

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-LOUIS KOSZUL

## **Fibrés vectoriels sur les courbes elliptiques**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1958, exp. n° 154, p. 245-254

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1956-1958\\_\\_4\\_\\_245\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__245_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FIBRÉS VECTORIELS SUR LES COURBES ELLIPTIQUES

par Jean-Louis KOSZUL

(d'après M.F. ATIYAH [1], [2])

On désigne par  $X$  une variété algébrique sur un corps algébriquement clos. Un fibré vectoriel  $E$  de base  $X$  est dit décomposable lorsqu'il est de dimension 0 ou somme directe de deux sous-fibrés de dimension  $> 0$ . Tout fibré vectoriel est somme directe d'une famille de sous-fibrés indécomposables. De plus, si  $F$  est un fibré indécomposable de base  $X$  et si dans une décomposition du fibré  $E$  en somme directe d'une famille de sous-fibrés indécomposables il y a  $p$  sous-fibrés isomorphes à  $F$ , alors il en est de même de toute décomposition (théorème du type Krull-Schmidt, cf. [1]). Dans [2], ATIYAH détermine l'ensemble des classes de fibrés indécomposables dont la base est une courbe elliptique non singulière et précise sa structure. Auparavant, seul le cas des courbes de genre 0 était bien connu (cf. [3]).

1. Ensembles  $J(r, d)$ .

On suppose que  $X$  est non singulière. Pour tout fibré vectoriel  $E$  de dimension  $r$ , on désigne par  $\det E$  le fibré vectoriel de dimension 1, puissance extérieure  $r$ -ième de  $E$  (ses fonctions de passage s'obtiennent en prenant le déterminant des fonctions de passage de  $E$ ). Pour toute suite exacte  $0 \rightarrow E \rightarrow E' \rightarrow E'' \rightarrow 0$ , on a  $\det E' \simeq \det E \otimes \det E''$ . Si  $E$  et  $E'$  sont deux fibrés de dimensions  $r$  et  $r'$  respectivement, on a

$$\det(E \otimes E') \simeq (\det E)^{r'} \otimes (\det E')^r$$

les exposants désignant des puissances tensorielles. On appelle degré d'un fibré vectoriel  $E$ , et l'on note  $\deg E$ , le degré du fibré  $\det E$  (c'est le degré du diviseur qui correspond à  $\det E$ ).

On désignera par  $J(r, d)$  l'ensemble des classes de fibrés vectoriels indécomposables de degré  $d$  et de dimension  $r$ . En associant à la classe d'un fibré  $E$  la classe du fibré  $\det E$ , on définit pour tout  $r > 0$  et tout  $d$  une application  $\det : J(r, d) \rightarrow J(1, d)$ .

Le produit tensoriel définit une structure de groupe abélien dans l'ensemble

$G = \bigcup_d J(1, d)$  des classes de fibrés indécomposables de dimension 1. L'inverse de la classe d'un fibré  $L$  de dimension 1 est la classe du fibré dual ; l'unité est la classe du fibré trivial  $I$  de dimension 1. Ce groupe  $G$  opère (par le produit tensoriel) dans l'ensemble des classes de fibrés indécomposables. On a

$$J(1, d) J(r', d') \subset J(r', dr' + d')$$

En particulier,  $J(1, 0)$ , qui est la variété de Picard de  $X$ , opère dans chaque  $J(r, d)$ . Le sous-groupe de stabilité de  $G$  opérant dans  $J(r, d)$  est constitué par des éléments d'ordre  $r$  de  $J(1, 0)$ . En effet, si  $f \in G$  et si  $e \in J(r, d)$ , pour que  $fe = e$ , il est nécessaire que  $\det(fe) = \det(e)$ , donc que

$$f^r \det(e) = \det(e)$$

et par suite  $f^r = 1$ .

Si  $a \in J(1, 1)$ , l'application  $e \rightarrow ae$  est une bijection de  $J(r, d)$  sur  $J(r, d+r)$  quels que soient  $r$  et  $d$ . Cette remarque servira dans la suite à ramener la détermination de  $J(r, d)$  à celle de  $J(r, d')$  où  $d'$  est le reste de la division de  $d$  par  $r$ .

## 2. Clivages.

Dans la suite on considère uniquement des fibrés vectoriels dont la base est une courbe non singulière  $X$  de genre  $g$ .

Toute section méromorphe d'un fibré  $E$  de base  $X$  engendre un sous-fibré de dimension 1. Il existe donc toujours un clivage de  $E$ , c'est-à-dire une suite de sous-fibrés emboîtés  $E = E_r \supset E_{r-1} \dots E_0 = (0)$  telle que  $\dim E_i = i$  (un clivage correspond à une réduction du groupe de structure au groupe triangulaire). En appliquant l'égalité de Riemann-Roch aux quotients  $E_i/E_{i-1}$  d'un clivage on obtient une égalité de Riemann-Roch pour la cohomologie de  $X$  à valeurs dans le faisceau  $\underline{E}$  des germes de sections régulières de  $E$  :

$$\dim H^0(X, \underline{E}) - \dim H^1(X, \underline{E}) = dg E + \dim E(1 - g).$$

On utilisera aussi la dualité de SERRE (cf.[4],) entre les espaces  $H^0(X, \underline{E})$  et  $H^1(X, \underline{E}^* \otimes K)$ , où  $K$  est le fibré canonique de la courbe  $X$ .

## 3. Degrés des sous-fibrés de dimension 1.

Soit  $E_i (i = 0, 1, \dots, r)$  un clivage du fibré vectoriel  $E$  et soit  $L$  un sous-fibré de dimension 1 de  $E$ . Pour un indice  $i$ , il existe un homomorphisme non nul de  $L$  dans  $E_i/E_{i-1}$ , donc  $dg L \leq dg E_i/E_{i-1}$ . Le degré des sous-fibrés

de dimension 1 de  $E$  est donc borné supérieurement.

LEMME 1. - Soient  $E$  un fibré vectoriel et  $L$  un sous-fibré de dimension 1 et de degré maximal dans  $E$ . Tout sous-fibré de dimension 1 de  $E/L$  est de degré au plus égal à  $2g + dg L$ .

Il suffit de démontrer le lemme dans le cas où  $\dim E = 2$ . La suite exacte

$$0 \rightarrow I \rightarrow L^* \otimes E \rightarrow L^* \otimes E/L \rightarrow 0$$

donne

$$g - \dim H^0(X, L^* \otimes E/L) + \dim H^0(X, L^* \otimes E) - 1 \geq 0.$$

D'autre part (égalité de Riemann-Roch pour  $L^* \otimes E/L$ ) :

$$\dim H^0(X, L^* \otimes E/L) - \dim H^1(X, L^* \otimes E/L) = dg E/L - dg L + 1 - g.$$

Par suite,  $\dim H^0(X, L^* \otimes E) \geq 2(1 - g) + dg E/L - dg L$ . Si  $dg E/L - dg L - 2g > 0$ , alors  $\dim H^0(X, L^* \otimes E) \geq 3$ . Puisque  $L^* \otimes E$  est de dimension 2, il existerait donc une section de degré  $> 0$  dans  $L^* \otimes E$ . Soit  $M$  le sous-fibré engendré par cette section ;  $E$  contiendrait un sous-fibré isomorphe à  $L \otimes M$ , donc de degré égal à  $dg L + dg M > dg L$ , contrairement à l'hypothèse.

LEMME 2. - Soient  $E$  un fibré vectoriel et  $L$  un sous-fibré de dimension 1 de  $E$ . Si  $E$  est indécomposable, et si  $E/L \neq (0)$ , il existe dans  $E/L$  un sous-fibré  $L'$  de dimension 1 tel que

$$dg L' \geq dg L - 2(g - 1).$$

Puisque  $E$  est indécomposable, l'extension  $0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow E/L \rightarrow 0$  n'est pas triviale. Or on démontre que, comme dans la théorie homologique des extensions de modules, les classes d'extensions de  $E/L$  par  $L$  sont en correspondance bijective avec les éléments de  $H^1(X, \text{Hom}(E/L, L))$ . Par conséquent,  $H^1(X, \text{Hom}(E/L, L)) \neq (0)$  d'où, par dualité,  $H^0(X, \text{Hom}(L \otimes K^*, E/L)) \neq (0)$ ,  $K$  désignant le fibré canonique de  $X$ . Soit alors  $f$  un homomorphisme non nul de  $L \otimes K^*$  dans  $E/L$ . Son image engendre un sous-fibré  $L'$  de dimension 1 tel que  $dg L' \geq dg(L \otimes K^*) = dg L - 2(g - 1)$ .

THÉORÈME 1 (GROTHENDIECK [3]). - Si  $X$  est une courbe de genre 0, tout fibré vectoriel indécomposable de base  $X$  est de dimension 1.

Résulte immédiatement des lemmes 1 et 2.

Un clivage  $E_i$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ) du fibré vectoriel  $E$  est dit maximal

lorsque, pour tout  $i$ ,  $E_i/E_{i-1}$  est un sous-fibré de degré maximal dans l'ensemble des sous fibrés de dimension 1 de  $E_i/E_{i-1}$ . Tout fibré vectoriel possède évidemment un clivage maximal.

LEMME 3. - Soient  $E$  un fibré vectoriel indécomposable et  $E_i$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ) un clivage maximal de  $E$  : on a pour tout  $i > 0$

$$\text{dg}(E_i/E_{i-1}) \geq \text{dg } E_1 + 2(1 - g)(i - 1) .$$

Ce lemme se démontre par récurrence sur  $i$  en appliquant le raisonnement du lemme 2 aux suites exactes  $0 \rightarrow E_i \rightarrow E \rightarrow E/E_i \rightarrow 0$ .

THÉORÈME 2. - Soit  $E$  un fibré vectoriel indécomposable de dimension  $r$  et de degré  $d$  et soit  $L$  un sous-fibré de dimension 1 de  $E$ . On a :

$$\text{dg } L \leq d/r + (r - 1)(g - 1)$$

Résulte du lemme 3 par sommation.

COROLLAIRE. - Soit  $X$  une courbe elliptique et soit  $E$  un fibré vectoriel indécomposable de base  $X$ , de degré  $d$  et de dimension  $r$  :

- si  $d < r$ , alors les sections de  $E$  engendrent un sous-fibré trivial maximal de dimension égale à  $\dim H^0(X, E)$
- si  $d > 0$ , alors  $\dim H^0(X, E) = d$ .

En effet, si  $d < r$  et si  $g = 1$ , le théorème montre que toutes les sections de  $E$  sont de degré 0. Si  $d > 0$ , alors  $\text{dg } E^* = -d < 0$  donc d'après le théorème,  $E^*$  n'a pas de section  $\neq 0$  et, par dualité, on en déduit que  $H^1(X, E) = (0)$ . L'égalité de Riemann-Roch donne alors  $\dim H^0(X, E) = d$ .

#### 4. Fibrés indécomposables de degré 0 sur une courbe elliptique.

On considère dans la suite des fibrés vectoriels dont la base est une courbe elliptique  $X$ .

LEMME 4. - Soit  $F$  un fibré indécomposable de degré 0 tel que  $H^0(X, F) \neq (0)$  et soit  $F'$  le sous-fibré de  $F$  orthogonal au sous-fibré trivial maximal de  $F^*$ . Si  $\dim F > 1$ , alors

- $F'$  est indécomposable et de degré 0,
- $\dim H^0(X, F) = \dim H^0(X, F')$ .

Posons  $s = \dim H^0(X, F)$ . La dualité et l'égalité de Riemann-Roch donnent :

$\dim H^0(X, \underline{F}^*) = \dim H^1(X, \underline{F}) = s$ . Le fibré  $T = F/F'$  est trivial et de dimension  $s$ , car isomorphe au dual du sous-fibré trivial maximal de  $F^*$ . Par suite  $\text{dg } F' = 0$ . L'homomorphisme  $d : H^0(X, \underline{T}) \rightarrow H^1(X, \underline{F}')$  défini par la suite exacte  $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow T \rightarrow 0$  est surjectif. En effet  $\dim H^1(X, \underline{F}) = s = \dim H^1(X, \underline{T})$ . Il est injectif, car son noyau est l'espace des sections d'un sous-fibré de  $T$  image d'un facteur direct de  $F$  qui ne peut être  $F$  lui même puisque  $\dim F > 1$ . Si  $F'$  se décomposait en  $F' = F'_1 + F'_2$ , l'espace  $H^0(X, \underline{T})$  se décomposerait en  $d^{-1} H^1(X, \underline{F}'_1) + d^{-1} H^1(X, \underline{F}'_2)$  et cette décomposition donnerait une décomposition de  $T$  en  $T = T_1 + T_2$  telle que  $F$  soit somme directe d'une extension de  $T_1$  par  $F'_1$  et d'une extension de  $T_2$  par  $F'_2$ . Puisque  $F$  est indécomposable, ceci démontre la première assertion. La seconde résulte de ce que  $d$  est injectif.

LEMME 5. - Les hypothèses étant celles du lemme 6,  $\dim H^0(X, \underline{F}) = 1$  et  $F$  possède un clivage dont tous les quotients sont triviaux.

Cela résulte facilement du lemme 4 par récurrence sur la dimension.

THÉORÈME 3. - Soit  $E$  un fibré indécomposable, de degré 0 et de dimension  $r$ . Il existe dans  $E$  un sous-fibré et un seul de dimension 1 et de degré 0. L'application qui associe à la classe de  $E$  la classe de son sous-fibré de dimension 1 et de degré 0 est une bijection  $\mathcal{M}_{r,0}$  de  $J(r, 0)$  sur  $J(1, 0)$ .

Démontrons la première assertion :

- Existence. - Soit  $A$  un fibré de degré 1 et de dimension 1. Le fibré  $E \otimes A$  est de degré  $r$  et de dimension  $r = \dim E$ . Du lemme 4 résulte que  $\dim H^0(X, E \otimes A) = r$ . Mais d'après le théorème 2, les sections de  $E$  sont de degré 0 ou 1. Si elles étaient toutes de degré 0, le fibré  $E \otimes A$  serait trivial, ce qui n'est pas puisque son degré est  $r$ . Soit  $M$  le sous-fibré de dimension 1 engendré par une section de degré 1 dans  $E \otimes A$ . Le fibré  $E$  contient un sous-fibré isomorphe à  $A^* \otimes M$  qui est de degré 0.

- Unicité. - Soit  $L$  un sous-fibré de dimension 1 et de degré 0 dans  $E$ . En appliquant le lemme 5 à  $L^* \otimes E$ , on voit que  $E$  possède un clivage dont tous les quotients sont isomorphes à  $L$ . Si  $L'$  est un sous-fibré de dimension 1 et de degré 0 dans  $E$ , il existe donc un homomorphisme non nul de  $L'$  dans  $L$ . Donc  $H^0(X, L'^* \otimes L) \neq 0$  et puisque  $L'^* \otimes L$  est de degré 0, on a  $L' \simeq L$ . Or d'après le lemme 5,  $H^0(X, L^* \otimes E)$  est de dimension 1. Donc  $L' = L$ .

La seconde assertion se démontre par récurrence sur la dimension.

COROLLAIRE. - Si  $F_r$  est un fibré indécomposable de dimension  $r$  et de degré  $0$  tel que  $H^0(X, F_r) \neq (0)$ , alors  $F_r^* \simeq F_r$ .

En effet  $F_r$  possède un clivage dont tous les quotients sont triviaux, (lemme 5), donc  $F_r^*$  contient un sous-fibré trivial de dimension  $1$ , ce qui entraîne  $F_r^* \simeq F_r$  d'après le théorème.

5. Bijections  $M_{r,d} : J(r, d) \rightarrow J(1, 0)$ .

On a vu au n° 1 que la détermination des  $J(r, d)$  se ramenait au cas où  $0 \leq d < r$ . Le cas  $d = 0$  a été traité au n° 4 ; il reste donc le cas  $0 < d < r$ . On dispose alors d'un processus diminuant la dimension qui est donné par le lemme suivant.

LEMME 6. - Soit  $E$  un fibré indécomposable de degré  $d$ , de dimension  $r$  avec  $0 < d < r$  et soit  $T$  le sous-fibré trivial maximal de  $E$ .

- le fibré  $E/T$  est indécomposable,
- l'application  $\lambda_{r,d}$  de  $J(r, d)$  dans  $J(r-d, d)$  qui associe à la classe de  $E$  la classe de  $E/T$  est une bijection.

La démonstration repose sur les mêmes méthodes que celles du théorème 3.

En combinant les bijections  $\lambda_{r,d}$  avec les bijections  $J(r, d) \rightarrow J(r, d+r)$  définies par une classe  $a \in J(1, 1)$  (cf. n° 1), on obtient une bijection de  $J(r, d)$  sur  $J(h, 0)$  où  $h$  est le plus grand commun diviseur  $(r, d)$ . En définitive :

THÉORÈME 4. - Soit une classe  $a \in J(1, 1)$ . Il existe une famille de bijections  $M_{rd} : J(r, d) \rightarrow J(1, 0)$  et une seule telle que

1.  $M_{r,0}$  est l'application du théorème 3,
2.  $M_{r,d}(e) = M_{r,d+nr}(a^n e)$  pour tout  $e \in J(r, d)$  et tout entier  $n$ .
3. si  $0 < d < r$ , alors  $M_{r,d} = M_{r-d,d} \lambda_{r,d}$  (où  $\lambda_{r,d}$  est la bijection définie au lemme 6).

On raisonne par récurrence sur  $r$  en s'appuyant sur le théorème 3 et le lemme 6.

On notera dans la suite  $e_a(r, d)$  la classe appartenant à  $J(r, d)$  telle que  $M_{r,d}(e_a(r, d)) = 1$  (classe du fibré trivial de dimension  $1$ ). On a  $e_a(1, d) = a^d$  et pour tout  $r > 0$ ,  $e_a(r, 0)$  est la classe des fibrés indécomposables de degré  $0$  de dimension  $r$  ayant des sections  $\neq 0$ .

6. Opérations de  $J(1, 0)$  dans  $J(r, d)$ .

THÉORÈME 5. - Le groupe  $J(1, 0)$  opère transitivement dans  $J(r, d)$ , le groupe de stabilité étant constitué par les éléments d'ordre  $\frac{r}{(r, d)}$ .

Pour  $d = 0$ , cela résulte immédiatement du théorème 3. Le cas général exige une étude assez longue du comportement des bijections  $\lambda_{r,d}$  vis-à-vis des opérations de  $J(1, 0)$ . Indiquons seulement comment on procède dans le cas  $(r, d) = 1$ . Dans ce cas, l'application  $\det : J(r, d) \rightarrow J(1, d)$  est bijective. C'est évident pour  $r = 1$  et  $d = 0$ . Le cas général s'en déduit par récurrence sur  $r$  en observant que  $\det(ae) = a^r \det(e)$  et  $\det(\lambda_{r,d} e) = \det(e)$  pour  $e \in J(r, d)$ . Puisque pour  $f \in J(1, 0)$  et  $e \in J(r, d)$  on a  $\det(fe) = f^r \det(e)$ , il en résulte que  $fe = e$  équivaut à  $f^r = 1$ .

7. Structure de l'anneau des classes de fibrés.

Soit  $S$  le  $\mathbb{Z}$ -module libre ayant pour base l'ensemble des classes de fibrés indécomposables dont la base est une courbe elliptique  $X$  sur un corps de caractéristique 0. Les classes de fibrés (décomposables ou non) s'identifient aux combinaisons linéaires à coefficients entiers  $\geq 0$  de la base de  $S$ . Il existe dans le groupe abélien  $S$  une structure d'anneau et une seule telle que la classe du fibré  $E \otimes E'$  soit le produit des classes de  $E$  et de  $E'$ . L'anneau  $S$  est commutatif. On désignera par  $S(r, d)$  le  $\mathbb{Z}$ -sous-module de  $S$  ayant pour base  $J(r, d)$ . On pose  $\bigwedge = \sum_d S(1, d)$ . C'est évidemment un sous-anneau de  $S$  contenant l'unité  $1 = e_a(1, 0)$ . Pour tout entier  $r > 0$ , on notera  $\bigwedge(r)$  l'idéal de  $\bigwedge$  engendré par les éléments de la forme  $e - 1$  où  $e$  parcourt l'ensemble des éléments d'ordre  $r$  dans  $J(1, 0)$ .

(a) L'annulateur de  $e_a(r, d)$  considéré comme élément du  $\bigwedge$ -module  $S$  est  $\bigwedge_{\frac{r}{(r, d)}}$

On désigne par  $B$  la famille des  $e_a(r, d)$  tels que  $0 \leq d < r$ .

(b) Considérez comme  $\bigwedge$ -module,  $S$  est somme directe des sous-modules monogènes engendrés par les éléments de  $B$ .

On pose  $T_0 = \sum_{r,m} S(r, mr)$ .

(c) Considérez comme  $\bigwedge$ -module,  $T_0$  est un module libre admettant pour base les éléments  $f_r = e_a(r, 0)$ . De plus,  $T_0$  est un sous-anneau de  $S$  contenant  $\bigwedge$  et sa table de multiplication en tant qu'algèbre sur  $\bigwedge$  est :



$$f_r f_s = f_{r-s+1} + f_{r-s+3} + \dots + f_{r+s-1} \quad (r \geq s) .$$

Pour tout nombre premier  $p$ , on pose  $T_p = \sum_{k,d} S(p^k, d)$ , la somme étant étendue à tous les entiers  $k \geq 0$  et à tous les entiers  $d$  tels que  $(p, d) = 1$ .

(d) Pour tout premier  $p$ ,  $T_p$  est un sous-anneau de  $S$  contenant  $\wedge$ .

Soit  $\mathcal{T}$  la suite des entiers premiers ou nul. On notera  $T$  le produit tensoriel restreint de la famille des  $\wedge$ -algèbres  $(T_i)_{i \in \mathcal{T}}$ . Les inclusions  $T_i \rightarrow S$  définissent un homomorphisme canonique  $\theta : T \rightarrow S$ .

(e) L'homomorphisme  $\theta$  est bijectif.

L'algèbre  $S$  est donc déterminée par  $\theta$  et par les algèbres  $T_i$ . Pour  $i = 0$ , voir (c). Pour tout entier premier  $p$ ,  $T_p$  est somme directe des  $\wedge$ -sous-modules monogènes engendrés par les éléments  $e_a(p^k, d)$  avec  $(d, p) = 1$  et  $0 \leq d < p^k$  c'est-à-dire les éléments de  $B \cap T_p$ . Comme on connaît les annulateurs dans  $\wedge$  de ces éléments, il suffit de connaître les produits de deux éléments de  $T_p \cap B$ .

(f) Si  $p \neq 2$  et si  $k, k', d, d'$  sont des entiers tels que  $k, k' \geq 0$ ,  $0 \leq d < p^k$ ,  $0 \leq d' < p^{k'}$ ,  $(p, d) = (p, d') = 1$ , alors on a

$$e_a(p^k, d)e_a(p^{k'}, d') = \begin{cases} p^{k'} e_a(p^k, p^{k-k'} d' + d) & \text{si } k > k' \\ p^{s-k} (\sum e_i) e_a(p^k, \frac{d+d'}{p^s}) & \text{si } k = k' \\ & \text{et } p^s = (p^k, d + d') \end{cases}$$

(la somme  $\sum e_i$  étant la somme des éléments d'ordre  $p^k$  de  $J(1, 0)$ ).

La dernière formule a un sens car  $(\sum e_i) e_a(p^k, \frac{d+d'}{p^s})$  est dans  $p^{k-s} S$ . Pour  $p = 2$ , les formules (f) sont probablement encore vraies ; il est démontré qu'elles le sont à conditions d'ajouter aux seconds membres un facteur  $e \in J(1, 0)$ .

Indication sur les démonstrations. - (a) n'est qu'une nouvelle formulation du théorème 4, et (b) est évident.

(c). La première assertion résulte de (b). La caractéristique nulle intervient dans la seconde. Si  $F_r$  et  $F_s$  sont deux fibrés appartenant respectivement aux classes  $f_r$  et  $f_s$ , alors  $F_r \otimes F_s$  possède un clivage dont tous les quotients sont triviaux (cela résulte du lemme 5). Tout sous-fibré de dimension 1 et de degré  $\geq 0$  dans  $F_r \otimes F_s$  est donc trivial. Soit  $E$  un sous-fibré de  $F_r \otimes F_s$ . On a

$dg E \leq 0$ , car si  $dg E > 0$  alors pour tout fibré non trivial  $L$  de dimension 1 et de degré 0 on aurait  $dg(L^* \otimes E) > 0$  ce qui d'après l'égalité de Riemann-Roch entraînerait l'existence d'un homomorphisme non nul de  $L$  dans  $E$  dont l'image serait un sous-fibré non trivial de dimension 1 et de degré  $\geq 0$ . Puisque  $F_r \otimes F_s$  est isomorphe à son dual, tout sous-fibré facteur direct de  $F_r \otimes F_s$  est donc somme directe d'une famille sous-fibrés indécomposables de degré 0. Comme ces sous-fibrés ne contiennent pas de sous-fibré de dimension 1 de degré  $\geq 0$  non trivial,

$$F_r \otimes F_s = \sum_{i=1}^{i=k} F_{r_i} \quad \text{où } F_{r_i} \text{ est de classe } f_{r_i} \text{ pour tout } i. \text{ Par récurrence sur } r,$$

on voit facilement que, si  $r \leq s$ , alors  $H^0(X, F_r \otimes F_s) = r$ . Puisque

$\dim H^0(X, F_{r_i}) = 1$  pour tout  $i$ , on a  $k = \min(r, s)$ . Finalement, on voit que

$$(1) \quad f_r f_s = \sum_{i=1}^{i=\min(r,s)} f_{r_i} \quad rs = \sum_i r_i.$$

D'autre part,  $F_r \otimes F_r \simeq \text{Hom}(F_r, F_r)$  contient un sous-fibré trivial de dimension 1 engendré par la bijection identique de  $F_r$ . Puisque le corps de base est supposé de caractéristique 0, ce sous-fibré est supplémentaire du sous-fibré des éléments de trace nulle dans  $\text{Hom}(F_r, F_r)$ . Ainsi,

$$f_r^2 - 1 \text{ est combinaison linéaire à coefficients } \geq 0 \text{ des } f_i.$$

Un simple calcul permet alors de déduire (c) de cette dernière condition et de (1). La formule donnée par (c) est liée aux formules donnant le produit tensoriel de deux puissances symétriques d'un espace vectoriel de dimension 2. En fait, on en déduit que  $f_r$  est la classe de la  $(r - 1)$ -ième puissance symétrique d'un fibré de classe  $f_2$ .

(d). La démonstration repose sur la formule :

$$(2) \quad e_a(r, d) e_a(r', d') = e_a(rr', rd' + r'd)$$

valable lorsque  $(r, d) = (r', d') = (r, r') = 1$ .

(e). Soit  $B'$  l'ensemble des éléments de  $T$  de la forme

$$f_h \otimes e_a(2^k, d_2) \otimes e_a(3^k, d_3) \dots \otimes e_a(p^k, d_p) \otimes \dots$$

avec  $(d_p, p) = 1$ ,

$0 \leq d_p < p^k$  et  $k = 0$  sauf pour un nombre fini d'entiers premiers  $p$ . On vérifie que  $T$  est somme directe des sous-modules monogènes engendrés par les éléments

de  $B'$ . Puis on vérifie que  $\theta : T \rightarrow S$  induit une bijection de  $B'$  sur  $B$ . Cela utilise (2) et la formule

$$(3) \quad f_h e_a(r, d) = e_a(rh, dh)$$

valable lorsque  $(r, d) = 1$ . On montre alors que l'annulateur dans  $\wedge$  d'un élément de  $B'$  est le même que celui de son image par  $\theta$ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ATIYAH (M.F.). - On the Krull-Schmidt theorem with application to sheaves, Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956, p. 307-317.
- [2] ATIYAH (M.F.). - Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London math. Soc., t. 7, 1957, p. 414-452.
- [3] GROTHENDIECK (A.). - Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann, Amer. J. Math., t. 79, 1957, p. 121-138.
- [4] GROTHENDIECK (A.). - Théorèmes de dualités pour les faisceaux algébriques cohérents, Séminaire Bourbaki, t. 9, 1956/57.