

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

A. KOLMOGOROV

Dimension linéaire des espaces vectoriels topologiques

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. n° 165, p. 393

http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__393_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DIMENSION LINÉAIRE DES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

par A. KOLMOGOROV

On considère des fonction $d(E)$, où E est un espace vectoriel topologique et $d = d(E)$ est un élément d'un ensemble \mathcal{O} semi-ordonné. Pour avoir quelque analogie avec la dimension ordinaire, il est naturel de supposer que les deux conditions suivantes sont remplies :

- (α) $d(E_1) \leq d(E)$, si E est isomorphe à un sous-espace linéaire fermé de E ;
- (β) $d(E_1) \leq d(E)$, s'il existe un opérateur linéaire continu T ,

$$TE = E_1 .$$

Dans la théorie de dimension linéaire de Banach, on admet seulement la condition (α). La théorie devient plus simple et plus logique, si l'on admet aussi la condition (β). Comme dans le cas de Banach, il existe une fonction dimensionnelle $\delta(E)$ la plus forte dans le sens où pour chaque autre fonction $d(E)$ de

$$d(E') < d(E) .$$

il s'ensuit

$$\delta(E') < \delta(E) .$$

L'étude directe de la fonction $\delta(E)$ ne semble pas être toujours assez simple. Quelquefois, la fonction dimensionnelle suivante peut être utile :

$d_a(E)$ est la classe de fonctions $\varphi(\varepsilon)$ définies pour $\varepsilon > 0$, telles que pour chaque compact $K \subseteq E$ et chaque voisinage \mathcal{U} du zéro dans E , il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que, quel que soit $\varepsilon < \varepsilon_0$, on peut trouver n points

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (n \leq \varphi(\varepsilon))$$

dans E avec la propriété

$$K \subseteq \bigcup_{1 \leq m \leq n} (\varepsilon \mathcal{U} + x_m) .$$

L'ordre dans $\mathcal{O}_a = \{d_a\}$ est inverse de l'inclusion :

$$d_a \leq d'_a, \text{ si } d'_a \subseteq d_a .$$