SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN DIEUDONNÉ

Extensions de représentations linéaires de groupes de Lie

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. n° 159, p. 309-318

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__309_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1957)

EXTENSIONS DE REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DE GROUPES DE LIE

par Jean DIEUDONNÉ

(d'après HOCHSCHILD et MOSTOW [5])

1. Préliminaires et notations.

Sauf mention expresse du contraire, il s'agit de groupes de Lie réels. Soit ρ une représentation linéaire d'un tel groupe dans un espace vectoriel V de dimension d. Dans l'espace $C(G)$ des fonctions continues sur G, G opère à gauche par $(s.f)(t) = f(ts)$ et à droite par $(f.s)(t) = f(st)$; les coefficients de ρ sont les fonctions $s \rightarrow \theta_{x,x'}(s) = \langle \rho(s)x , x' \rangle$ $(x \in V$, $x' \in V^*$ dual de $V)$ et on a $t.\theta_{x,x'} = \theta_{\rho(t)x,x'}$ et $\theta_{x,x'}.t = \theta_{x,{}^t\rho(t)x'}$, donc le sous-espace $R(\rho)$ engendré par les coefficients de ρ est stable par G à droite et à gauche. Si (e_i^*) est une base de V^*, l'application $x \rightarrow (\theta_{x,e_1^*}, \ldots , \theta_{x,e_n^*})$ est un G-monomorphisme de V dans $(R(\rho))^d$.

Soit V' la somme directe des G-modules simples figurant comme quotients dans une suite de Jordan-Hölder du G-module V ; on désigne par ρ' la représentation linéaire de G correspondant à V', et on dit que ρ est unipotente si $\rho' = 0$; il revient au même de dire qu'il existe un entier n tel que

$$(1 - \rho(s_1)) \ldots (1 - \rho(s_n)) = 0$$

quels que soient les $s_i \in G$. Sous-représentations, représentations quotients, sommes directes et produits tensoriels de représentations unipotentes le sont aussi ; si ρ est unipotente, il en est de même de la représentation correspondante de G dans $R(\rho)$. Si K est un sous-groupe de G, ρ_K et ρ'_K les restrictions à K de ρ et ρ', $\rho'_K = 0$ entraîne que ρ_K est unipotente. La réciproque est vraie si K est distingué dans G, car tout G-module simple S est alors un K-module semi-simple (il est réunion des $\rho(s)T$, où T est un sous-K-module simple de S, et les $\rho(s)T$ sont des K-modules).

Si R est le radical, $D(G)$ le groupe des commutateurs de G, la composante connexe de $R \cap D(G)$ est contenue dans le noyau de ρ' ; en effet, la différentielle d'une représentation semi-simple est une représentation semi-simple de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G et on sait que $D(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{r}$ ($\mathfrak{r}$ radical de $\mathfrak{g}$, égal à l'algèbre de Lie de R) est contenu dans le noyau de toute représentation semi-simple de $\mathfrak{g}$.

2. Le problème d'extension.

On se donne un groupe de Lie connexe K , un sous-groupe G , une représentation linéaire ρ de G dans un espace de dimension finie V . Il s'agit de savoir s'il existe une représentation σ de K dans un espace de dimension finie $W \supset V$ telle que V soit stable par la restriction de σ à G et que la représentation de G dans V définie par cette restriction soit ρ . Le travail de HOCHSCHILD et MOSTOW donne une réponse à cette question lorsque K est un produit semi-direct H.G (G distingué, H et G fermés dans K) :

THÉORÈME 1. - Pour que ρ puisse être étendue en une représentation σ de K , il faut et il suffit que l'on ait $\rho'(yxy^{-1}x^{-1}) = 1$ pour $y \in K$ et $x \in R$, (composante connexe du radical de G). Lorsqu'il en est ainsi, on peut en outre supposer que le noyau de σ' contient celui de ρ' .

La nécessité résulte de la remarque finale du n° 1 , le radical de G étant contenu dans celui de K .

Pour démontrer la suffisanse, on étend d'abord à K les opérateurs de l'espace C(G) : si $f \in C(G)$, $h \in H$, $s \in G$, on pose $((hs).f)(y) = f(h^{-1}yhs)$, et on vérifie que l'on a $u.(v.f) = (uv).f$ pour u , v dans K . Supposons prouvé que les transformés des $f \in R(\rho)$ par K engendrent un espace U de dimension finie, d'où une représentation de K dans U , et par suite aussi une représentation σ de K dans U^d ; comme $V \longrightarrow (R(\rho))^d \longrightarrow U^d$ est un G-monomorphisme, σ répondra à la question.

On démontre $\dim U < +\infty$ en 2 étapes :

1° Soit S sous-groupe semi-simple maximal de G . On montre d'abord que pour tout $h \in H$, il existe $z \in G$ tel que hz centralise S . On remarque d'abord que la composante connexe du groupe des automorphismes du groupe semi-simple G/R est le groupe des automorphismes intérieurs, donc en considérant l'automorphisme de G/R déduit de $x \longrightarrow h^{-1}xh$, il existe $u \in G$ tel que $(hu)^{-1}s(hu)s^{-1} \in R$ pour tout $s \in S$. D'autre part, $(hu)^{-1}S(hu)$ étant conjugué de S , il existe $r \in R$ tel que ce groupe soit rSr^{-1} (LEVI-MALČEV) ; on conclut que $(hur)^{-1}s(hur)s^{-1} \in S$; mais cela s'écrit

$$r^{-1}((hu)^{-1}\, s(hu)s^{-1})r.(sr^{-1}\, s^{-1}\, r)$$

donc appartient aussi à R par le résultat précédent. Comme $S \cap R$ est discret (LEVI), S connexe et $s \longrightarrow (hur)^{-1}\, s(hur)s^{-1}$ continue, on voit que $z = ur$ répond à la question.

2° On écrit alors $h.f = (z^{-1}.f.z) \circ a$, où a est l'automorphisme $x \longrightarrow (hz)^{-1}\, x(hz)$. On a évidemment $z^{-1}.f.z \in R(\rho)$ si $f \in R(\rho)$, et lorsque h parcourt H, les $\underline{a}$ forment un ensemble A d'automorphismes analytiques de G, satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) $\qquad \rho(a(x)) = \rho(x)$ si $x \in S$, $\quad \rho'(a(x)) = \rho'(x)$ si $x \in R$.

On est donc ramené à un problème ne concernant que G. On montre en premier lieu qu'on peut supposer G simplement connexe (en relevant R, S et les $a \in A$ au revêtement simplement connexe de G).

Alors G est produit semi-direct $S.R$ (LEVI-MALČEV) ; la seconde réduction consiste à se ramener au cas $G = R$ en utilisant la première condition (1) :

si $\rho(a(x))$ est combinaison linéaire d'un nombre fini de matrices $F_i(x)$ indépendantes de $a \in A$, lorsque $x \in R$, et si π est la projection $S.R \longrightarrow R$, on a, pour tout $x \in G$,

$$\rho(a(x)) = \rho(a(x(\pi(x))^{-1}))\ \rho(a(\pi(x))) = \rho(x(\pi(x))^{-1})\ \rho(a(\pi(x)))$$

et ceci est combinaison linéaire des produits de $\rho(x(\pi(x))^{-1})$ et des $F_i(\pi(x))$.

On peut donc supposer G résoluble simplement connexe, et $\rho'(a(x)) = \rho'(x)$ pour tout $x \in G$ et tout $a \in A$. La composante connexe T du noyau de ρ' est alors un sous-groupe nilpotent distingué simplement connexe, contenant le groupe des commutateurs de G. Soit $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie de T ; l'application exponentielle est un homéomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur G, appliquant $\mathfrak{t}$ sur T. Insérant entre $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{g}$ une suite croissante d'idéaux $\mathfrak{t} + \mathbb{R}X_1, \ldots, \mathfrak{t} + \mathbb{R}X_1 + \ldots + \mathbb{R}X_n = \mathfrak{g}$, il leur correspond une suite croissante de sous-groupes entre T et G, dont chacun est produit semi-direct du précédent et d'un groupe à 1 paramètre, d'où un homéomorphisme ψ de $\mathfrak{g}$ sur G tel que, pour $Z = U + \sum_{i=1}^{n} t_i X_i$, $U \in \mathfrak{t}$, t_i réels, on ait $\psi(Z) = \exp(U)\exp(t_1 X_1) \ldots \exp(t_n X_n)$. Soient $a^{\bullet}$ et $\rho^{\bullet}$ les différentielles de a et ρ ; l'hypothèse sur a entraîne $a^{\bullet}(\mathfrak{t}) \subset \mathfrak{t}$ et $a^{\bullet}(X_i) = A_i + X_i$ avec $A_i \in \mathfrak{t}$. Soit $(Y_j)_{1 \leq j \leq q}$ une base de $\mathfrak{t}$, et posons $a^{\bullet}(Y_j) = \sum_{k=1}^{q} b_{jk}\, Y_k$ et $A_i = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}\, Y_k$. On a

(2) $$\rho(a(\psi(Z))) = \exp(\rho^{\bullet}a^{\bullet}(U))\exp(t_1(\alpha_1 + \xi_1))\ \dots\ \exp(t_n(\alpha_n + \xi_n))$$

où $\alpha_i = \rho^{\bullet}(A_i) = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}\,\eta_k$ en posant $\eta_k = \rho^{\bullet}(Y_k)$,

et $\xi_i = \rho^{\bullet}(X_i)$. Si on pose $U = \sum_{k=1}^{q} u_k Y_k$, on a $\rho^{\bullet}a^{\bullet}(U) = \sum_{j,k} b_{jk}\,u_j\,\eta_k$.

Développant (2) on obtient une série absolument convergente dont chaque terme est un produit (non commutatif) d'un certain nombre de matrices ξ_i et η_j, d'un produit p_λ de certains des a_{ik} et b_{jk}, dont le degré total est égal au nombre r des facteurs η_j, et d'un monôme par rapport aux t_i et aux u_j. Or ρ_T étant unipotente, le produit de plus de $d-1$ matrices de $\rho^{\bullet}(\mathfrak{k})$ est nul ; comme $\rho^{\bullet}(\mathfrak{k})$ est un idéal dans $\rho^{\bullet}(\mathfrak{g})$, tout produit des ξ_i et η_j dans lequel figurent plus de $d-1$ facteurs η_j est donc nul. On en conclut que les seuls p_λ figurant dans (2) sont ceux de degré total $r \leq d-1$, et par suite qu'ils sont en nombre <u>fini</u> ; les coefficients des p_λ sont des matrices $F_\lambda(Z)$ fonctions analytiques des t_i et u_j, <u>indépendantes</u> de $a \in A$, ce qui achève de prpuver que $\dim U < +\infty$.

Reste à démontrer la dernière assertion. On voit d'abord que le noyau N de ρ' est normal dans K et non seulement dans G. Car si $\rho'(x) = 1$, $x = sr$, $s \in S$, $r \in R$, on a

$$h^{-1}xh = (h^{-1}sh)(h^{-1}rh) = (zsz^{-1})(h^{-1}rh) = (zxz^{-1})(zr^{-1}z^{-1})(h^{-1}rh),$$

d'où en appliquant l'hypothèse sur ρ', $\rho'(h^{-1}xh) = \rho'(r^{-1})\,\rho'(r) = 1$. Il suffit par suite de montrer que σ_N est unipotente ; or les éléments de U sont combinaisons de fonctions $y.f$, avec $y \in K$ et $f \in R(\rho)$; si $x \in N$, on a $y^{-1}xy \in N$ et $x.(y.f) = y.(y^{-1}xy.f)$; comme il y a un nombre n tel que $\prod_{i=1}^{n}(1-\rho(x_i)).f = 0$ si les $x_i \in N$, on a

$$\prod_{i=1}^{n}(1-\sigma(x_i)).(y.f) = y.\prod_{i=1}^{n}(1-\rho(y^{-1}x_i y)).f = 0,$$

C.Q.F.D.

THÉORÈME 2. - <u>Pour que la représentation</u> σ <u>construite dans le théorème</u> 1 <u>soit unipotente, il faut et il suffit que</u> ρ <u>et</u> σ_H <u>le soient. Si</u> G <u>est nilpotent simplement connexe et</u> ρ <u>unipotente, une condition suffisante pour que</u> σ_H <u>soit unipotente est que la représentation de</u> H <u>dans</u> $\mathfrak{g}$ <u>déduite de la représentation adjointe de</u> K <u>soit unipotente</u>.

All'aide des formules $(1-hx) = h(1-x) + (1-h)$, $(1-x)h = h(1-h^{-1}xh)$,

$(1 - x)(1 - h) = (1 - x) - h(1 - h^{-1} xh)$, on voit que tout produit $\prod_{i=1}^{q}(1 - h_i x_i)$ ($h_i \in H$, $x_i \in G$) dans l'algèbre de groupe de K est combinaison linéaire de produits de la forme $h(\prod_{i=1}^{r}(1 - h_i'))(\prod_{j=1}^{t}(1 - x_j'))$, où t est le nombre des $x_i \neq 1$ dans le premier produit. Si m est le degré de σ , on a donc $\prod_{i=1}^{q}(1 - \sigma(h_i x_i)) = 0$ lorsque $t \geqslant m$; d'autre part, lorsque $t < m$ et $q \geqslant m^2$, il y a au moins m facteurs <u>consécutifs</u> de la forme $(1 - h_i)$ dans $\prod_{i=1}^{q}(1 - h_i x_i)$ et on a donc de nouveau $\prod_{i=1}^{q}(1 - \sigma(h_i x_i)) = 0$, d'où la première assertion. Pour démontrer la seconde, remarquons que l'application exponentielle est un homéomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur G ; pour $f \in R(\rho)$, $f \circ \exp$ est un polynome de degré $< d$ par rapport aux coordonnées dans $\mathfrak{g}$ puisque $\rho(\exp(Z))$ est un polynome de degré $< d$ en $\rho^{\bullet}(Z)$; il en est de même pour $f \in U$, car

$$(h.f) \circ \exp = f \circ \exp \circ \mathrm{Ad}(h^{-1}) \quad \text{pour } h \in H .$$

Comme la représentation $h \longrightarrow \mathrm{Ad}(h)$ de H dans $\mathfrak{g}$ est unipotente, il en est de même de la représentation de H dans l'espace des polynomes de degré $< d$ sur $\mathfrak{g}$ telle que $h.P = P \circ \mathrm{Ad}(h^{-1})$ (plonger cet espace dans l'espace des tenseurs covariants de degré $< d$ sur $\mathfrak{g}$) . Comme $f \longrightarrow f \circ \exp$ est un H-monomorphisme de U dans cet espace de polynomes, le théorème est démontré.

3. <u>Application au problème des représentations fidèles.</u>

On peut appliquer les théorèmes 1 et 2 à la démonstration du résultat connu suivant :

THÉORÈME 3 (MALČEV [6]). - <u>Soient</u> G <u>un groupe de Lie connexe,</u> R <u>la composante connexe de son radical,</u> S <u>un sous-groupe connexe semi-simple maximal de</u> G . <u>Pour que</u> G <u>admette une représentation linéaire fidèle, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de</u> R <u>et</u> S .

La nécessité étant évidente, la suffisance se démontre en 3 étapes

1° (E. CARTAN) <u>Si</u> G <u>est résoluble et simplement connexe, il a une représentation linéaire fidèle, unipotente dans le plus grand sous-groupe nilpotent connexe</u> N <u>de</u> G . On raisonne par récurrence sur $\dim G$; le centre Z de N est connexe (la représentation adjointe de N étant unipotente), simplement connexe [1] et non trivial, on a donc une représentation ρ de G de noyau Z , unipotente sur N . D'autre part, on a une représentation fidèle σ_0 de Z ; on passe de Z à N , puis de N à G par une succession de produits semi-directs, et on étend successivement σ_0 à une représentation de G, en appliquant le théorème 2 entre Z et N (ce qui donne une représentation unipotente sur N) puis le théorème 1 entre N et G, en utilisant le fait que $D(G) \subset N$. On a ainsi une représentation σ de G fidèle dans Z et unipotente dans N, et la somme directe de ρ et σ répond à la question.

2° (GOTO [4]) <u>Si la composante connexe</u> T <u>du radical de</u> $D(G)$ <u>est fermée dans</u> G <u>et simplement connexe, et si</u> S <u>admet une représentation fidèle,</u> G <u>admet une représentation fidèle</u>.

Il est immédiat que T est la composante connexe de $D(G) \cap R$, donc R/T est localement isomorphe à un groupe abélien, et par suite est abélien puisque connexe, soient $R/T = A \times V$, A tore, V espace vectoriel ; l'image réciproque M de V dans R est telle que T et M/T soient simplement connexes, donc il en est de même de M. Utilisant 1°, on peut donc définir une représentation fidèle de M qui est unipotente dans le plus grand sous-groupe nilpotent connexe de M, donc dans T. On applique ensuite le théorème 1 pour obtenir une représentation ρ_1 de R qui est fidèle sur M et unipotente sur T. D'autre part, comme $R/M = A$, des raisonnements dûs à IWASAWA [7, exp. 22 p. 4 et 16] prouvent que R est produit semi-direct $B.M$, où B est compact ; il y a une représentation fidèle de B, donc une représentation ρ_2 de R de noyau M ; la somme directe ρ de ρ_1 et ρ_2 est une représentation fidèle de R unipotente sur T.

On forme alors le produit semi-direct $S.R$, avec

$$(s_1 , r_1)(s_2 , r_2) = (s_1 s_2 , s_2^{-1} r_1 s_2 r_2) ;$$

par le théorème 1 on étend ρ à une représentation σ_1 de $S.R$; comme il y a une représentation fidèle de S, il y a une représentation σ_2 de $S.R$ de noyau R, la somme directe de σ_1 et σ_2 est une représentation fidèle de $S.R$.

Enfin, le noyau de l'épimorphisme naturel de $S.R$ sur G est contenu dans $(S \cap R).(S \cap R)$, et comme $S \cap R$ est discret (LEVI) et distingué dans S, il est dans le centre de S. On applique alors 2 lemmes de Goto :

a. <u>Si un groupe semi-simple connexe a une représentation fidèle, son centre est fini</u> [3].

b. <u>Si un groupe de Lie</u> G <u>admet un sous-groupe distingué fini</u> P <u>et possède une représentation fidèle, alors</u> G/P <u>admet une représentation fidèle</u> [4].

3° On va voir enfin que sous les hypothèses du théorème 3, les conditions de 2° sont remplies. Par le théorème de Lie, toute représentation de R est unipotente dans $D(R) = R'$, donc l'image de R' par cette représentation, étant contenue dans un groupe de matrices triangulaires unipotentes (qui est simplement connexe) est fermée dans le groupe linéaire général et simplement connexe. Si R admet une représentation fidèle, R' est donc fermé dans R et simplement connexe. Les mêmes méthodes d'Iwasawa prouvent que $R = A.M$, A tore et M sous-groupe distingué fermé simplement connexe de R contenant R'. On va modifier M de façon à avoir un groupe B ayant les mêmes propriétés mais étant en outre fermé et distingué dans G et contenant la composante connexe T du radical de $G' = D(G)$; alors les conditions de 2° seront bien vérifiées.

Pour cela on regarde d'abord les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{a}$ de G, R, A. Comme A est compact, la représentation adjointe de A dans $\mathfrak{g}$ est semi-simple donc $\mathfrak{g}$ est somme directe de $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$ et du centralisateur $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$; comme $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{r}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} + \mathfrak{r}$ (somme non directe). Soit $\mathfrak{s}$ une sous-algèbre semi-simple maximale dans $\mathfrak{p}$, donc maximale dans $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{a} + [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ est un $\mathfrak{s}$-sous-module dans $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{a} \cap [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = 0$; comme la représentation adjointe de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{r}$ est complètement réductible, on a $\mathfrak{r} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ où $\mathfrak{b} \supset [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ et $\mathfrak{b}$ est un $\mathfrak{s}$-module, la somme étant directe ; $\mathfrak{b}$ est donc un idéal de $\mathfrak{g}$, soit B le sous-groupe connexe de G correspondant (peut-être pas fermé a priori), distingué dans G et tel que $R = AB$. En outre l'algèbre de Lie de T est $[\mathfrak{r}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] + [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = [\mathfrak{s}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{b}$ donc $T \subset B$.

On considère maintenant R/R' qui est produit direct du tore AR'/R' et de l'espace vectoriel M/R' et qui contient B/R' ; remontant au revêtement simplement connexe de R/R', B/R' s'y relève en un sous-espace vectoriel supplémentaire du revêtement de AR'/R' (à cause des algèbres de Lie), donc en redescendant il est clair que B/R' est fermé dans R/R' (l'application canonique sur R/R' de son revêtement universel à un noyau contenu dans le relèvement de AR'/R'). Alors B est fermé dans G et comme R' et B/R' sont simplement connexes il en est de même de B, ce qui achève la démonstration du théorème 3.

Le théorème 3 ramène la question de la représentabilité aux groupes simples d'une part (en vertu du lemme b.), aux groupes résolubles de l'autre.

A. Groupes simples.

Si G est un groupe simple (réel) connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ la complexifiée de cette dernière, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ peut n'être pas simple ou l'être ; dans le premier cas, il existe une algèbre de Lie simple *complexe* $\mathfrak{h}$ telle que $\mathfrak{g}$ soit l'algèbre $\mathfrak{h}$ considérée comme algèbre de Lie réelle [2] .

Premier cas. - Soit K le groupe compact simplement connexe ayant pour algèbre de Lie une forme compacte de $\mathfrak{h}$; K a une représentation fidèle dans un groupe unitaire $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$; les matrices de l'algèbre de Lie de K sont donc antihermitiennes, et une base de cette algèbre est par suite linéairemment indépendante sur $\mathbb{C}$; dans $GL(n, \mathbb{C})$ il correspond donc à cette algèbre de Lie complexifiée (isomorphe à $\mathfrak{h}$) un groupe de Lie complexe $K_{\mathbb{C}}$; on sait [7 , exposé 22] que K est sous-groupe compact maximal de $K_{\mathbb{C}}$ et que l'espace topologique $K_{\mathbb{C}}$ est homéomorphe au produit de K et d'un espace vectoriel, donc est simplement connexe. On en conclut (lemmes a. et b.) que *tout* groupe de Lie (réel) connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet une représentation fidèle.

Second cas. - Soit $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ le groupe complexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $\hat{G}$ le sous-groupe de Lie réel correspondant à $\mathfrak{g}$; comme $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ admet une représentation fidèle (voir ci-dessus), il en est de même de $\hat{G}$. Soit maintenant G un groupe simple d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, admettant une représentation fidèle dans un $GL(n, \mathbb{R})$; plongeant $GL(n, \mathbb{R})$ dans $GL(n, \mathbb{C})$, une base de $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ devient une base de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, et il correspond donc à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ un groupe simple complexe connexe $G_{\mathbb{C}} \subset GL(n, \mathbb{C})$. L'application canonique $\tilde{G}_{\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ restreinte à $\hat{G}$, donne un homomorphisme $\hat{G} \to G$; le centre de G est donc d'ordre au plus égal à celui du centre de $\hat{G}$. Pour que tout groupe simple d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit représentable, il faut et il suffit donc que $\hat{G}$ soit simplement connexe ; ce n'est pas toujours le cas, comme le montre l'exemple $G_{\mathbb{C}} = SL(2, \mathbb{C})$, $\hat{G} = SL(2, \mathbb{R})$ (E. CARTAN).

B. *Groupes résolubles.*

THÉORÈME 4 [4]. - *Soit* G *un groupe de Lie connexe résoluble. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

1° G *admet une représentation fidèle* ;

2° $D(G)$ *est fermé et simplement connexe* ;

3° $\overline{D(G)}$ *est simplement connexe* ;

4° *le centre de* $\overline{D(G)}$ *est connexe et simplement connexe* ;

5° *si* A *est un sous-groupe compact (tore) maximal de* G , $A \cap D(G) = e$;

6° *il existe un sous-groupe compact (tore) maximal* A *et un sous-groupe fermé distingué simplement connexe* N *tels que* G *soit produit semi-direct* $A.N$.

On a vu que 1° entraîne 2° dans la démonstration de 3° du théorème 3. 2° entraîne 3° trivialement, et comme tout sous-groupe nilpotent connexe d'un groupe résoluble simplement connexe est fermé [1], 3° $\Rightarrow$ 2°. Comme le centre d'un groupe nilpotent simplement connexe est connexe et simplement connexe, 2° $\Rightarrow$ 4° ; d'autre part, si le centre d'un groupe résoluble est connexe et simplement connexe, tout sous-groupe nilpotent connexe est simplement connexe et fermé, comme on le voit en passant au revêtement universel ; donc 4° $\Rightarrow$ 2°. Comme un groupe nilpotent simplement connexe ne peut contenir de sous-groupe compact $\neq e$, 2° $\Rightarrow$ 5°. Supposons 5° vérifiée ; si $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie de A, on peut écrire $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$, somme directe où $\mathfrak{n} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, et le revêtement universel $\tilde{G}$ est donc un produit semi-direct $\tilde{A}.\tilde{N}$, où $\tilde{A}$ est le revêtement universel de A ; on a $G \cong \tilde{G}/D$ où D est discret dans le centre de $\tilde{G}$, et on a nécessairement $D \subset \tilde{A}$, sans quoi A ne serait pas un sous-groupe compact maximal ; on en conclut que l'image N de $\tilde{N}$ dans G est simplement connexe et que $G = A.N$ est produit semi-direct, autrement dit 5° $\Rightarrow$ 6°. Enfin, supposons que 6° ait lieu ; d'après la partie 1° du théorème 3, N admet une représentation fidèle, unipotente dans le plus grand sous-groupe nilpotent de G ; le théorème 1 s'applique et prouve qu'il y a une représentation de G, fidèle dans N. Comme il y a une représentation fidèle de A, donc une représentation de G de noyau N, on conclut comme d'ordinaire que G admet une représentation fidèle.

4. Remarques.

HOCHSCHILD et MOSTOW démontrent un analogue infinitésimal du théorème 1 pour les algèbres de Lie, d'où (utilisant LEVI-MALČEV) ils obtiennent une démonstration rapide du théorème d'Ado. Ils ont aussi une généralisation du théorème 1 au cas où on suppose $K = HG$, mais seulement $H \cap G$ compact.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - On the topological structure of solvable groups, Annals of Math., t. 42, 1941, p. 668-675.

[2] GANTMACHER (Felix). - On the classification of real simple Lie groups, Matematiceskij Sbornik (Recueil mathématique), t. 5, 1939, p. 217-249.

[3] GOTO (Morikuni). - Faithful representations of Lie groups, I., Math. Japonicae, t. 1, 1948, p. 107-119.

[4] GOTO (Morikuni). - Faithful representations of Lie groups, II., Nagoya math. J., t. 1, 1950, p. 91-107.

[5] HOCHSCHILD (G.) and MOSTOW (G.). - Extensions of representations of Lie groups and Lie algebras, I., Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 924-942.

[6] MALČEV (A.). - On the theory of Lie groups in the large, Matematiceskij Sbornik (Recueil mathématique), t. 16, 1945, p. 163-189.

[7] Séminaire Sophus Lie : Théorie des Algèbres de Lie ... , t. 1, 1954/55.