RENÉ THOM

La classification des immersions

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. n° 157, p. 279-289
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__279_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1957)

LA CLASSIFICATION DES IMMERSIONS

par René THOM

(d'après SMALE [2])

1. Rappel de définitions.

Soient V^n, M^p deux variétés différentiables de classe C^r, $r \geq 2$, de dimension n, p respectivement. On suppose $n < p$. De façon générale, ici, différentiable est mis pour r-fois différentiable, où r est un entier fixe ≥ 2, éventuellement infini.

Une application différentiable $f : V^n \to M^p$ est dite une immersion si, en tout point de V^n, le rang de l'application f est égal à n (dimension de V,).

Une application f de V^n dans M^p est dite un plongement, si f est une immersion, et si, de plus, f est biunivoque.

Deux immersions (resp. plongements) f, g de V dans M seront dites équivalentes (ou encore, régulièrement homotopes), s'il existe une application différentiable F de $V \times I$ dans M, telle que :

a. $F \mid V \times 0 = f$; $F \mid V \times 1 = g$

b. L'application $f_t(V)$ définie par $F(V \times t) \to M$, est, pour tout $t \in I$, une immersion (resp. un plongement).

Dans le cas où V^n est compacte, les classes de plongements de V dans M s'identifient aux classes d'isotopie de V dans M. On verra plus loin pourquoi, lorsque deux plongements f, g de V dans M sont régulièrement homotopes, il existe un difféomorphisme global H de M, tel que $g = H \circ f$. C'est un des problèmes les plus classiques en topologie (mais néanmoins l'un des moins bien connus) que de classifier les plongements de V dans M ; citons, à titre d'exemple, le problème de Schönflies : deux plongements de la n-sphère S^n dans R^{n+1} sont-ils ou non des isotopes ?

Il est clair qu'avant de classifier les plongements, il importerait, comme étape préliminaire, de classifier les immersions. On peut, à cet égard, formuler la conjecture suivante [1], qui a été proposée par EHRESMANN : soit P_V le fibré en n-repères sur V^n, P_M le fibré analogue sur M. Toute immersion $f : V \to M$ se prolonge en une application $F : P_V \to P_M$; pour que deux immersions f , g : $V^n \to M^p$ soient régulièrement homotopes, il faut et il suffit que les applications correspondantes F , G : $P_V \to P_M$ soient homotopes (au sens usuel).

Les travaux de SMALE constituent un progrès important dans cette voie ; ils donnent une solution complète dans le cas particulier, d'importance fondamentale, où $V = S^n$, $M = R^p$.

Les résultats de SMALE figurent dans sa thèse et dans un abstract au Bulletin of American mathematical Society [2] ; son résultat le plus complet et le plus récent qu'il m'a communiqué (théorème 4) n'a fait l'objet jusqu'à présent d'aucune publication ; j'en propose ici une démonstration tirée des conversations que j'ai eues avec SMALE ce printemps à Chicago ; elle donne un résultat peut-être un peu plus général que son théorème, mais n'a sans doute pas le caractère explicite que revêtira probablement la démonstration finale de SMALE.

2. Généralités sur des espaces fonctionnels.

Etant données deux variétés V^n , X^m , on munit l'ensemble $L(V , X)$ des applications de V dans X de la C^r-topologie, définie par l'écart sur les dérivées partielles jusqu'à l'ordre r sur tout compact de V^n . Un tel espace est localement contractile ; de façon plus précise, tout point $f \in L(V , X)$ admet un voisinage U_f qu'on peut munir "localement" d'une structure d'espace de Fréchet : soit $T(X)$ le fibré des vecteurs tangents à X , $\Theta(f)$ le fibré induit de $T(X)$ sur V par f . Toute application assez voisine de f peut être mise sous forme $f + \delta f$, où δf est une fonction de $x \in V$ prenant ses valeurs dans les vecteurs tangents à X au point $y = f(x)$; par suite, un voisinage U_f de f dans $L(V , X)$ est homéomorphe à l'espace vectoriel des sections de $\Theta(f)$ sur V , muni de la C^r-topologie.

Soit donnée une application $j : V \to M$. Etant donnée une troisième variété X , l'application j induit une application canonique : $j^* : L(M , X) \to L(V , X)$. Une étude systématique de cette application ne semble pas avoir été entreprise jusqu'ici. Une telle application est "localement linéaire" au sens suivant : si $x \in L(M , X)$ et $y = j^*(x) \in L(V , X)$, il existe des voisinages U_x , V_y de x , y tels que, pourvus de leurs structures d'espace de Fréchet, la restriction de j^* à U_x dans V_y soit une application linéaire. Il semble (c'est là une affirmation dont je serais reconnaissant aux spécialistes d'établir le bien-fondé) que l'image de $L(M , X)$ par j^* dans $L(M , V)$ soit toujours un sous-espace fermé

W (sous-variété), en général de codimension infinie ; il semble également que l'application $j^* : L(M, X) \to W$ puisse être considérée comme une fibration (il y a trivialité locale). On va se proposer de montrer, que, sous certaines conditions, l'application j^* satisfait au relèvement des homotopies pour les cubes (ou plus généralement, les compacts).

3. Le relèvement des homotopies pour les espaces de plongements.

Supposons donné un plongement $i : V^n \to M^p$, V et M étant des variétés compactes. Soit donnée une troisième variété X, de dimension m strictement supérieure à la dimension p de M. Désignons par $P\ell(M, X)$ l'espace de tous les plongements de M dans X ; c'est un ouvert de $L(M, X)$, qu'on munira de la topologie induite (C^r-topologie). Il est clair que si $f : M \to X$ est un plongement, l'application induite $g = f \circ i$, est également un plongement. D'où une application induite : $i^* : P\ell(M, X) \to P\ell(V, X)$.

THÉORÈME 1. - L'application $i^* : P\ell(M, X) \to P\ell(V, X)$ satisfait au relèvement des homotopies pour les cubes.

Soit T un voisinage tubulaire fixe de la sous-variété $g(V)$ de X ; on considère un voisinage W_g de g dans $P\ell(V, X)$ tel que, pour tout $h \in W_g$, l'image $h(V)$ est dans T. Soit donnée une déformation g_t de g dans W_g ; elle permet de définir, en tout point x de V, et pour tout t, un champ de vecteurs $J_t = dg_t(x)/dt$ défini sur $g_t(V)$. Dans le produit $T \times I$, le champ de vecteurs J_t peut, en raison du théorème de prolongement de Whitney, être prolongé en un champ K_t défini dans $T \times I$, et qui se réduit sur le bord $\partial T \times I$ au vecteur unitaire porté par l'axe des t. L'intégration du système différentiel défini par le vecteur K_t définit un groupe d'homéomorphismes H_t au paramètre t de $T \times I$, qui conserve ponctuellement les points du bord ; H_t est un difféomorphisme de T, qui se réduit à l'identité sur le bord ∂T de T, et envoie $g(V)$ sur $g_t(V)$. H_t peut par suite se prolonger en un difféomorphisme global (noté également H_t) de X sur elle-même, et l'on aura :

(1) $$g_t = H_t \circ g$$

La même construction peut s'effectuer si la déformation g_t dépend différentiablement d'un paramètre u variant par exemple dans un cube I^k. On obtient une famille de difféomorphismes $H_{t,u}$ de X tels que :

(1)' $$g_{t,u} = H_{t,u} \circ g$$

Le relèvement des homotopies pour les cubes sur le voisinage W_g se démontre alors comme suit ; soit $f_{0,u}$ un cube d'applications de M dans X, $g_{0,u} = i \circ f_{0,u}$ sa projection dans $P\ell(V, X)$. Supposons donnée une déformation $g_{t,u}$ de $g_{0,u}$ dans W_g ; on relèvera cette déformation en posant :

$$f_{t,u} = H_{t,u} \circ H_{0,u}^{-1} \circ g_{0,u} \tag{2}$$

Ceci achève la démonstration du théorème 1.

4. Factorisation par les jets d'ordre un.

Deux application f, f' de M dans X définissent le même jet d'ordre un le long de V, si les restrictions de f, f' à V ainsi que toutes les dérivées partielles d'ordre un, sont égales. L'ensemble de ces classes d'équivalence forme un espace $J^1_V(M, X)$, fibré sur $L(V, X)$; la fibre est en fait l'espace vectoriel des sections du fibré de base V, de fibre les jets de l'espace des vecteurs normaux à V dans M, de but X. L'application $i^* : P\ell(M, X) \to P\ell(V, X)$ se factorise en $P\ell(M, X) \xrightarrow{h} J_V{}^1(M, X) \to P\ell(V, X)$; pour que l'application h soit un épimorphisme, on remplacera $J^1_V(M, X)$ par l'image H de h : en tout point x de $g(V)$, tout plongement $f : M \to X$ induit une application $x \to z(f)(x)$ où $z(f)(x)$ désigne le jet local d'ordre un, de rang p, défini par le plongement f. Soit H cette image ; il est aisé de voir que l'application $h : P\ell(M, X) \to H$ satisfait elle aussi au rélèvement des homotopies pour les cubes. Il suffit de reprendre la démonstration du théorème en remarquant ce qui suit : on impose aux homéomorphismes $H_{t,u}$ de T de transformer un p-jet donné z (de rang p) au point $x \in g_0(V)$ en un p-jet z' donné (également de rang p) au point $x' = g_{t,u}(x)$. Ceci revient à imposer au prolongement K_t du champ de vecteur J_t certaines conditions linéaires sur son jet d'ordre un sur la sous-variété $g_t(V)$ de T. Or un tel prolongement est toujours possible en raison du théorème de prolongement de Whitney. Nous obtenons ainsi :

THÉORÈME 2.- <u>L'application</u> $h : P\ell(M, X) \to H$, <u>qui associe à tout plongement de</u> M <u>dans</u> X <u>son jet d'ordre un restreint à la sous-variété</u> V, <u>satisfait au relèvement des homotopies pour les cubes</u>.

REMARQUE. - On aurait pu tout aussi bien considérer les jets d'ordre supérieur à un ; mais cela n'aurait conduit à aucun résultat intéressant au point de vue topologique, en raison du fait bien connu : les jets d'ordre r et de rang p de R^p dans R^m, $p < m$, sont, au point de vue topologique, le produit des jets d'ordre un et d'un espace vectoriel.

5. Relèvement des homotopies pour les espaces d'immersions.

Soit maintenant $g : V \to X$ une immersion de V dans X ; puisque l'application g est de rang n partout, on peut définir en tout point de l'image $g(V)$ l'espace fibré des vecteurs normaux (X étant munie d'une métrique riemannienne) soit N ; on formera le fibré Q sur V induit de N par g. Il est clair que si on donne au "rayon" du fibré N une valeur assez petite, soit $a > 0$, alors l'immersion $V \to X$ se prolonge en une immersion $\gamma_1 : Q \to X$; l'image $\gamma_1(Q)$ s'appellera un "voisinage tubulaire" de $g(V)$ dans X, de rayon aa. La variété V est plongée dans le fibré Q comme section nulle $s_0(V) \subset Q$. On obtient un voisinage ouvert W_g de g dans $L(V, X)$ en considérant l'effet sur V dans Q de la translation définie par un champ de vecteurs J_t défini sur V dans Q. D'où résulte, comme dans le cas des plongements, que toute déformée g_t de g, appartenant à W_g, peut s'écrire :

$$g_t = \gamma_1 \circ H_t \circ s_0 \tag{3}$$

où H_t désigne un difféomorphisme du fibré Q, dépendant continuement (pour la C^r-topologie) de la déformation g_t, et qui se réduit à l'identité sur le bord ∂Q de Q.

6. "Bonne position" d'une immersion $f : M \to X$ par rapport à un voisinage tubulaire T.

Supposons qu'on ait une immersion $f : M \to X$ telle que $g = f \circ i$. On peut toujours trouver un voisinage tubulaire C de $i(V)$ dans M, de rayon r assez petit, pour que C puisse se plonger biunivoquement avec rang maximum dans le fibré Q, de telle sorte qu'on ait le diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] & C \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\gamma_1"'] & T \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

On dira que l'immersion f est "en bonne position" par rapport au voisinage tubulaire T, si le rayon r du voisinage C peut être pris assez grand pour que le bord de C puisse se relever dans le bord fibré Q (ou de ses voisinages assez petits). L'intérêt de cette définition réaide dans le Lemme qui suit.

On désigne par $Im(V, X)$ l'espace des immersions de V dans X ; soit $g : V \to X$ une immersion, T un voisinage tubulaire de $g(V)$, W_g un voisinage de g dans $Im(V, X)$ tel que, pour tout $h \in W_g$, $h(V)$ soit contenue dans T.

On se proprose de montrer que l'application induite : i^* : $\mathrm{Im}(M , X) \to \mathrm{Im}(V , X)$ satisfait au relèvement des homotopies pour les cubes. On montrera d'abord le :

LEMME 1. - Si B désigne dans $i^{-1}(W_g)$ l'ensemble des immersions de M dans X qui sont en bonne position relativement à T , l'application i^* : $B \to W_g$ satisfait au relèvement des homotopies pour les cubes.

Soit $f_{0,k}$ un cube d'immersions de B , $g_{0,k} = f_{0,k} \circ i$ sa projection dans $\mathrm{Im}(V , X)$. Par hypothèse, il existe un voisinage tubulaire C_k de V dans M , tel que le bord de C se relève dans le bord de Q pour toute $f_{0,k}$. Soit Q_1 un fibré concentrique à Q de rayon $2a/3$, par exemple. On peut supposer le cube k d'immersions a été pris assez petit pour satisfaire à la condition suivante : il existe un voisinage tubulaire C_0 de V dans M , tel que, pour toute $f_{0,k}$, C_0 se relève dans Q , et le bord de C_0 se relève dans Q entre Q et Q_1 (dans le "manchon annulaire" défini par $2a/3 < \Gamma < a$). Par ailleurs, on peut supposer que les homéomorphismes $H_{t,k}$ figurant dans la formule (3) se réduisent à l'identité à l'extérieur de Q_1 dans Q .

Soit donnée alors une déformation $g_{t,k}$ des $g_{0,k}$, assez petite pour être dans W_g ; on relèvera les $g_{t,k}$ en $f_{t,k}$ ainsi qu'il suit : à l'extérieur de C_0 , $f_{t,k} = f_{0,k}$; dans C_0 , on posera :

$$f_{t,k} = \gamma_1 H_{t,k} H_{0,t}^{-1} f_{0,k} \tag{4}$$

Ceci achève la démonstration du lemme 1.

Si maintenant on factorise l'application i^* : $B \to W_g$ par les jets d'ordre un le long de V , soit : $B \xrightarrow{h} J^1_V(M , X) \to W_g$, on démontrera comme précédemment que l'application h satisfait au relèvement des homotopies pour les cubes (sur l'image de h).

On se propose, rappelons-le, de montrer que l'application :

$$\mathrm{Im}(M , X) \xrightarrow{h} J^1_V(M , X) \to \mathrm{Im}(V , X)$$

satisfait au relèvement des homotopies pour les cubes. On simplifiera beaucoup la démonstration grâce au lemme :

LEMME 2 (Lemme de localisation). - Toute déformation, assez petite, d'une application g : $V \to X$ est une somme (finie si V est compacte) de déformations locales.

Par déformation locale, on entend une déformation qui se réduit à l'identité à l'extérieur d'un (petit) compact K de V . Le lemme résulte du fait suivant : les déformations assez petites d'une application g de V dans X sont, on l'a vu, en correspondance biunivoque ,et bicontinue avec les sections d'un fibré Θ ; si (K_i) désigne un recouvrement de V, une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement permet de considérer toute section de Θ comme somme de sections (s_i) nulles en dehors de K_i ; une telle section s_i définit évidemment une déformation locale de "support" K_i.

Il suffira par suite de considérer le cas, où le cube d'immersions k considéré a pour support un compact K fixe de V ; on peut supposer K assez petit pour que $g(K)$ soit contenu dans une carte donnée de X, pour toute $g \in k$.

7. Normalisation d'une immersion (dans une carte donnée).

Une immersion $f : M \rightarrow X$ sera dite normalisée (au voisinage du compact K de V et pour la carte de X contenant $g(K)$), s'il existe un voisinage tubulaire C de V dans M, tel que les rayons géodésiques de C soient appliqués par f sur les droites (dans la carte de X). La normalisation d'une immersion consiste à remplacer un rayon géodésique d'un voisinage tubulaire C de $i(V)$ dans M plongé dans X par sa tangente à l'origine. Une telle déformation est évidemment possible pour un rayon du tube assez petit, et ceci uniformément pour un compact k d'immersions.

Nous entrons maintenant dans la partie la plus fine de la théorie de Smale, qui consiste à déformer un cube d'immersions en immersions qui soient "en bonne position" par rapport à un voisinage tubulaire T donné de $g(V)$ dans X. Rappelons les données : une immersion g de V dans X, un voisinage tubulaire T de $g(V)$ dans X ; dans la carte de X contenant le compact-image $g(K)$ qui nous intéresse on supposera que le tube T a pour rayon euclidien $2a$; que pour toute $g' \in W_g$, on a $|g - g'(x)| < a/10$; que les homéomorphismes $H_{t,k}$ associés comme dans (3) aux déformations g' de g se réduisent à l'identité à l'extérieur du tube T_1 concentrique à T, de rayon a.

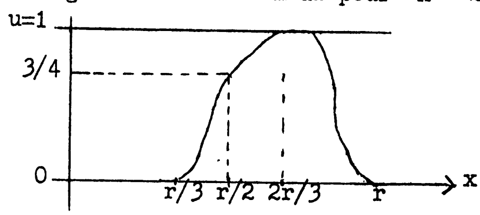
Observons d'abord que si l'on a une courbe $P(s)$ tracée sur V, ou encore sur M normalisée, et si on désigne par ν un vecteur unitaire d'origine P normal à M (donc à V) fonction de P, et si s désigne l'abscisse curviligne de la courbe $P(s)$, le vecteur dérivé $\frac{d\nu}{ds}$ a une composante tangentielle (dans le plan tangent à M) qui est en module inférieure à une borne fixe A, limite supérieure des courbures principales de M en P ; comme ces courbures principales sont fonctions continues des dérivées secondes de l'application g' consiérée, elles différeront d'aussi peu qu'on voudra des courbures correspondantes pour l'immersion g (on utilise ici la C^2-topologie). Et le rayon $2a$ du tube T doit être lui-même tel que $1/2a > A$. Cela étant, sur toute l'image $f'(M)$, on fait choix d'un champ de vecteurs Y, normal à $f'(M)$, et de longueur $2a$. Associons alors à f' toute application de la forme : $f'' = f' + u(P).Y$, où $u(P)$ est une fonction scalaire positive plus petite que un. Je dis que toutes les applications f'' sont encore des immersions : en effet, pour toute courbe $P(s)$ tracée sur $f'(M)$, (d'abscisse curviligne s), on aura :

$$df''/ds = df/ds + u'_s\, Y + u\, dY/ds \quad ;$$

la composante tangentielle de ce vecteur ne peut être nulle, car elle est $\geqslant 1 + u$ $|$ Composante tangentielle de dY/ds $|$; et cette composante est de la forme

$$|Y|.|d\nu/ds| = 2a\ |d\nu/ds| < 2a.A < 1 \ .$$

Le champ Y permet de définir une déformation D_v qui transforme tout cube k d'immersions (normalisées) de $i^{*-1}(W_g)$ en des immersions <u>en bonne position</u> par rapport à T. En effet soit r le rayon euclidien du voisinage C de V dans M qui a été normalisé (pour toute $f' \in k$) ; on peut prendre, si l'on veut, $r < a/10$. On désigne alors par $u(r)$ une fonction C de la variable réelle x, nulle pour $x < r/3$, égale à $3/4$ pour $x = r/2$, atteignant son maximum un pour $x = 2r/3$, nulle pour $x \geqslant r$ (Cf. graphique).



La déformation D_v est alors définie par la formule :

$D_v\, f = f + v.u(r(P)).Y$;

pour $v = 0$, $D_0\, f = f$;

pour $v = 1$, l'application $D_1 f$ est une immersion, ainsi que toutes les $D_v f$, d'après le calcul fait plus haut ; par ailleurs, toutes les $D_1 f$, pour $f \in k$, sont en bonne position par rapport à T ; si on fait, en effet, $x = \frac{r}{2}$, tous les points à la distance $r/2$ de C sont appliqués par $D_1 f$ sur des points situés à une distance normale de $g'(V)$ comprise entre $\frac{3}{4} \times 2a \pm \frac{r}{2} = \frac{3}{2}\, a \pm \frac{r}{2}$ donc à une distance normale de $g(V)$ comprise entre a et $2a$, puisque $r < a/10$, et $|g'(p) - g(p)| < a/10$ pour tout $g' \in W_g$.

Il semblerait résulter des constructions précédentes que l'application i^* ne permet pas le relèvement immédiat des homotopies de cubes d'immersions. En effet, même si l'on a affaire, au début, a des applications normalisées, il est nécessaire, avant de pouvoir appliquer les formules (1) de la bonne position, d'effectuer la déformation D_v dans la fibre, afin de mettre le cube k en "bonne position" (ce qui est possible sans changer sa projection dans l'espace de base W_g) ; cela exigerait un changement de paramétrage de l'homotopie, et on aurait affaire non à une fibration, mais à une quasi-fibration ; en fait, il n'en est rien, et un artifice technique assez simple (mais trop long pour être rapporté ici) permet d'effectuer en quelque sorte simultanément les deux déformations, de sorte que i^* est bien une fibration (au sens de SERRE). Finalement, on a :

THÉORÈME 3. - L'application $i^* : \mathrm{Im}(M , X) \to \mathrm{Im}(V , X)$ induite par un plongement $i : V \to M$ satisfait au relèvement des homotopies pour les cubes. Il en va de même pour l'application $h : \mathrm{Im}(M , X) \to J^1_V(M , X)$ définie en prenant le jet d'ordre un de la restriction à V .

Applications.

DÉFINITION. - Une immersion $g : V \to X$ est dite "à point de base", si elle envoie un point-base $p \in V$ sur un point-base $q \in X$, et si le jet du premier ordre $J^1(g)$ de g est donné au point p .

Soit B^k la boule unité de dimension k ; désignons par $\mathrm{Im}(B^k , X ; p)$ l'espace des immersions de la k-boule B_k avec point-base p . Le point base p peut d'ailleurs être un point du bord S^{k-1} de B^k . On a le

LEMME. - L'espace $\mathrm{Im}(B^k , X ; p)$ est contractile.

DÉMONSTRATION : On normalise l'immersion dans un voisinage de p , puis on rétacte différentiablement B^k sur un voisinage assez petit de p .

Grâce à ce lemme, SMALE détermine les classes d'immersions à un point base de la sphère S^k dans $X = R^m$, $k < m$. Etant données deux immersions f , f_1 dé S^k dans R^m , on peut, après "normalisation" de f et f_1 , supposer que f et f_1 coïncident sur une petite boule de centre p , de rayon r assez petit. Les restrictions de f , f_1 à la boule D complémentaire définissent (en passant au jet d'ordre un) une application de la sphère S^k dans la variété de Stiefel $\mathcal{S}^{m-k}_k$ des k-repères dans R^m . Ainsi se trouve défini un élément différence

$$c(f , f_1) \in \pi_k(\mathcal{S}^{m-k}_k) ,$$

qui ne dépend évidemment que de la classe des immersions f , f_1 . Le résultat final de Smale s'énonce :

THÉORÈME 4. - 1. Pour que deux immersions à point-base f , f_1 de S^k dans R^m

soient régulièrement homotopes (avec point-base), il faut et il suffit que l'élément différence $c(f, f_1) \in \pi_k(\mathfrak{S}^{m-k}_k)$ soit nul.

2. Etant donné un élément $a \in \pi_k(\mathfrak{S}^{m-k}_k)$ et une immersion f (à point-base), il existe une immersion g (à point-base) telle que :

$$c(f, g) = a .$$

On considère l'espace F des immersions de la k-boule B^k dans R^m dont le jet d'ordre un est donné sur la sphère-bord S^{k-1} ; un tel espace est fibre d'une fibration (au sens de SERRE) :

$$\mathrm{Im}(B^k ; R^m ; p) \longrightarrow J^1_{S^k}(\mathrm{Im}(B_k , X)) .$$

On veut connaître, essentiellement, $\pi_0(F)$; ce "groupe" est isomorphe à $\pi_1(J^1_{S^k}(\mathrm{Im}(B_k , R^m) ; p)$, puisque $\mathrm{Im}(B^k ; R^m)$ est contractile. On applique ensuite le même procédé à la sphère bord S^{k-1} ; faisant choix d'un "équateur" S^{k-2} de S^{k-1} , on montre comme précédemment, l'isomorphisme :

$$\pi_1(J^1_{S^{k-1}}(\mathrm{Im}(B_k , R^m ; p) \simeq \pi_2(J^1_{S^{k-2}}(\mathrm{Im}(B_k , R^m ; p))$$

d'où, d'après k isomorphismes de ce type :

$$\pi_0(F) \simeq \pi_i(J^1_{S^{k-i}}(\mathrm{Im}(B^k , R^m ; p) \simeq \pi_k(J^1_{S^0}(\mathrm{Im}(B^k , R^m ; p))$$

(Dans toutes ces formules, J^1 désigne les jets de rang maximum k).

Des deux points dont se compose la sphère S^0 , l'un est le point de base p , où le jet est donné ; à l'autre point, le jet est arbitraire, pourvu qu'il soit de rang k ; il en résulte que ce dernier espace s'identifie à la variété de Stiefel $\mathfrak{S}^{m-k}_k$. Ce qui démontre le théorème 4.

COROLLAIRES. - Classification des immersions de S^k dans R^{k+1} : S^k peut être immergée dans R^{k+1} avec un degré normal arbitraire, si et seulement si S^k est parallélisable.

Deux immersions de S^k dans R^{2k} sont régulièrement homotopes, si et seulement si elles ont le même nombre de self-intersection.

REMARQUE. Dans le cas des immersions de S^2 dans R^3 , $\pi_2(\mathfrak{S}^1_2) = 0$; deux immersions quelconques sont régulièrement homotopes ; le plongement usuel de S^2 dans R^3 , et, par exemple, le plongement antipodique sont donc régulièrement homotopes ; cependant la description effective de cette homotopie régulière pose à