varphi \rightsquigarrow \varphi * Z \\ * \bar{Z} &: \varphi \rightsquigarrow \varphi * \bar{Z} \end{aligned}$$

sont des homomorphismes de G -modules.

L'espace homogène $X = G/K$ s'identifie canoniquement au demi-plan de Poincaré, l'application naturelle $G \rightarrow X$ se transformant, dans cette identification, en l'application

$$(1.1.7) \quad g \rightsquigarrow \frac{ai + b}{ci + d}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et l'opération naturelle de G sur X se transformant en

$$(1.1.8) \quad g : z \rightsquigarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

A toute $\varphi \in F_n(V)$, attachons dans le demi-plan de Poincaré la fonction $f(z)$ définie par

$$(1.1.9) \quad f\left(\frac{ai + b}{ci + d}\right) = (ci + d)^n \varphi(g), \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Cette formule a un sens à cause de (1.1.4). On obtient ainsi un isomorphisme de l'espace $F_n(V)$ sur l'espace des fonctions indéfiniment différentiables $X \rightarrow V$. Par transport de structure, G opère sur cet espace de la manière suivante : la transformée d'une fonction $f(z)$ par $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ n'est autre que

$$(-cz + a)^{-n} f\left(\frac{dz - b}{-cz + a}\right)$$

ou encore

$$(1.1.10) \quad g^{-1}.f(z) = (cz + d)^{-n} f(gz) \quad .$$

Les opérateurs $*Z$ et $*\bar{Z}$ se transforment de même par transfert de structure en les opérateurs

$$(1.1.11) \quad *Z = -\frac{n}{y} - 2i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} .$$

$$(1.1.12) \quad *\bar{Z} = 2i y^2 \frac{\partial}{\partial z} \quad .$$

La démonstration de tous ces résultats ne présente pas de difficultés (cf. [8], premiers exposés).

La formule (1.1.12) nous montre que les fonctions holomorphes sur X correspondent aux fonctions de $F_n(V)$ annulées par $*\bar{Z}$.

1.2. Représentations de dimension finie de G . - Nous nous bornerons à énoncer les résultats. (Pour les démonstrations, cf. [8], premiers exposés).

Les représentations irréductibles de G sont caractérisées par un entier $n \geq 0$, la représentation ρ_n est de dimension $n+1$. Elle est définie au point de vue infinitésimal par les formules suivantes : l'espace V_n de la représentation admet une base

$$e_n, e_{-n+2}, \dots, e_n$$

et on a les formules

$$(1.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_n(W) e_p = \frac{p}{2} e_p \\ \rho_n(Z) e_p = e_{p+2} \quad (= 0 \text{ si } p = n) \\ \rho_n(\bar{Z}) e_p = \frac{1}{4}(n+p)(n-p+2) e_{p-2} \quad (= 0 \text{ si } p = -n) . \end{array} \right.$$

Pour obtenir une construction globale, il suffit de prendre pour V_n l'espace des polynômes $u(t)$ à une variable à coefficients complexes, et de faire opérer G sur V_n par

$$(1.2.2) \quad \rho_n(g) u(t) \rightsquigarrow (cz + d)^n u\left(\frac{at + b}{ct + d}\right) ,$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

On remarque alors que $\rho_n(g)$ peut se définir de la même façon pour $g \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ et est alors fonction holomorphe de g .

Les e_p sont alors les vecteurs propres du compact K , et un calcul facile montre que

$$(1.2.3) \quad e_{-n+2k} = \frac{(-1)^k}{(n-k)!} (t-i)^{n-k} (t+i)^k \quad 0 \leq k \leq n \quad .$$

Nous aurons enfin besoin du résultat suivant.

(1.2.4) LEMME. - Il existe sur V_n une et une seule (à un facteur constant près) forme bilinéaire non dégénérée invariante par la représentation ρ_n . Elle est symétrique si n est paire, et alternée si n est impaire.

En effet, la représentation contragradiente de la représentation ρ_n est irréductible de dimension $n+1$, donc isomorphe à la représentation ρ_n , ce qui démontre l'existence d'une telle forme bilinéaire. L'unicité est claire vu l'irréductibilité de ρ_n .

Si $n=1$ la représentation ρ_n est la représentation évidente de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}^2$. La forme bilinéaire alternée $\det(u, v)$ est alors invariante par G . Dans le cas général ρ_n est visiblement la puissance symétrique n -ième de ρ_1 ; par suite la forme bilinéaire $\det(u, v)$ définit une forme bilinéaire dans V_n invariante par ρ_n alternée ou symétrique suivant la parité de n .

Remarquons enfin que V_n l'espace des polynômes de degré au plus n à coefficients complexes est le complexifié de $V_n^{\mathbb{R}}$ l'espace des polynômes de degré au plus n à coefficients réels, et que ρ_n conserve l'espace des polynômes réels.

2. Les fonctions automorphes à valeurs vectorielles.

2.1. Groupes fuchsien de première espèce. - Soit Γ un groupe fuchsien de première espèce i. e. un sous-groupe discret de G tel que la mesure invariante du quotient G/Γ soit de volume fini.

Considérons dans G le sous-groupe

$$U = \{u = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} \quad .$$

On appelle sous-groupe parabolique de Γ tout sous-groupe non trivial de la forme $\Gamma \cap g U g^{-1}$. Soit Γ_p un sous-groupe parabolique de Γ . Alors $g^{-1} \Gamma_p g \subset U$. On peut toujours choisir g , ce que nous ferons désormais, de façon que $g^{-1} \Gamma_p g$ soit le sous-groupe $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, q \in \mathbb{Z} \right\}$. On appelle pointe parabolique tout point de la frontière de X (i. e. les points réels ou le point à l'infini) stabilisé par un sous-groupe parabolique de Γ .

Comme Γ est de première espèce il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes paraboliques modulo les automorphismes intérieurs, et G/Γ est compact si et seulement s'il n'y a pas de sous-groupe parabolique.

Les groupes fuchsien de première espèce sont les groupes discrets tels que X/Γ soit une surface de Riemann compacte privée d'un nombre **fini** de points : les points paraboliques.

2.2. Les espaces $S_k(\Gamma, n)$. - Dans la suite du paragraphe, Γ est fixé une fois pour toutes. Soit ρ_n la représentation irréductible de dimension $n + 1$ de G et soit V_n l'espace de la représentation. Nous noterons $S_k(\Gamma, n)$ l'espace des fonctions $f : X \rightarrow V_n$ soumises aux trois conditions suivantes :

(2.2.1) (A_1) f est holomorphe

$$(A_2) \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad f(\gamma z) = (cz + d)^k \rho_n(\gamma) f(z) \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Nous exprimerons la troisième condition un peu plus loin.

Soit Γ_p un sous-groupe parabolique de Γ , et $s \in G$ tel que

$$s^{-1} \Gamma_p s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Nous poserons

$$J^k(g, z) = (cz + d)^k \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors la fonction

$$f_s(z) = J^{-k}(s, z) \rho_n(s)^{-1} f(sz)$$

où f vérifie les conditions (A_1) et (A_2) , possède la propriété suivante

$$(2.2.2) \quad q \in \mathbb{Z} \quad f_s(z + q) = \rho_n \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_s(z) \quad .$$

Mais nous avons vu que la représentation ρ_n se prolonge holomorphiquement à $SL(2, \mathbb{C})$, et par suite la fonction

$$\rho_n \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} f_s(z)$$

est holomorphe et périodique de période 1 d'après (2.2.2) ; elle admet par conséquent un développement en série de Fourier

$$(2.2.3) \quad \rho_n \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} f_s(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} a_r \exp 2\pi i r z \quad .$$

Il est d'autre part facile de vérifier que pour tous les s tels que

$$s^{-1} \Gamma_p s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{Z} \right\}$$

les a_r sont les mêmes.

Ceci dit nous pouvons exprimer la troisième condition.

$$(A_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout sous-groupe parabolique de } \Gamma \\ \text{les coefficients } a_r \text{ sont nuls pour } r \leq 0 . \end{array} \right.$$

Pour $n = 0$, c'est-à-dire pour la représentation triviale de G , les espaces $S_k(\Gamma, 0)$ ne sont autres que les "Spitzenformen" de poids k . Nous les noterons $S_k(\Gamma)$.

D'après le paragraphe 1 on peut faire correspondre à toute fonction $f \in S_K(\Gamma, n)$ une fonction $\varphi : G \rightarrow V_n$ vérifiant les trois conditions suivantes :

$$(A_1') \quad \varphi * \bar{Z} = 0$$

$$(A_2') \quad \varphi * W = -\frac{n}{2} \varphi, \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad \varphi(\gamma g) = \rho_n(\gamma) \varphi(g) \quad .$$

Pour exprimer la troisième condition, il faut d'abord considérer la fonction

$$(2.2.4) \quad \varphi_s(g) = \rho_n(sg)^{-1} \varphi(sg)$$

et remarquer que la fonction

$$x \in \mathbb{R} \quad x \rightsquigarrow \varphi_s \left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right)$$

est périodique de période 1, et que par suite elle admet un développement en série de Fourier

$$(2.2.5) \quad \varphi_s \left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} a_r(g) \exp(2\pi i r x) \quad ;$$

il est alors facile de voir que la condition (A_3) se transforme en la condition (A'_3)

$$(A'_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout sous-groupe parabolique de } \Gamma \text{ les} \\ \text{fonctions } a_r(g) \text{ sont nulles pour } r \leq 0. \end{array} \right.$$

Nous noterons encore cet espace de fonction $S_k(\Gamma, n)$.

2.3. La filtration canonique de $S_k(\Gamma, n)$. - Soit $\varphi \in S_k(\Gamma, n)$; on peut écrire

$$(2.3.1) \quad \varphi(g) = \rho_n(g) \sum \varphi_p(g) e_p$$

où les e_p sont les vecteurs de base de V_n explicités en (1.2.1).

A l'aide des formules (1.2.1) il est facile de voir que les propriétés (A'_1) , (A'_2) et (A'_3) entraînent pour les φ_p les propriétés suivantes

$$(2.3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_p(\gamma g) = \varphi_p(g) \quad \forall \gamma \in \Gamma \\ \varphi_p * W = -\frac{k-p}{2} \varphi_p \\ \varphi_p * \bar{Z} = 1/4(n-p)(n+p+2) \varphi_{p+2} \\ \text{Pas de terme de rang négatif ou nul dans les séries} \\ \text{de Fourier aux pointes paraboliques.} \end{array} \right.$$

De là et du fait que $\varphi_{n+2} = 0$ résulte une application canonique

$$P_0 : S_k(\Gamma, n) \rightarrow S_{k-n}(\Gamma)$$

de noyau noté $S_k^1(\Gamma, n)$. C'est l'application $\varphi \rightsquigarrow \varphi_n$.

Si $\varphi_n = 0$, alors (2.3.2) pour $p = n - 2$ conduit à une application canonique

$$P_1 : S_k^1(\Gamma, n) \rightarrow S_{k-n+2}(\Gamma),$$

de noyau $S_k^2(\Gamma, n)$. En continuant ainsi on définit une filtration canonique

$$S_k^0(\Gamma, n) = S_k(\Gamma, n) \supset S_k^1(\Gamma, n) \dots \supset S_k^n(\Gamma, n) \supset S_k^{n+1}(\Gamma, n) = 0$$

et à des injections canoniques

$$(2.3.3) \quad P_j : S_k^j(\Gamma, n) / S_k^{j+1}(\Gamma, n) \rightarrow S_{k-n+2j}(\Gamma)$$

dont nous nous servirons par la suite.

C'est l'injection qui, à $\varphi \in S_k^j(\Gamma, n)$ i. e. $\varphi_n = \varphi_{n-2} = \dots = \varphi_{n-2j+2} = 0$ fait correspondre φ_{n-2j} .

Nous aurons besoin par la suite du lemme suivant :

(2.3.4) LEMME. - L'injection

$$P_n : S_k^n(\Gamma, n) \rightarrow S_{k+n}(\Gamma)$$

est un isomorphisme.

Pour démontrer cela il suffit de voir que P_n est surjective ; or soit $\varphi \in S_{k+n}(\Gamma)$: il est immédiat de voir que la fonction

$$\Phi(g) = \rho_n(g) \varphi(g) e_{-n}$$

appartient à $S_k(\Gamma, n)$.

KUGA et SHIMURA dans [5] (voir aussi [8]) démontrent que les injections P_j sont surjectives pour $k - n + 2j \neq 0$ et nulles pour $k - n + 2j = 0$. Ils construisent de plus des injections canoniques de $S_{k-n+2j}(\Gamma)$ dans $S_k(\Gamma, n)$ et arrivent ainsi à déterminer entièrement les espaces $S_k(\Gamma, n)$. Nous n'aurons pas besoin de ces résultats dans la suite de l'exposé.

3. La classe de cohomologie attachée à une "Spitzenforme".

3.1. La suite exacte de cohomologie. - Nous noterons $\Omega^p(V_n)$ l'espace des fonctions $X \rightarrow V_n$ holomorphes, et $\Omega^1(V_n)$ l'espace des différentielles holomorphes à valeurs dans V_n . X étant un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, on a la suite exacte suivante :

$$(3.1.1) \quad 0 \rightarrow V_n \rightarrow \Omega^0(V_n) \xrightarrow{d} \Omega^1(V_n) \rightarrow 0$$

d étant la différentielle.

Γ étant un sous-groupe fuchsien de G , Γ opère

- sur V_n par $x \rightsquigarrow \rho_n(\gamma) x$.
- sur $\Omega^0(V_n)$ par $f(z) \rightsquigarrow \rho_n(\gamma) f(\gamma^{-1} z)$
- sur $\Omega^1(V_n)$ par $\omega \rightsquigarrow \rho_n(\gamma) \omega \circ \gamma^{-1}$.

La suite (3.1.1) est une suite exacte de Γ module, ce qui permet de considérer les groupes de cohomologie de Γ à valeurs dans ces Γ -modules, et en particulier d'écrire la suite exacte de cohomologie :

$$(3.1.2) \quad 0 \rightarrow V_n^\Gamma \rightarrow \Omega^0(V_n)^\Gamma \xrightarrow{d} \Omega^1(V_n)^\Gamma \xrightarrow{\delta} H^1(\Gamma, V_n) \rightarrow \dots$$

(La notation V^Γ désigne l'ensemble des points fixes du Γ -module V).

Or les fonctions appartenant à $\Omega^0(V_n)^\Gamma$ vérifient (pour $k=0$) les conditions (2.2.1). On a par suite une injection $S_0(\Gamma, n) \rightarrow \Omega^0(V_n)^\Gamma$. De même en mettant les formes différentielles $\omega \in \Omega^1(V_n)^\Gamma$ sous la forme $f(z) dz$, les fonctions $f(z)$ vérifient les conditions (2.2.1) pour $k=2$, et par suite on a une injection $S_2(\Gamma, n) \rightarrow \Omega^1(V_n)^\Gamma$.

On déduit de là le diagramme commutatif

$$(3.1.3) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & V_n^\Gamma & \rightarrow & \Omega^0(V_n)^\Gamma & \xrightarrow{d} & \Omega^1(V_n)^\Gamma \xrightarrow{\delta} H^1(\Gamma, V_n) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & S_0(\Gamma, n) & \xrightarrow{d} & S_2(\Gamma, n) & & \end{array}$$

en notant Q le quotient $S_2(\Gamma, n) / d S_0(\Gamma, n)$ on a donc

$$(3.1.4) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & V_n^\Gamma & \rightarrow & \Omega^0(V_n)^\Gamma & \xrightarrow{d} & \Omega^1(V_n)^\Gamma \xrightarrow{\delta} H^1(\Gamma, V_n) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & S_0(\Gamma, n) & \xrightarrow{d} & S_2(\Gamma, n) & \rightarrow & Q \rightarrow 0 \end{array}$$

En étudiant les développements aux pointes, on remarque que si une "Spitzenforme" de poids 2 est la dérivée d'une forme automorphe (non nécessairement régulière aux pointes) elle est alors la dérivée d'une "Spitzenforme". On en déduit que l'application

$$Q \rightarrow H^1(\Gamma, V_n)$$

est une injection.

Remarquons enfin que si G/Γ est compact il n'y a pas de pointe parabolique et par suite les flèches verticales du diagramme (3.1.3) sont des isomorphismes.

3.2. L'application $S_0(\Gamma, n) \xrightarrow{d} S_2(\Gamma, n)$. - Remarquons tout d'abord que l'opérateur $d = \frac{\partial}{\partial Z}$ est proportionnel à $*Z$; en effet, d'après (1.1.11)

$$*Z = -\frac{k}{y} - 2i\frac{\partial}{\partial Z}$$

et ici $k = 0$. Comme le but de ce numéro est d'étudier le conoyau de d , le résultat ne sera pas changé si on remplace d par $*Z$. D'autre part, d'après le lemme (2.3.4), $S_{n+2}(\Gamma)$ s'injecte dans $S_2(\Gamma, n)$. On a alors :

(3.2.1) THÉOREME. - L'espace $S_2(\Gamma, n)$ est somme directe du sous-espace $S_{n+2}(\Gamma)$ et de l'image par d de $S_0(\Gamma, n)$.

Pour démontrer ce théorème nous interpréterons les espaces $S_k(\Gamma, n)$ comme des espaces de fonctions sur le groupe G , et nous utiliserons l'opérateur $*Z$ à la place de d . Nous démontrerons tout d'abord un lemme.

(3.2.2) LEMME. - L'application $S_0^{j+1}(\Gamma, n)/S_0^{j+2}(\Gamma, n) \xrightarrow{*Z} S_2^j(\Gamma, n)/S_2^{j+1}(\Gamma, n)$ est un isomorphisme pour $j < n$.

Soit $\varphi \in S_0^{j+1}(\Gamma, n)$; alors d'après (2.3.1)

$$\varphi = \rho_n(g) \sum \varphi_p(g) e_p \quad .$$

Avec $\varphi_{n-2j-2} \neq 0$ et $\varphi_{n-2j} = \dots = \varphi_{-n} = 0$. Par suite, d'après (1.2.1)

$$(3.2.3) \quad \varphi * Z(g) = \rho_n(g) \sum (\varphi_p * Z(g) - \varphi_{p-2}(g)) e_p$$

le dernier terme non nul de la sommation étant $-\varphi_{n-2j-2} e_{n-2j}$, et par suite l'application

$$S_0^{j+1}(\Gamma, n)/S_0^{j+2}(\Gamma, n) \xrightarrow{*Z} S_2^j(\Gamma, n)/S_2^{j+1}(\Gamma, n)$$

est injective. Pour démontrer qu'elle est surjective, soit $\psi \in S_2^j(\Gamma, n)$

$$\psi(g) = \rho_n(g) \sum_p \psi_p(g) e_p \quad .$$

Avec

$$\psi_{n-2j} \neq 0 \quad \psi_{n-2j+2} = \dots = \psi_n = 0$$

les fonctions ψ_p vérifient les équations (2.3.2) pour $k=2$. Posons alors

$$\varphi_n = 0 \quad \varphi_p = +\lambda_p \psi_{p+2} \quad \lambda_p = -\frac{(n-p)(n+p+2)}{4(n-j)(j+1)}$$

les fonctions φ_p vérifient les équations (2.3.2) pour $k=0$, et par suite définissent une fonction $\varphi \in S_0^{j+1}(\Gamma, n)$

$$\varphi(g) = \rho_n(g) \sum_p \varphi_p(g) e_p \quad .$$

On voit alors (3.2.3) que

$$\varphi * Z - \psi = 0 \quad \text{mod } S_2^{j+1}(\Gamma, n)$$

C. Q. F. D.

A l'aide du lemme (3.2.2) et en remarquant que, pour $n > 0$, $S_0^0(\Gamma, n)/S_0^1(\Gamma, n) = \{0\}$ (car $S_0^0(\Gamma, n)/S_0^1(\Gamma, n)$ s'injecte d'après (2.3.3) dans $S_{-n}(\Gamma)$ qui est nul, car il n'y a pas de "Spitzenforme" de poids négatif) le théorème (3.2.1) se démontre immédiatement.

Reprenant le diagramme (3.1.4) on voit qu'on a une injection.

$$(3.2.4) \quad S_{n+2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Gamma, V_n) \quad .$$

Cette injection a été explicitée par EICHLER [2]. Nous nous contenterons de donner le résultat.

(3.2.5) THÉOREME (EICHLER). - Soit $f(z)$ une "Spitzenforme" de poids $n+2$ pour Γ et ω_f l'image de f par l'injection.

$$S_{n+2}(\Gamma) \rightarrow \Omega^1(V_n)^\Gamma .$$

On a alors

$$\omega_f = \frac{(t-z)^n}{n!} f(z) dz$$

(les éléments de V_n sont des polynômes en t de degré au plus n). Considérons la fonction

$$P_f(z) = \int_{z_0}^z \frac{(z-\zeta)^n}{n!} f(\zeta) d\zeta .$$

Pour $\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ on a alors

$$(cz+d)^n P_f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = P_f(z) + \alpha_\gamma(z)$$

où $\alpha_\gamma(z)$ est un polynôme de degré $\leq n$ en z ; l'application $\gamma \rightsquigarrow \alpha_\gamma$ de Γ dans V_n est un cocycle de Γ à valeur dans le Γ -module V_n dont la classe de cohomologie définit l'élément $\delta\omega_f \in H^1(\Gamma, V_n)$.

On peut se poser la question de savoir quelle est l'image de l'application

$$S_{n+2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Gamma, V_n) .$$

Une réponse partielle est fournie par le théorème ci-après. Si Γ' est un sous-groupe de Γ et V un Γ -module, nous noterons les Γ/Γ' l'application canonique

$$\text{res}_{\Gamma/\Gamma'} : H^1(\Gamma, V) \rightarrow H^1(\Gamma', V) .$$

On a alors le théorème suivant :

(3.2.6) THÉOREME. - Soit Γ un groupe fuchsien de première espèce et $f \in S_{n+2}(\Gamma)$; alors la restriction de la classe $\delta f \in H^1(\Gamma, V_n)$ à tout sous-groupe parabolique de Γ est nulle.

Reprenons le cocycle $\gamma \rightsquigarrow \alpha_\gamma$, du théorème (3.2.5) ; un calcul immédiat montre que

$$\alpha_\gamma(z) = \int_{z_0}^{z_0} \left(\frac{z - \zeta}{n!} \right)^n f(\zeta) d\zeta \quad ;$$

évidemment, lorsqu'on change z_0 la classe de cohomologie correspondante ne change pas. Soit p une pointe parabolique de Γ et Γ_p le sous-groupe parabolique correspondant. Nous pouvons prendre comme cocycle

$$\alpha'_\gamma(z) = \int_{\Gamma_p}^{\gamma p} \left(\frac{z - \zeta}{n!} \right)^n f(\zeta) d\zeta$$

(l'intégrale a un sens car f est une "Spitzenforme"). Prenant $\gamma \in \Gamma_p$ on voit que

$$\alpha'_\gamma(z) = 0 \quad .$$

C. Q. F. D.

Dans la suite de l'exposé nous noterons $\tilde{H}^1(\Gamma, V_n)$ l'ensemble des classes dont la restriction à tout sous-groupe parabolique de Γ est nulle.

3.3. Dimension de $\tilde{H}^1(\Gamma, V_n)$. - Le but de ce numéro est de donner le schéma de démonstration du théorème suivant :

(3.3.1) THÉOREME. - Pour tout groupe Γ fuchsien de première espèce, on a
 $2 \dim S_{n+2}(\Gamma) = \dim \tilde{H}^1(\Gamma, V_n)$.

Nous utiliserons le théorème suivant ([6], exposés 11, 12, 13).

(3.3.2) THÉOREME. - Soient X un espace topologique et Γ un groupe opérant proprement sur X , $\mathcal{A}$ un faisceau de groupe abélien de base X sur lequel Γ opère. Nous noterons $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$ l'application canonique de X sur son espace quotient. Nous noterons $\mathcal{A}^\Gamma$ le faisceau sur X/Γ défini de la manière suivante : Soit U un ouvert de X/Γ ; $\pi^{-1}(U)$ est alors saturé par Γ , et par suite Γ opère sur le module $\mathcal{A}(\pi^{-1}(U))$. Nous poserons

$$\mathcal{A}^\Gamma(U) = \mathcal{A}(\pi^{-1}(U))^\Gamma \quad (\text{points fixes}) \quad .$$

On fait sur le faisceau α les hypothèses suivantes:

1° Soit x un point de X , $\alpha(x)$ la fibre de α en x , $\Gamma(x)$ le ~~stabilisateur~~ de x .

Pour tout point $x \in X$, $H^i(\Gamma(x), \alpha(x)) = 0$ pour $i > 0$.

2° $H^j(X, \alpha) = 0$ pour $j \neq q$.

On a alors

$$(3.3.3) \quad H^i(X/\Gamma, \alpha^\Gamma) \approx H^{i-q}(\Gamma, H^q(X, \alpha)) \quad .$$

Pour démontrer le théorème (3.3.1) nous distinguerons deux cas.

1° X/Γ est compact.

Nous noterons $\widetilde{\Omega}^0(V_n)$ le faisceau sur X des germes de fonctions holomorphes à valeurs dans V_n , $\widetilde{\Omega}^p(V_n)$ le faisceau des germes de formes différentielles. On a sur X la suite exacte de faisceau

$$0 \rightarrow \widetilde{V}_n \rightarrow \widetilde{\Omega}^0(V_n) \rightarrow \widetilde{\Omega}^1(V_n) \rightarrow 0 \quad .$$

On en déduit immédiatement la suite exacte sur X/Γ .

$$0 \rightarrow \widetilde{V}_n^\Gamma \rightarrow \widetilde{\Omega}^0(V_n)^\Gamma \rightarrow \widetilde{\Omega}^1(V_n)^\Gamma \rightarrow 0 \quad .$$

Nous noterons Σ la surface de Riemann X/Γ .

On a la suite exacte de cohomologie

$$(3.3.4) \quad \begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(\Sigma, \widetilde{V}_n^\Gamma) \rightarrow H^0(\Sigma, \widetilde{\Omega}^0(V_n)^\Gamma) \rightarrow H^0(\Sigma, \widetilde{\Omega}^1(V_n)^\Gamma) \\ &\rightarrow H^1(\Sigma, \widetilde{V}_n^\Gamma) \rightarrow H^1(\Sigma, \widetilde{\Omega}^0(V_n)^\Gamma) \rightarrow H^1(\Sigma, \widetilde{\Omega}^1(V_n)^\Gamma) \\ &\rightarrow H^2(\Sigma, \widetilde{V}_n^\Gamma) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

D'après (3.3.2) $H^0(\Sigma, \widetilde{V}_n^\Gamma) \approx V_n^\Gamma$.

Or Γ étant un sous-groupe fuchsien de G , Γ est algébriquement dense dans G [1] et V_n étant une représentation irréductible de G , $V_n^\Gamma = 0$.

On démontre de plus que $H^2(\Sigma, \widetilde{V}_n^\Gamma) = H^2(\Gamma, V_n) = 0$. Car $H^2(\Sigma, \widetilde{V}_n^\Gamma)$ est isomorphe à $H_0(\Sigma, \widetilde{V}_n^\Gamma) \approx H_0(\Gamma, V_n)$ et on voit aisément que ce groupe est nul.

D'autre part puisqu'il n'y a pas d'éléments paraboliques dans Γ

$$\begin{aligned} H^0(\Sigma, \widetilde{\Omega}^0(V_n)^\Gamma) &\approx \Omega^0(V_n)^\Gamma \approx \mathfrak{S}_0(\Gamma, n) \\ H^0(\Sigma, \widetilde{\Omega}^1(V_n)^\Gamma) &\approx \Omega^1(V_n)^\Gamma \approx \mathfrak{S}_2(\Gamma, n) \end{aligned} \quad .$$

De plus en examinant les développements en chaque point de Σ on remarque que $\widetilde{\Omega}^0(V_n)^\Gamma \approx \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\widetilde{\Omega}^1(V_n)^\Gamma, \Omega^1)$ $\mathcal{O}$ désignant le faisceau des anneaux locaux de Σ et Ω^1 le faisceau des différentielles (à valeurs scalaires). Par suite, en vertu du théorème de dualité de SERRE

$$\begin{aligned} H^1(\Sigma, \widetilde{\Omega}^0(V_n)^\Gamma) &\text{ est en dualité avec } H^0(\Sigma, \widetilde{\Omega}^1(V_n)^\Gamma) \\ H^1(\Sigma, \widetilde{\Omega}^1(V_n)^\Gamma) &\text{ est en dualité avec } H^0(\Sigma, \widetilde{\Omega}^0(V_n)^\Gamma) \end{aligned}$$

en calculant alors la caractéristique d'Euler-Poincaré de la suite (3.3.4) on obtient le résultat.

2° X/Γ est de volume fini non compact.

X/Γ est alors une surface de Riemann ouverte. Nous noterons Σ la surface de Riemann complétée

$$\Sigma = X/\Gamma \cup \Sigma_\infty$$

les points de Σ_∞ sont les points paraboliques de Σ . Nous définirons sur Σ cinq faisceaux dont nous allons décrire les sections. Nous allons tout d'abord décrire $\mathfrak{S}_n^0$ (resp $\mathfrak{K}_n^0$ resp $\widetilde{\mathfrak{S}}_n^0$) .

- Sur un ouvert U ne contenant pas de points paraboliques

$$\mathfrak{K}_n^0(U) \approx \widetilde{\mathfrak{S}}_n^0(U) \approx \mathfrak{S}_n^0(U) \approx \Omega^0(V_n)^\Gamma(U) \quad .$$

- Soit U un ouvert suffisamment petit entourant un point parabolique P de Σ . Soit p une pointe parabolique de X se projetant sur P . Nous pouvons supposer U suffisamment petit pour que l'image inverse de U soit composé d'un voisinage W de p et des transformés disjoints de W par Γ . Nous noterons Γ_p le stabilisateur de p .

$$\mathcal{S}_n^0(U) \text{ (resp } \mathcal{S}_n^0(U) \text{ resp } \mathcal{S}_n^0(U))$$

sera alors l'ensemble des fonctions holomorphes sur W à valeurs dans V_n invariantes par Γ_p et dont les séries de Fourier (2.2.3) ont leurs termes constants nuls (resp. quelconques, resp. stables par Γ_p) et leurs termes de rang négatif nuls. On définirait de même $\mathcal{S}_n^1$ et $\mathcal{K}_n^1$ en remplaçant les mots "fonctions holomorphes" par "formes différentielles holomorphes". Sur Σ on a la suite exacte de faisceaux

$$(3.3.5) \quad 0 \rightarrow \mathcal{V}_n \rightarrow \mathcal{S}_n^0 \xrightarrow{d} \mathcal{S}_n^1 \rightarrow 0$$

$\mathcal{V}_n$ étant le faisceau noyau de l'application différentielle.

Nous noterons $\hat{X}$ le demi plan complété par les pointes paraboliques. $\mathcal{V}_n$ est l'image d'un faisceau $\overline{\mathcal{V}}_n$ obtenu comme suit:

$$0 \rightarrow \overline{\mathcal{V}}_n \rightarrow \underline{\mathcal{V}}_n \rightarrow \underline{\mathcal{V}}_{n\infty} \rightarrow 0$$

$\underline{\mathcal{V}}_{n\infty}$ étant le faisceau constant $\underline{\mathcal{V}}_n$ restreint aux pointes paraboliques. On a par suite

$$(3.3.6) \quad 0 \rightarrow \mathcal{V}_n \rightarrow \prod_{\substack{\text{pointes} \\ \text{paraboliques}}} \mathcal{V}_n \rightarrow H^1(\hat{X}, \overline{\mathcal{V}}_n) \rightarrow 0.$$

Cette suite est une suite exacte de Γ -module. On voit aisément que le module

$$\prod_{\text{Pointes}} \mathcal{V}_n = \prod_{\substack{\text{classes de pointes} \\ \text{paraboliques}}} \left(\prod_{\gamma \in \Gamma_p} \mathcal{V}_n \right)$$

et que le module $\prod_{\gamma \in \Gamma_p} \mathcal{V}_n$ est le Γ_p -module $\mathcal{V}_n$ induit à Γ . On a par suite

$$H^1(\Gamma, \prod_{\text{pointes}} \mathcal{V}_n) = \prod_{\substack{\text{classes de} \\ \text{pointes}}} H^1(\Gamma_p, \mathcal{V}_n);$$

de la suite (3.3.6), il vient $(V_n^\Gamma = 0$ d'après ce qui a été dit plus haut)

$$(3.3.7) \quad 0 \rightarrow \prod_{p \in \Sigma_\infty} H^0(\Gamma_p, V_n) \rightarrow H^0(\Gamma, H^1(\hat{X}, \bar{V}_n)) \rightarrow H^1(\Gamma, V_n)$$

$$\xrightarrow{R} \prod_{p \in \Sigma_\infty} H^1(\Gamma_p, V_n) \rightarrow \dots$$

Or il est facile de voir que l'application R n'est autre que l'application de restriction (3.2.6) ; par suite on a la suite exacte.

$$0 \rightarrow \prod_{p \in \Sigma_\infty} H^0(\Gamma_p, V_n) \rightarrow H^0(\Gamma, H^1(\hat{X}, \bar{V}_n)) \rightarrow \tilde{H}^1(\Gamma, V_n) \rightarrow 0 \quad .$$

Appliquant alors le théorème (3.3.2) (ce qui est licite ici bien que les hypothèses ne soient pas toutes vérifiées) il vient, puisque $H^1(\hat{X}, \bar{V}_n) = 0$ pour $n \neq 1$

$$H^1(\Sigma, V_n) \approx H^0(\Gamma, H^1(\hat{X}, \bar{V}_n))$$

et par suite

$$(3.3.8) \quad 0 \rightarrow \prod_{p \in \Sigma_\infty} H^0(\Gamma_p, V_n) \rightarrow H^1(\Sigma, V_n) \rightarrow \tilde{H}^1(\Gamma, V_n) \rightarrow 0 \quad .$$

Revenons à la suite de faisceaux (3.3.5). En passant à la cohomologie, il vient

$$(3.3.9) \quad \begin{aligned} 0 &\rightarrow S_0(\Gamma, n) \rightarrow S_2(\Gamma, n) \rightarrow H^1(\Sigma, V_n) \rightarrow H^1(\Sigma, S_n^0) \\ &\rightarrow H^1(\Sigma, S_n^1) \rightarrow H^2(\Sigma, V_n) \quad . \end{aligned}$$

On démontre tout d'abord que $H^2(\Sigma, V_n) = 0$ (On peut le tirer de la suite (3.3.7)).

On remarque ensuite en étudiant les développements en chaque point que les faisceaux S_n^0 et K_n^1 , K_n^0 et S_n^1 sont en dualité au sens de SERRE. On a par suite :

$$\dim S_{n+2}(\Gamma) - \dim H^1(\Sigma, V_n) + \dim H_2(\Gamma, n) - \dim H_0(\Gamma, n) = 0$$

en notant $H_2(\Gamma, n)$, $H_0(\Gamma, n)$ les fonctions holomorphes à valeurs dans V_n invariantes par Γ dont les séries de Fourier peuvent avoir des termes constants (mais pas de termes de rang négatif). Or il y a pour ces fonctions un théorème analogue au théorème (3.2.1) ce qui donne

$$\dim H_2(\Gamma, n) - \dim H_0(\Gamma, n) = \dim H_{n+2}(\Gamma) \quad ;$$

d'autre part, de la suite (3.3.8), il vient, en appelant h le nombre de points paraboliques de Σ et en remarquant que $\dim H^0(\Gamma_p, V_n) = 1$,

$$\dim H^1(\Sigma, V_n) = \dim \tilde{H}^1(\Gamma, V_n) + h$$

et par suite

$$\dim S_{n+2}(\Gamma) + \dim H_{n+2}(\Gamma) - h = \dim \tilde{H}^1(\Gamma, V_n) \quad .$$

Or il est bien connu en théorie classique des fonctions automorphes par la théorie des séries d'Eisenstein que

$$\dim H_{n+2}(\Gamma) = \dim S_{n+2}(\Gamma) + h$$

C. Q. F. D.

Notons $\mathcal{E}_n$ le faisceau sur Σ : $\tilde{V}_n^\Gamma$, $\tilde{V}_n$ étant le faisceau simple de fibre V_n sur $\hat{X}$. On a alors la suite exacte

$$(3.3.10) \quad 0 \rightarrow \mathcal{E}_n \rightarrow \tilde{S}_0^n \rightarrow \tilde{S}_1^n \rightarrow 0 \quad .$$

Or si nous notons $V_n^{\Sigma_\infty}$ le faisceau sur Σ ayant pour support Σ_∞ et pour fibre en chaque point $P \in \Sigma_\infty$ V_n^P , nous avons la suite exacte

$$(3.3.11) \quad 0 \rightarrow V_n \rightarrow \mathcal{E}_n \rightarrow V_n^{\Sigma_\infty} \rightarrow 0 \quad ;$$

de là et de la suite exacte (3.3.8) il vient

$$(3.3.12) \quad \begin{aligned} H^1(\Sigma, \mathcal{E}_n) &\approx \tilde{H}^1(\Gamma, V_n) \\ H^2(\Sigma, \mathcal{E}_n) &= H^0(\Sigma, \mathcal{E}_n) = 0 \quad . \end{aligned}$$

La suite (3.3.10) nous donne la suite exacte de cohomologie

$$(3.3.13) \quad 0 \rightarrow S_0(\Gamma, n) \rightarrow S_2(\Gamma, n) \xrightarrow{\delta} H^1(\Sigma, \mathcal{E}_n)$$

et on peut vérifier que modulo l'isomorphisme (3.3.12) l'homomorphisme δ n'est

autre que l'homomorphisme δ défini par EICHLER ((3.2.4) et (3.2.5)). La suite exacte (3.3.10) nous servira par la suite. Elle est d'ailleurs définie même si X/Γ est compact.

4. L'isomorphisme de Shimura.

4.1. Produit scalaire de Peterson. - Rappelons comment on définit le produit scalaire de Peterson pour deux fonctions $f, g \in S_{n+2}(\Gamma)$

$$(f, g) = \int_{\mathfrak{F}} f(z) \overline{g(z)} y^{n+2} dv$$

où $\mathfrak{F}$ est un domaine fondamental de X pour Γ et dv la mesure invariante par G

$$dv = \frac{i}{2y^2} dz \wedge d\bar{z} = \frac{1}{y} dx \wedge dy \quad .$$

Muni de ce produit scalaire, $S_{n+2}(\Gamma)$ est un espace de Hilbert.

Nous noterons ω_f et ω_g les formes différentielles associées à f et g par l'injection

$$S_{n+2}(\Gamma) \rightarrow \Omega^1(V_n) \quad .$$

Nous noterons d'autre part,

$$(x, y) \rightsquigarrow \langle x, y \rangle \quad x \in V_n \quad y \in V_n$$

le produit scalaire dans V_n invariant par la représentation ρ_n (1.2.4) et J l'involution qui fait passer d'un polynôme au polynôme conjugué (passage à l'imaginaire conjuguée sur les coefficients).

(4.1.1) LEMME. - La forme différentielle $\langle \omega_f, J\omega_g \rangle$ est proportionnelle à la forme différentielle $f(z) \overline{g(z)} y^{n+2} dv$. En effet d'après (3.2.5)

$$(4.1.2) \quad \begin{cases} \omega_f = f(z) \frac{(t-z)^n}{n!} dz \\ \omega_g = g(z) \frac{(t-z)^n}{n!} dz \end{cases} \quad .$$

Par suite

$$\langle \omega_f, J\omega_g \rangle = \frac{1}{n!} \int f(z) g(\bar{z}) \langle (t-z)^n, (t-\bar{z})^n \rangle dz \wedge d\bar{z} \quad .$$

Mais, d'après le lemme (1.2.4), la forme bilinéaire invariante sur V_n s'obtient en prenant la puissance symétrique de la forme bilinéaire invariante sur V_1 et par suite

$$\langle (t-z)^n, (t-\bar{z})^n \rangle = \det(t-z, t-\bar{z})^n$$

en notant $\det(u, v)$ une forme bilinéaire alternée sur V_1 . On a donc :

$$\langle (t-z)^n, (t-\bar{z})^n \rangle = (2iy)^n$$

C. Q. F. D.

(4.1.3) LEMME. - La forme différentielle $\langle \operatorname{Re} \omega_f, \operatorname{Re} \omega_g \rangle$ est proportionnelle à la forme différentielle $\operatorname{Im}(f(z) g(\bar{z}) y^{n+2} dv)$ lorsque n est pair.

En effet nous avons :

$$\begin{aligned} 4 \langle \operatorname{Re} \omega_f, \operatorname{Re} \omega_g \rangle &= \langle \omega_f + J\omega_f, \omega_g + J\omega_g \rangle \\ &= \langle \omega_f, \omega_g \rangle + \langle J\omega_f, J\omega_g \rangle + \langle \omega_f, J\omega_g \rangle + \langle J\omega_f, \omega_g \rangle \quad ; \end{aligned}$$

ω_f et ω_g étant de la forme donnée en (4.1.2), on voit que

$$\langle \omega_f, \omega_g \rangle = 0$$

$$\langle J\omega_f, J\omega_g \rangle = 0$$

de plus n étant pair, le produit scalaire dans V_n est symétrique, et par suite

$$4 \langle \operatorname{Re} \omega_f, \operatorname{Re} \omega_g \rangle = \langle \omega_f, J\omega_g \rangle - \langle \omega_g, J\omega_f \rangle$$

le lemme (4. 1.1) nous permet alors de conclure.

Nous noterons $\Lambda(f, g)$ la partie imaginaire du produit scalaire de Peterson nous avons alors pour n pair

$$\Lambda(f, g) = C_n \int_{\mathfrak{F}} \langle \operatorname{Re} \omega_f, \operatorname{Re} \omega_g \rangle$$

C_n étant une constante qui ne dépend que du choix de la forme bilinéaire invariante sur V_n .

4.2. Le cup-produit. - Dans tout ce numéro, n est pair. Reprenons le faisceau $\mathcal{E}_n$ introduit en (3.3.10); à l'aide de l'involution J sur V_n , on peut définir $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$ le faisceau des parties réelles. De plus, à l'aide de la forme bilinéaire invariante (que l'on peut prendre réelle sur les parties réelles), on peut définir un accouplement

$$\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{E}_n^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{R} \quad \text{faisceau simple}$$

et par suite on peut définir un cup-produit

$$(4.2.1) \quad H^1(\Sigma, \mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}) \otimes H^1(\Sigma, \mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}) \rightarrow H^2(\Sigma, \mathcal{R}) \quad ;$$

or Σ étant une surface de Riemann compacte, $H^2(\Sigma, \mathcal{R})$ est de dimension 1 et le cup-produit définit donc une forme bilinéaire sur $H^1(\Sigma, \mathcal{E}_n^{\mathbb{R}})$ lorsqu'on a choisi une base de $H^2(\Sigma, \mathcal{R})$.

Nous allons définir trois faisceaux $\mathcal{C}^0(\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}})$, $\mathcal{C}^1(\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}})$, $\mathcal{C}^2(\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}})$. En première approximation, ce sont les germes de fonctions indéfiniment différentielles (resp. les formes différentielles) "à valeurs" dans $\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}}$. De façon plus précise nous allons définir les sections de $\mathcal{C}^1(\mathcal{E}_n^{\mathbb{R}})$ sur un petit voisinage U d'un point parabolique P . On lui fait alors correspondre comme d'habitude une demi-plan voisinage du point à l'infini. On considère alors les formes différentielles de degré 1 φ indéfiniment différentiables invariantes par translations à valeurs dans $\mathcal{V}_n^{\mathbb{R}}$; elles s'écrivent (cf. (2.2.3))

$$\varphi(z) = \rho_n \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi(z)$$

où Φ est une forme différentielle périodique, $\{u_k\}$ étant une base de $\mathcal{V}_n^{\mathbb{R}}$

$$\Phi = \sum u_k \psi_k$$

où ψ_k est une forme différentielle à valeurs scalaire périodique. Elle définit par suite une forme différentielle indéfiniment différentiable dans U privé du point P . Ceci dit, les sections de $\mathcal{C}^1(\mathcal{E}_n^R)$ sur U seront les formes différentielles ϕ telles que les formes ψ_k se prolongent en des formes différentielles indéfiniment différentiables définies dans U . On procède de même pour $\mathcal{C}^0(\mathcal{E}_n^R)$ et $\mathcal{C}^2(\mathcal{E}_n^R)$. On a alors une suite exacte

$$(4.2.2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{E}_n^R \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{E}_n^R) \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathcal{E}_n^R) \rightarrow \mathcal{C}^2(\mathcal{E}_n^R) \rightarrow 0.$$

Les faisceaux $\mathcal{C}^0(\mathcal{E}_n^R)$ étant mous, on a ainsi une résolution de $\mathcal{E}_n^R$ et par suite une application

$$H^1(C^*(\mathcal{E}_n^R)) \rightarrow H^1(\Sigma, \mathcal{E}_n^R);$$

en particulier, si nous notons $Z^1(\mathcal{E}_n^R)$ les sections de $\mathcal{C}^1(\mathcal{E}_n^R)$ dont la différentielle s'annule on a une application

$$(4.2.3) \quad Z^1(\mathcal{E}_n^R) \xrightarrow{\delta'} H^1(\Sigma, \mathcal{E}_n^R) \rightarrow 0.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat essentiel de cet exposé.

(4.2.4) THÉOREME (SHIMURA [9]). - Soient f et $g \in S_{n+2}(\Gamma)$, $\delta\omega_f$, $\delta\omega_g$ les classes de cohomologie qui leur correspondent dans $H^1(\Sigma, \mathcal{E}_n)$ et $\text{Re } \delta\omega_f$, $\text{Re } \delta\omega_g$ les classes de cohomologie qui leur correspondent dans $H^1(\Sigma, \mathcal{E}_n^R)$ par l'application

$$H^1(\Sigma, \mathcal{E}_n) \xrightarrow{\text{Re}} H^1(\Sigma, \mathcal{E}_n^R).$$

Une base étant choisie dans $H^2(\Sigma, \mathbb{R})$ la forme bilinéaire $\text{Re } \delta\omega_f \sim \text{Re } \delta\omega_g$ est proportionnelle à la forme bilinéaire $\Lambda(f, g)$.

Remarquons d'abord que le diagramme

$$(4.2.5) \quad \begin{array}{ccc} S_{n+2}(\Gamma) & \rightarrow & \mathcal{S}_2(\Gamma, n) \xrightarrow{\delta} H^1(\Sigma, \mathcal{E}_n) \\ \text{Re} \downarrow & & \downarrow \text{Re} \\ & & Z^1(\mathcal{E}_n^R) \xrightarrow{\delta'} H^1(\Sigma, \mathcal{E}_n^R) \end{array}$$

est commutatif. Soient $f, g \in S_{n+2}(\Gamma)$; il leur correspond $\text{Re } \omega_f$, $\text{Re } \omega_g \in Z^1(\mathbb{C}_n^R)$, et le lemme (4.1.4) nous montre que

$$\Lambda(f, g) = C_n \int_{\Sigma} \langle \text{Re } \omega_f, \text{Re } \omega_g \rangle .$$

Or on sait d'après le théorème de de RHAM ([3], théorème (6.6.1), p. 257) que le cup-produit de deux classes de cohomologie est donné par le produit extérieur des formes différentielles qui représentent ces classes. Par suite

$$\langle \text{Re } \omega_f, \text{Re } \omega_g \rangle \rightsquigarrow \text{Re } \delta \omega_f \sim \text{Re } \delta \omega_g$$

dans l'application

$$\Omega^2(\mathbb{R}) \rightarrow H^2(\Sigma, \mathbb{R}) ,$$

$\Omega^2(\mathbb{R})$ étant l'espace des formes différentielles de degré 2 .

De plus, toujours d'après de RHAM, il y a un isomorphisme canonique de $H^2(\Sigma, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ qui consiste à associer à une forme différentielle α de degré 2 le nombre $\int_{\Sigma} \alpha$, ce qui démontre le théorème.

(4.2.6) THÉOREME (SHIMURA). - L'application

$$I_n : S_{n+2}(\Gamma) \rightarrow \hat{H}^1(\Gamma, V_n^R)$$

qui associe à $f \rightsquigarrow \text{Re } \delta \omega_f$ est un isomorphisme.

Remarquons que d'après (3.3.1) les dimensions des deux espaces sont égales. Démontrons que I_n est injectif. Soit $f \in S_{n+2}(\Gamma)$ telle que $I(f) = 0$. D'après (4.2.4), pour tout $g \in S_{n+2}(\Gamma)$

$$\Lambda(f, g) = \text{Re } \delta \omega_f \sim \text{Re } \delta \omega_g = 0$$

et par suite, Λ étant une forme non dégénérée, $f = 0$.

C. Q. F. D.

5. Les variétés abéliennes (dans tout ce paragraphe n est un entier pair).

5.1. Les groupes arithmétiques.

(5.1.1) DÉFINITION. - Un groupe fuchsien de première espèce Γ est un groupe arithmétique de niveau n s'il existe un réseau invariant par Γ dans la représentation V_n , réseau sur lequel la forme bilinéaire invariante est entière.

EXEMPLE. - $SL(2, \mathbb{Z})$ et tous les groupes de congruence sont des groupes arithmétiques pour tous les niveaux.

Le groupe des unités d'un ordre d'un corps de quaternions sur $\mathbb{Q}$ indéfini sur $\mathbb{R}$ est un groupe arithmétique pour tous les niveaux pairs.

Soit Γ un groupe arithmétique de niveau n et α le réseau que Γ laisse invariant dans V_n . On peut alors définir $\tilde{H}^1(\Gamma, \alpha)$ et on voit aisément que $\tilde{H}^1(\Gamma, \alpha)$ s'injecte dans $\tilde{H}^1(\Gamma, V_n)$ et que $\tilde{H}^1(\Gamma, \alpha)$ est un réseau de $\tilde{H}^1(\Gamma, V_n)$. Soit $D(\Gamma)$ l'image réciproque par I_n (4.2.5) de $\tilde{H}^1(\Gamma, \alpha)$ dans $S_{n+2}(\Gamma)$.

(5.1.2) THÉOREME (SHIMURA). - Lorsque Γ est un groupe arithmétique de niveau n le tore complexe $S_{n+2}(\Gamma)/D(\Gamma)$ est une variété abélienne.

Pour démontrer ce théorème, nous allons démontrer qu'il existe une constante λ telle que la forme $\lambda(f, g)$ donne une forme de Riemann sur $S_{n+2}(\Gamma)/D(\Gamma)$. On entend ici par forme de Riemann une forme hermitienne positive sur $S_{n+2}(\Gamma)$ dont la partie imaginaire est à valeurs entières sur $D(\Gamma) \times D(\Gamma)$ [10].

Or, d'après (4.2.4), $\lambda(f, g)$ est proportionnelle au cup-produit $I_n(f) \smile I_n(g)$. De plus, la forme bilinéaire invariante prenant des valeurs entières sur α , le cup-produit envoie

$$\tilde{H}^1(\Gamma, \alpha) \otimes \tilde{H}^1(\Gamma, \alpha) \rightarrow H^2(\Sigma, \mathbb{Z})$$

$H^2(\Sigma, \mathbb{Z})$ étant un réseau de $H^2(\Sigma, \mathbb{R})$. Par suite, il existe une constante λ telle que $\lambda \lambda(f, g)$ prenne des valeurs entières sur le réseau $D(\Gamma)$.

C. Q. F. D.

On voit que pour $n = 0$ la variété abélienne $S_2(\Gamma)/D(\Gamma)$ n'est autre que la variété jacobienne de la surface Σ .

5.2. Les opérateurs T_σ . - Γ étant un sous-groupe de Γ d'indice fini et M étant un Γ -module nous noterons

$$\begin{aligned} \text{res}_{\Gamma/\Gamma'} : H^i(\Gamma, M) &\rightarrow H^i(\Gamma', M) \\ \text{cores}_{\Gamma'/\Gamma} : H^i(\Gamma', M) &\rightarrow H^i(\Gamma, M) \end{aligned} .$$

Soit $\sigma \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ tel que $\sigma\Gamma\sigma^{-1}$ soit commensurable à Γ (i. e. $\sigma\Gamma\sigma^{-1} \cap \Gamma$ d'indice fini dans Γ et dans $\sigma\Gamma\sigma^{-1}$) : Nous prolongerons les représentations

ρ_n à $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ en les prolongeant trivialement sur le centre de $\text{GL}(2, \mathbb{R})$.

Reprenant les notations (3.1.1) et (3.1.2), le diagramme suivant est commutatif. Posons $\Gamma' = \sigma\Gamma\sigma^{-1} \cap \Gamma$

$$(5.2.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega^0(V_n)^\Gamma & \rightarrow & \Omega^1(V_n)^\Gamma & \rightarrow & H^1(\Gamma, V_n) \\ & & \downarrow \text{res}_{\Gamma/\Gamma'} & & \downarrow \text{res}_{\Gamma/\Gamma'} & & \downarrow \text{res}_{\Gamma/\Gamma'} \\ 0 & \rightarrow & \Omega^0(V_n)^{\Gamma'} & \rightarrow & \Omega^1(V_n)^{\Gamma'} & \rightarrow & H^1(\Gamma', V_n) \\ & & \downarrow \text{cores} & & \downarrow \text{cores} & & \downarrow \text{cores} \\ 0 & \rightarrow & \Omega^0(V_n)^{\sigma\Gamma\sigma^{-1}} & \rightarrow & \Omega^1(V_n)^{\sigma\Gamma\sigma^{-1}} & \rightarrow & H^1(\sigma\Gamma\sigma^{-1}, V_n) \\ & & \downarrow \text{Aut } \sigma & & \downarrow \text{Aut } \sigma & & \downarrow \text{Aut } \sigma \\ 0 & \rightarrow & \Omega^0(V_n)^\Gamma & \rightarrow & \Omega^1(V_n)^\Gamma & \rightarrow & H^1(\Gamma, V_n) \end{array}$$

l'homomorphisme $\text{Aut } \sigma$ étant l'homomorphisme évident.

On vérifie aisément que ces homomorphismes conservent les "Spitzenformen", et par suite en notant $T_\sigma = \text{Aut } \sigma \circ \text{cores}_{\Gamma'/\sigma\Gamma\sigma^{-1}} \circ \text{res}_{\Gamma/\Gamma'}$,

$$(5.2.2) \quad \begin{array}{ccccc} S_0(\Gamma, n) & \rightarrow & S_2(\Gamma, n) & \rightarrow & \tilde{H}^1(\Gamma, V_n) \\ \downarrow T_\sigma & & \downarrow T_\sigma & & \downarrow T_\sigma \\ S_0(\Gamma, n) & \rightarrow & S_2(\Gamma, n) & \rightarrow & \tilde{H}^1(\Gamma, V_n) \end{array} .$$

On en déduit le diagramme

$$(5.2.3) \quad \begin{array}{ccc} S_{n+2}(\Gamma) & \rightarrow & \tilde{H}^1(\Gamma, V_n^R) \\ T_\sigma \downarrow & & \downarrow T_\sigma \\ S_{n+2}(\Gamma) & \rightarrow & \tilde{H}^1(\Gamma, V_n^R) \end{array}$$

l'opérateur T_σ ainsi défini sur $S_{n+2}(\Gamma)$ n'est autre que l'opérateur de Hecke consistant à prendre une fonction f , à la rendre invariante par $\sigma\Gamma\sigma^{-1}$ et à la retransformer en une fonction invariante par Γ à l'aide de l'automorphisme σ .

(5.2.4) THÉORÈME. - Γ étant un groupe arithmétique de niveau n , soit α le réseau dans V_n conservé par Γ . Si $\rho_n(\sigma^{-1})$ conserve le réseau α , T_σ donne alors un endomorphisme de la variété abélienne $S_{n+2}(\Gamma)/D(\Gamma)$.

En effet, il est immédiat de voir alors que $\tilde{H}^1(\Gamma, \alpha)$ est envoyé par T_σ dans $\tilde{H}^1(\Gamma, \alpha)$. La vue du diagramme (5.2.3) achève la démonstration.

(5.2.5) COROLLAIRE. - Les valeurs propres de T_σ sont dans les hypothèses du théorème (5.2.4) des entiers algébriques de degré $2h(n)$ en notant $h(n)$ la dimension de $S_{n+2}(\Gamma)$ sur $\mathbb{C}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOREL (Armand). - Density properties for certain subgroups of semi-simple groups without compact components, *Annals of Math.*, Series 2, t. 72, 1960, p. 179-188.
- [2] EICHLER (M.). - Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale, *Math. Z.*, t. 67, 1957, p. 267-298.
- [3] GODEMENT (Roger). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1252; *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, 13).
- [4] HECKE (E.). - Grundlagen einer Theorie der Integralgruppen und der Integralperioden bei den Normalteilern der Modulgruppe, *Math. Annalen*, t. 116, 1938, p. 469-510.
- [5] KUGA (M.) and SHIMURA (G.). - On vector differential forms attached to automorphic forms, *J. Math. Soc. Japan*, t. 12, 1960, p. 258-270.
- [6] Séminaire CARTAN, t. 3, 1950/51 : Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux, 2e éd. - Paris, Secrétariat mathématique, 1955 (multigraphié).

- [7] Séminaire CARTAN, t. 6, 1953/54 : Variétés analytiques complexes et fonctions automorphes ; exposés n° 3, 4, 5. - Paris, Ecole Normale Supérieure (multigraphié).
 - [8] Séminaire GODEMENT, t. 1, 1960/61 : Fonctions automorphes, d'après les travaux de Shimura et de Eichler (à paraître).
 - [9] SHIMURA (Goro). - Sur les intégrales attachées aux formes automorphes, J. Math. Soc. Japan, t. 11, 1959, p. 291-311.
 - [10] WEIL (André). - Variétés kählériennes. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1267 ; Publ. Inst. math. Univ. Nancago, 6).
-