PAUL MALLIAVIN

Calcul symbolique dans quelques algèbres de Banach

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. nº 197, p. 405-413
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__405_0>

Séminaire Bourbaki
12e année, 1959/60, n° 197

Février 1960

CALCUL SYMBOLIQUE DANS QUELQUES ALGÈBRES DE BANACH

par Paul MALLIAVIN

1. Calcul symbolique individuel.

Soit A une algèbre de Banach commutative, semi-simple, avec élément unité. A peut être identifié à une algèbre de fonctions continues définies sur un espace compact X, la norme d'un élément $a \in A$, $\|a\|$, vérifiant $|a(x)| \leq \|a\|$ pour tout $x \in X$. On suppose que $a(x) \in A$ entraîne $\overline{a(x)} \in A$ et on note par A_r la sous-algèbre des fonctions réelles de A. Si $a \in A$ on note par $sp(a)$ l'image de X par l'application $x \rightarrow a(x)$. On dit qu'une fonction définie sur $sp(a)$ opère sur a si $f(a(x)) \in A$. On note par 0_a l'ensemble des fonctions qui opèrent sur a. 0_a est une algèbre de Banach pour la norme $\|f\| = \|f(a(x))\|$. On note par 0_a^* la plus petite sous-algèbre fermée de 0_a contenant x.

Un théorème classique de WIENER-LÉVY-GELFAND affirme que l'ensemble des fonctions holomorphes au voisinage de $sp(a)$ soit $H(sp(a))$ vérifie

$$H(sp(a)) \subset 0_a^* \quad .$$

D'autre part si $C(sp(a))$ dénote les fonctions continues sur $sp(a)$ on a

$$0_a \subset C(sp(a)) \quad .$$

Un énoncé de calcul symbolique individuel a pour but de préciser ces deux inclusions. On introduira des espaces intermédiaires entre H et C en utilisant des classes de fonctions différentiables. M_n étant une suite donnée $(0 < M_n \leq \infty)$, ρ un nombre > 0, Ω un ouvert de R, on note par $\mathcal{C}_\rho(M_n, \Omega)$ les fonctions f définies sur Ω telles que

$$\sup_{n,x} \frac{|f^{(n)}(x)|}{M_n \rho^n} < \infty \quad .$$

On note par $\mathcal{C}(M_n, \Omega) = \bigcup_\rho \mathcal{C}_\rho$. Enfin si F est une partie compacte, on note $\mathcal{C}(M_n, F) = \bigcup_{\Omega \supset F} \mathcal{C}(M_n, \Omega)$.

On dit qu'une classe est <u>non quasi analytique</u> si elle possède des partitions de l'unité arbitrairement fines. La quasi analycité de $\mathcal{C}(M_n, \Omega)$ ne dépend que des nombres M_n. On dit que la classe $\mathcal{C}(M_n, \Omega)$ est une algèbre inversible si $f, f_1 \in \mathcal{C}$ entraîne $ff_1 \in \mathcal{C}$ et si $f \in \mathcal{C}$, $f(x) \neq 0$ $x \in \bar{\Omega}$, entraîne $\frac{1}{f(x)} \in \mathcal{C}$. On peut montrer que $\mathcal{C}(M_n, \Omega)$ est une algèbre inversible si $\log \frac{M_n}{n!}$ est une suite croissante.

A un élément $a \in A_r$ nous allons associer la suite

$$M_n = \sup_{u>0} \frac{u^{n-2}}{\|e^{iua}\|} \tag{1.1}$$

D'autre part si μ est une mesure sur X, $e^{iua(x)}\, d\mu(x)$ définit une forme linéaire sur A ; on notera par $\|e^{iua}\|'_\mu$ la norme de cette forme linéaire et par

$$M'_n = \sup_{u>0} \|e^{iua}\|'_\mu\, u^{n+2} \tag{1.2}$$

On a alors l'énoncé

<u>Si</u> M_n <u>est non quasi analytique, alors</u>

$$\mathcal{C}_1(M_n, sp(a)) \subset 0^*_a \tag{1.3}$$

<u>Si</u> M'_n <u>est non quasi analytique,</u> $M'_0 \neq 0, \infty$ <u>et si</u> $\mathcal{C}(M'_n, \Omega)$ <u>est une algèbre inversible, alors</u> E <u>notant le support de l'image</u> dm <u>de</u> μ <u>par l'application</u> $x \to a(x)$, $\overset{\circ}{E}$ <u>est non vide et</u>

$$0_a \subset \mathcal{C}(M'_n, F) \quad \text{pour tout } F \subset \overset{\circ}{E} \tag{1.4}$$

La preuve résulte du calcul des transformées de Fourier des fonctions qui opèrent. Par exemple, pour (1.4), soit $f \in 0_a$; posons :

$$g(u) = \int_R f(\xi)\, e^{iu\xi}\, dm(\xi) = \int_X f(a(x))\, e^{iua(x)}\, d\mu(x) ,$$

alors

$$|g(u)| < \|f(a)\|\, \|e^{iua}\|'_\mu$$

d'où

$$fdm \in \mathcal{C}(M_n, R) .$$

Prenant en particulier $f = 1$, on en déduit que $dm(\xi) = \varphi(\xi)\, d\xi$ où $\varphi \in \mathcal{C}(M_n, R)$. Ceci entraîne $\varphi^{-1} \in \mathcal{C}(M_n, \Omega)$ pour tout Ω tel que $\bar{\Omega} \subset \overset{\circ}{E}$ d'où $f = (f\varphi)\, \varphi^{-1} \in \mathcal{C}(M_n, \Omega)$.

Les conditions de non quasi analyticité sur M_n peuvent être traduites en termes de croissance de la résolvante au voisinage du spectre.

Posons : $\gamma(\eta) = \sup\limits_{\xi} \|(\xi + i\eta - a)^{-1}\|$; alors si

$$\int_0^1 \log |\log \gamma(\eta)| \, d\eta < \infty \tag{1.5}$$

la classe M_n définie en (1.1) est non quasi analytique.

Ceci s'obtient en remarquant que posant $q(y)$ = borne convexe $\log \|e^{iua}\|$, $q(y)$ est majoré en fonction de γ par l'expression

$$q(y) \leq \inf_{\eta>0} [\eta y + \log \gamma(\eta)]$$

et que (1.5) implique la convergence de $\displaystyle\int_1^\infty q(t)\, t^{-2}\, dt$.

2. Exemples.

On a le résultat suivant dans la théorie spectrale (E. BISHOP [1]).

Soit D un opérateur borné, à spectre réel, dans un espace de Banach E dont la résolvante satisfait à (1.5). Alors pour tout recouvrement ouvert G_1, G_2, G_n de son spectre, on peut trouver des sous-espaces $E_1 \ldots E_n$, de E, invariants par D dont la réunion engendre E, et tels que la restriction D_k de D à E_k ait son spectre contenu dans $\overline{G_k}$.

En effet, d'après (1.3), il existe une classe non quasi analytique de fonctions opérant sur D. Choisissons dans cette classe une partition de l'unité φ_k subordonnée au recouvrement G_k. Posons $C_k = \varphi_k(D)$, $E_k = \overline{C_k E}$. Alors $DE_k = C_k DE \subset \overline{C_k E} = E_k$: les E_k sont invariants par D. Soit $\theta_k \in \mathcal{C}(M_n, R)$, $\theta_k(\xi) = 1$ si $\xi \in G_k$. Soit Ω l'intérieur de $\theta_k^{-1}(0)$, soit $\mu_0 \in \Omega$,

$$\psi_{\mu_0}(\xi) = \theta_k(\xi)(\xi - \mu_0)^{-1} \qquad ,$$

alors $\psi_{\mu_0} \in \mathcal{C}(M_n, R)$, par suite $\psi_{\mu_0}(D)$ existe. Pour tout x de la forme $x = \varphi_k(D)\, y$, on a :

$$(D - \mu_0)\, \psi_{\mu_0}(D)\, x = \theta_k(D)\, \varphi_k(D)\, y = \varphi_k(D)\, y = x \qquad .$$

Ainsi $\psi_{\mu_0}(D)$ est l'inverse de $D_k - \mu_0$ sur un sous-espace dense de E_k, par suite sur E_k entier.

Nous allons donner un autre exemple, utilisant (1.4). Soit G un groupe abelien compact **infini**, $A_r(G)$ dénotera l'algèbre des fonctions réelles définies sur G dont la série de Fourier est absolument convergente. On a l'énoncé [7].

(2.2). - <u>Soit Ω un ouvert borné de R, M''_n une classe non quasi analytique donnée, telle que</u> $\log \frac{M''_n}{n!}$ <u>soit une suite croissante, alors il existe</u> $a \in A_r(G)$ <u>tel que</u>

$$0_a \subset \mathcal{C}(M''_n , \Omega) \quad .$$

En particulier, l'algèbre 0_a possèdera une structure d'idéaux primaires analogue à celle d'une algèbre de fonctions indéfiniment différentiables.

Soit μ la mesure de Haar sur G, alors $\|e^{iua}\|'_\mu$ = sup des coefficients de Fourier de e^{iua}.

(2.3). - Posons $p(u) = \inf_n M''_n u^{-n-2}$; d'après (1.4), il suffit de construire des éléments g'_k du dual de G et α_k, $\alpha_k > 0$, $\sum \alpha_k < \infty$ tels que

$$a(g) = \sum \alpha_k \operatorname{Im} \langle g , g'_k \rangle$$

vérifie

(2.4) $$\|e^{iua}\|'_\mu < p(u) \quad .$$

On a le développement

$$\exp[iv \langle g , g'_k \rangle] = \sum_r J_{r,k}(v) \langle rg , g'_k \rangle$$

où les fonctions $J_{r,k}$ ne dépendent que de l'ordre de g'_k. Si on suppose les g'_k <u>linéairement indépendants</u>, on obtient en faisant le produit de ces identités

$$\|e^{iua}\|'_\mu = \sup_{\{r_k\}} \prod_{k=1}^{\infty} J_{r_k,k}(\alpha_k u) \quad .$$

On vérifie aisément que $|J_{r,k}(v)| \leq 1$, et qu'il existe deux constantes $\gamma > 0$, $\rho < 0$ telles que, quel que soient r et k

$$|J_{r,k}(v)| < e^{\rho} \qquad \text{si} \qquad \gamma < |v| < 2\gamma$$

d'où

$$\log \|e^{iua}\|'_\mu < \rho[N(\gamma u^{-1}) - N(2\gamma u^{-1})]$$

où $N(t)$ = nombre de $\alpha_k > t$, ce qui démontre (2.4) pour un choix convenable de $N(t)$. De même, on obtient

$$(2.5) \qquad \inf_{\|a\|=1} \|e^{iua}\|'_{\mu} < e^{\rho u} \quad .$$

S'il n'existe pas un système de g'_k linéairement indépendant sur G, on dit alors que les g'_k sont linéairement indépendants par rapport à la suite de constantes B_k si $\sum n_k g'_k = 0$, $|n_k| < B_k$ entraîne $n_k\, g_k = 0$. On montre alors aisément qu'étant donné un groupe abélien infini G' et une suite B_k, on peut toujours trouver un système d'éléments de G' indépendants par rapport à la suite B_k. En choisissant de façon convenable les B_k, on obtient la même évaluation de (2.4), ce qui prouve (2.2).

On peut d'autre part, traduire sur $A(G)$ l'énoncé (1.3). On obtient une réciproque incomplète de (2.2) :

Soit $a \in A_r(G)$ tel que $a(g) = \sum \alpha_k \operatorname{Re} \langle g , g'_k \rangle + \beta_k \operatorname{Im} \langle g , g'_k \rangle$. Supposons que $\sum |\alpha_k| \, |\log|\alpha_k|| + |\beta_k| \, |\log|\beta_k|| < \infty$, alors O^*_a contient une classe non quasi analytique.

On notera par O les fonctions qui opèrent sur la boule unité de l'algèbre,

$$\bigcap_{\|a\|\leq 1} O_a = O \quad .$$

Dans le cas particulier où $A = A(G)$, (2.2) permet de dire que O est l'intersection de toute une famille de classes non quasi analytiques, d'où on peut déduire que

$$O \subset \mathcal{C}((n \log n)^n , \Omega) \quad .$$

Mais ce résultat est insuffisant ; pour conclure que O ne contient que les fonctions analytiques, il faut utiliser un principe de majoration uniforme, obtenu par KATZNELSON, d'abord en utilisant le principe de BAIRE [5], puis dans un cadre plus général [6].

3. Le théorème de borne uniforme de Katznelson.

A_r notant toujours une algèbre de fonctions continues réelles sur un compact X, on supposera que A_r est régulière, c'est-à-dire possède des partitions arbitrairement fines de l'unité.

Soit $f \in O$, $x_0 \in X$, on dit que f est localement borné en x_0 s'il existe un voisinage $V(x_0)$ et deux nombres $\varepsilon > 0$, $K < \infty$, tels que $a \in A_r$, support de $a \subset V(x_0)$, $\|a\| < \varepsilon$ entraîne $\|f(a(x))\| < K$. Appelant irrégulier, un point au voisinage duquel f n'est pas localement borné, on a l'énoncé suivant.

(3.1) THÉORÈME de Katznelson [6]. - L'ensemble des points irréguliers est fini.

Supposons $f(0) = 0$, (on ajoute éventuellement à f une constante). Soit $x_k \in X$ une suite infinie de points irréguliers. Soit V_k une suite de voisinage de x_k et $b_k \in A_r$ tels que $b_k = 1$ sur V_k , $b_k b_{k'} = 0$ si $k \neq k'$. f étant non borné au voisinage de x_k , on peut trouver a_k dont le support soit contenu dans V_k et tel que

$$\|a_k\| < k^{-2} , \quad \|f(a_k)\| > k\|b_k\| \quad .$$

Posons $a = \sum a_k$. Alors $a \in A_r$,

$$f(a) = \sum f(a_k)$$

et

$$f(a)\ b_k = f(a_k)$$

de plus

$$\|f(a)\ b_k\| < \|f(a)\|\ \|b_k\|$$

d'où

$$\|f(a)\| > k$$

quel que soit k , contradiction qui prouve le théorème.

D'autre part, une technique de partition de l'unité permet de montrer que si l'ensemble des points irréguliers est vide, f est borné à l'origine c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$, $K < \infty$ tel que

(3.2) $$a \in A_r , \quad \|a\| < \varepsilon \quad \text{entraîne} \quad \|f(a)\| < K \quad .$$

Un exemple d'application du théorème de Katznelson ([6], p. 103).- Soit A_r une algèbre telle que $a \in A_r$, $a(x) \geq 0$ entraîne $\sqrt{a(x)} \in A_r$. Soit X^* une partie compacte de X ne rencontrant pas l'ensemble fini des points irréguliers. Alors notons par A^* l'algèbre des restrictions à X des fonctions de A, par $\|\ \|^*$ la norme de A^* ; il existe $\varepsilon > 0$, et K tel que

$$\|a\|^* < \varepsilon \quad \text{entraîne} \quad \|\sqrt{a}\|^* < K$$

ce qui se lit

$$\|b^2\|^* \geq K^{-1}\ \varepsilon^{1/2}\ \|b\|^{*2} \quad .$$

Par suite $(\lim\limits_n \|b^n\|^{*1/n}) \geq K'\ \|b\|^*$; d'après l'expression de la norme spectrale de Gelfand, la norme $\| \|^*$ est équivalente avec celle des fonctions continues sur X^* : A^* s'identifie à l'algèbre des fonctions continues sur X^*. KATZNELSON a réussi récemment à montrer que dans ce cas, les points irréguliers forment toujours un ensemble vide et a obtenu le résultat ci-dessus avec $X^* = X$ qui s'énonce comme suit.

(3.3) THÉORÈME (KATZNELSON). - Soit A_r une algèbre de Banach de fonctions réelles sur un espace compact X, dense dans $C(X)$. Supposons que $a \in A_r$, $a(x) \geqslant 0$, entraîne $\sqrt{a(x)} \in A_r$, alors A_r est l'algèbre de toutes les fonctions continues sur X.

4. Calcul symbolique dans $A(G)$. Théorème de Kahane-Katznelson [5].

Soit $A = A(G)$, $f \in O$. Alors si g_0 est un point irrégulier pour f, $g + g_0$ sera un point irrégulier puisque les translations commutent avec le calcul symbolique. Par suite, s'il existait un seul point irrégulier, tous les points de G seraient irréguliers. (3.1) montre alors que l'ensemble des points irréguliers est vide, donc que (3.2) est satisfait.

THÉORÈME (KAHANE-KATZNELSON). - Si $f \in O$, alors f est holomorphe au voisinage du segment $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ quel que soit $\varepsilon > 0$.

Montrons l'analyticité de f au voisinage de zéro. Pour tout a tel que $\|a\| < 1$ et pour tout λ réel

$$\|\sin (a + \lambda)\| < \|\sin a\| + \|\cos a\| < e \quad .$$

Par suite, si on prend $\alpha > 0$ tel que $e\alpha < \varepsilon$ et si on utilise (3.2) on obtient, posant $f_1(\xi) = f(\alpha \sin \xi)$, $\|f_1(a + \lambda)\| < K$ quels que soient a, $\|a\| < 1$ et λ.

f_1 est une fonction périodique de période 2π. p étant un entier fixé, posons

$$s_{n,p}(a) = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f_1\left(a + \frac{2r\pi}{n}\right) \exp\left(- \frac{2\pi i r p}{n}\right)$$

(4.1) Alors $\|s_{n,p}(a)\| < K$ pour tout n et p.

D'autre part, quel que soit $g \in G$

(4.2) $$\lim_{n=\infty} s_{n,p}(a(g)) = \beta_p \, e^{ipa(g)}$$

où β_p désigne le coefficient de Fourier d'ordre p de $f_1(\xi)$.

Il résulte de (4.1) et de (4.2) que $s_{n,p}(a(g))$ converge faiblement dans

$L_1(G')$ vers un élément b .

Alors, on a d'après (4.1)

$$\|b\| < K$$

d'après (4.2)

$$b(g) = \beta_p \, e^{ipa(g)}$$

d'où

$$|\beta_p| < K(\|e^{ipa}\|)^{-1} \qquad .$$

D'autre part

$$1 = \|e^{iua}e^{-iua}\|'_{\mu} < \|e^{iua}\| \; \|e^{-iua}\|'_{\mu}$$

d'où

$$|\beta_p| < K \, \|e^{ipa}\|'_{\mu} \qquad .$$

Ceci étant vrai pour tout a tel que $\|a\| < 1$ on obtient en appliquant (2.5)

(4.3) $$|\beta_p| < e^{\rho|p|}$$

d'où l'analyticité de f_1 , dont on déduit celle de f , d'où le théorème.

Remarquons que si l'on peut trouver une suite $\varepsilon_n \rightarrow \infty$ telle que (3.2) soit vérifié pour une suite convenable $K_n \rightarrow \infty$, alors on pourra prendre α arbitrairement grand ce qui permet de déduire en utilisant (4.3) que f est entière, d'où le corollaire.

COROLLAIRE. - Si f opère sur $A(G)$ et est bornée sur toute boule, alors f est entière.

5. HELSON et KAHANE ont obtenu ([3]) l'équivalent du théorème 4, lorsque $G = Z$. Dans [2], on trouve un exposé d'ensemble de la question.

Pour les algèbres de mesures, KAHANE et RUDIN ont obtenu un résultat plus puissant ([2] et [4]) :

Soit $M_r(G)$ l'algèbre pour le produit de composition des mesures portées par un groupe abélien compact infini dont les transformées de Fourier sont réelles. Alors si f opère sur $M_r(G)$, f est entière.

Si $D_r(G)$ dénote la partie de $M_r(G)$ constituée par les mesures sommes de masses de Dirac, f opère sur $D_r(G)$, ce qui est équivalent de dire que f opère sur $A_r(G_1)$, où G_1 désigne le groupe dual du groupe G muni de la topologie discrète. Par une construction délicate, du type de Szidon, ([2], pages 152-154), on peut montrer que, si f opère sur $M_r(G)$, f est bornée sur toute boule. Ceci entraîne que f est bornée sur toute boule de $A_r(G_1)$ et (4.4) donne la conclusion.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BISHOP (Errett). - A duality theorem for an arbitrary operator, Pacific J. of Math., t. 9, 1959, p. 389-397.

[2] HELSON (Henry), KAHANE (Jean-Pierre), KATZNELSON (Yitzhak) and RUDIN (Walter). - The functions which operate on Fourier transforms, Acta math., t. 102, 1959, p. 135-157.

[3] HELSON (Henry) et KAHANE (Jean-Pierre). - Sur les fonctions opérant dans les algèbres de transformées de Fourier de suites ou de fonctions sommables, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 626-628.

[4] KAHANE (Jean-Pierre) et RUDIN (Walter). - Caractérisation des fonctions qui opèrent sur les coefficients de Fourier-Stieljes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 773-775.

[5] KATZNELSON (Yitzhak). - Sur les fonctions opérant dans l'algèbre des séries de Fourier absolument convergentes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 404-406.

[6] KATZNELSON (Yitzhak). - Sur le calcul symbolique dans quelques algèbres de Banach, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 76, 1959, p. 83-123.

[7] MALLIAVIN (Paul). - Calcul symbolique et sous-algèbres de $L_1(G)$, Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 181-186.