

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JACQUES-LOUIS LIONS

Problèmes aux limites relatifs à des équations de type elliptique

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 110, p. 93-105

http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__93_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROBLÈMES AUX LIMITES RELATIFS À DES ÉQUATIONS DE TYPE ELLIPTIQUE

par Jacques-Louis LIONS

Introduction

Depuis longtemps les problèmes aux limites de type elliptique sont ramenés à des problèmes variationnels (cf. notamment COURANT-HILBERT [1]). Grâce aux distributions [12], on peut ramener tous ces problèmes à des cas particuliers d'un procédé général. Ce procédé est donné au paragraphe 1 dans le cas de problèmes aux limites sur un ouvert Ω quelconque de \mathbb{R}^n . Il n'y a aucune difficulté à appliquer cette méthode pour des systèmes différentiels, et sur des espaces de Riemann. Tout ceci s'étend à certaines variétés fibrées [9].

Le paragraphe 2 se borne aux exemples les plus simples possibles (donc à des opérateurs différentiels du deuxième ordre) ceci dans le but d'éviter des difficultés techniques (qui tiennent surtout au grand nombre d'espaces fonctionnels que l'on utilise).

Le paragraphe 3 indique comment utiliser la théorie de RIESZ-FREDHOLM.

Le paragraphe 4 applique le théorème de HILLE-YOSIDA.

Tout ceci est un résumé de [6], chapitre I.

Le procédé du paragraphe 1 permet d'étudier de larges classes de problèmes mixtes (au sens de H. HADAMARD); cf. [6], chapitre II, et [8]. Ceci n'est pas étudié ici.

1. Problèmes aux limites (théorie générale)

Tous les espaces vectoriels introduits sont topologiques, localement convexes séparés.

On désigne par Ω un ouvert quelconque de \mathbb{R}^n ; $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à supports compacts dans Ω , muni de la topologie habituelle [12]; $\mathcal{D}'(\Omega)$ est le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, espace des distributions sur Ω ; $L^2(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur Ω ; si $f \in L^2(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} .$$

On donne maintenant deux espaces V et Q avec

$$(1) \quad \mathcal{D}(\Omega) \subset V \subset Q \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

($E \subset F$ signifie : E contenu dans F avec une topologie plus fine), et on suppose que V est un espace de Hilbert. On suppose aussi que si $\gamma \in V$ alors $\bar{\gamma}$ est dans V ($\bar{\gamma}$ distribution complexe conjugué de γ). L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense ou non dans V il est dense dans Q . Il en résulte que le dual Q' de Q est un espace de distributions ;

$$(2) \quad \mathcal{D}(\Omega) \subset Q' \subset \mathcal{D}'(\Omega) .$$

Lorsque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans V , on prendra : $V = Q$; il y a un isomorphisme canonique de V sur V' , mais nous n'identifierons pas néanmoins V et V' , sauf dans le cas : $V = L^2(\Omega)$.

1. Forme sesquilinéaire fondamentale.

On donne sur $V \times V$ une forme sesquilinéaire continue (linéaire en u , semi-linéaire en γ) $u, \gamma \rightarrow ((u, \gamma))$.

Si u est donné dans V , la forme semi-linéaire $\varphi \rightarrow ((u, \varphi))$ est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, donc de la forme

$$(3) \quad ((u, \varphi)) = \langle \Lambda u, \bar{\varphi} \rangle, \Lambda u \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad (\text{le crochet désignant la}$$

dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$). Par conséquent la forme $((u, v))$ définit un opérateur Λ , élément de $\mathcal{L}(V; \mathcal{D}'(\Omega))$ (espace des applications linéaires continues de V dans $\mathcal{D}'(\Omega)$). Si $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans V , alors $\Lambda \in \mathcal{L}(V; V')$.

L'opérateur Λ est l'opérateur défini par $((u, v))$; ce sera dans les applications, un opérateur différentiel. Notons déjà que la donnée de $((u, v))$ est davantage que la donnée de Λ .

2. Espace \mathcal{H} .

On désigne par \mathcal{H} l'espace (peut-être réduit à $\{0\}$!) des $u \in V$ tels que $\Lambda u \in Q'$, muni de la topologie la moins fine rendant continues les applications $u \rightarrow u$ et $u \rightarrow \Lambda u$ de \mathcal{H} dans V et Q' .

Evidemment, si $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans V , alors $\mathcal{H} = V$.

3. Espace N .

C'est le sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{H} , ensemble des u tels que

$$(4) \quad \langle \Lambda u, \bar{\varphi} \rangle = ((u, v))$$

pour tout $\varphi \in V$ (le crochet désigne la dualité entre Q' et Q).

$\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans V , $\mathcal{C} = V$ et même $N = V$; en effet (4) a lieu si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, donc pour tout $\varphi \in V$ par prolongement.

On verra sur les exemples que les fonctions de l'espace N sont des fonctions assujetties à certaines conditions aux limites.

4. Hypothèse d'ellipticité.

On décompose $((u, v))$ en sa partie hermitienne et anti-hermitienne :

$$((u, \varphi)) = ((u, \varphi))_1 + i((u, \varphi))_2,$$

avec

$$2((u, \varphi))_1 = ((u, v)) + \overline{((\varphi, u))}$$

et

$$2i((u, \varphi))_2 = ((u, v)) - \overline{((v, u))}.$$

On pose alors la définition fondamentale suivante :

DÉFINITION 1. - La forme $((u, v))$ est elliptique s'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $u \in V$, on ait

$$(5) \quad ((u, u))_1 > a \|u\|_V^2$$

($\|u\|_V$ norme de u dans V).

On va maintenant démontrer le

THÉOREME. - Si la forme $((u, v))$ est elliptique, l'opérateur Λ est un isomorphisme de N sur Q' .

La démonstration est facile : on a fait exactement les hypothèses convenables pour que cela marche. Donnons-la brièvement ; on cherche u dans N solution de

$$(6) \quad \Lambda u = f, \quad f \text{ donné dans } Q'.$$

Ceci équivaut à trouver u dans V solution de

$$(7) \quad ((u, \varphi)) = \langle f, \bar{\varphi} \rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in V.$$

Or, $\varphi \rightarrow \langle f, \bar{\varphi} \rangle$ est une forme semi-linéaire continue sur V ; grâce à

(5), $((u, v))_1$ définit sur V une structure hilbertienne de norme correspondante équivalente à $\|u\|_V$, donc

$$(8) \quad \begin{cases} \langle f, \bar{\psi} \rangle = ((Jf, \psi))_1 \\ Jf \in V, \quad J \in \mathcal{L}(Q'; V) \end{cases} .$$

De même

$$(9) \quad ((u, \psi))_2 = ((Hu, \psi))_1, \quad H \in \mathcal{L}(V; V), \text{ hermitien pour la structure } ((u, \psi))_1 . \text{ Alors (7) \u00e9quivaut \u00e0 :}$$

$$(10) \quad (1 + iH)u = Jf, \text{ qui admet une solution unique}$$

$$(11) \quad u = Gf, \quad G = (1 + iH)^{-1} J$$

et $G \in \mathcal{L}(Q'; N)$, d'o\u00f9 le th\u00e9or\u00e8me.

REMARQUES:

1\u00b0 Si $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans V , alors Λ est un isomorphisme de V sur V' .

2\u00b0 $G \circ \Lambda = 1$ dans $\mathcal{L}(N; N)$, $\Lambda \circ G = 1$ dans $\mathcal{L}(Q'; Q')$,

$G \circ \Lambda$ est un projecteur P de \mathcal{X} sur N ; le noyau de P est l'espace $\Lambda^{-1}(0) \cap \mathcal{X}$.

3\u00b0 L'op\u00e9rateur G est appel\u00e9 l'op\u00e9rateur de Green de la forme $((u, v))$. (On dit aussi : l'op\u00e9rateur de Green de Λ , relativement aux conditions aux limites correspondant \u00e0 N).

4\u00b0 A l'op\u00e9rateur de Green G correspond (th\u00e9or\u00e8me des noyaux de Schwartz) un noyau de Green $G_{x,y}$, distribution sur $\Omega_x \times \Omega_y$. On peut \u00e9crire symboliquement

$$(Gf)_x = \int_{\Omega_y} G_{x,y} f_y dy .$$

Pour l'\u00e9tude de la r\u00e9gularit\u00e9 du noyau, cf. [13], [6].

5. Probl\u00e8mes aux limites.

On appellera probl\u00e8me aux limites le

PROBL\u00c8ME 1. - Trouver U dans \mathcal{X} , solution de

$$(12) \quad \Lambda U = F, \quad F \text{ donn\u00e9 dans } Q',$$

avec les conditions aux limites :

$$(13) \quad h - U \in N, \quad h \text{ \u00e9tant donn\u00e9 dans } \mathcal{X}.$$

Evidemment, sous les hypoth\u00e8ses du th\u00e9or\u00e8me 1, le probl\u00e8me 1 admet une solution unique :

$$(14) \quad U = h - G \Lambda h + GF .$$

Le problème 1 ne change pas si l'on change h modulo N .

2. Exemple.

Le problème pratique est le suivant : on donne Λ (opérateur différentiel) et les conditions aux limites. Par exemple, on donne

$$(1) \quad \Lambda = -\Delta + s, \quad s > 0, \quad \Delta = \text{Laplacien.}$$

(Si $s = 0$, cf. [2] et [5]), et on cherche U solution de (12), paragraphe 1, les conditions aux limites étant :

U est donné sur la frontière Γ de Ω (Dirichlet)

$\frac{\partial u}{\partial n}$ est donné sur la frontière Γ de Ω (Neumann), etc.

Il s'agit de choisir convenablement V et $((u, \gamma))$ de sorte que $u \in N$ exprime, dans un sens raisonnable, que u est nul sur Γ (Dirichlet) ou que

$\frac{\partial u}{\partial n}$ est nul sur Γ (Neumann) etc.

Voici comment l'on procède avec l'opérateur (1).

Si φ et $\Psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$(2) \quad (\Lambda \varphi, \Psi) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} + s(\varphi, \Psi)_{L^2(\Omega)}$$

ce qui conduit à introduire l'espace suivant :

1. Espace $\mathcal{C}_{L^2}^1(\Omega)$.

C'est l'espace des $u \in L^2(\Omega)$ tels que $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ (pris, bien entendu, au sens distributions !) soit dans $L^2(\Omega)$ pour tout i . On pose, pour $u, v \in \mathcal{C}_{L^2}^1(\Omega)$:

$$(3) \quad \begin{cases} (u, v)_1 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} \\ |||u|||_1^2 = \|u\|_1^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{cases}$$

Pour la norme $|||u|||_1$, l'espace $\mathcal{C}_{L^2}^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Il faut maintenant étudier l'espace $\mathcal{C}_{L^2}^1(\Omega)$; la première question est de savoir si $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense ou non dans $\mathcal{C}_{L^2}^1(\Omega)$. Le résultat est [2] : la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{D}(\Omega)$ ne soit pas dense dans $\mathcal{C}_{L^2}^1(\Omega)$ est que $\int_{\Omega} \neq 0$ ne soit pas de capacité nulle, ce que l'on supposera. On introduit alors

l'adhérence $\mathcal{O}_{L^2}^1(\Omega)$ de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_{L^2}^1(\Omega)$; les fonctions de $\mathcal{O}_{L^2}^1(\Omega)$ sont "nulles" à la frontière, et ceci les caractérise (pour l'énoncé précis, cf. [2]).

2. Espace V .

On prend pour V un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}_{L^2}^1(\Omega)$, contenant $\mathcal{O}_{L^2}^1(\Omega)$:

$$\mathcal{O}_{L^2}^1(\Omega) \subset V \subset \mathcal{C}_{L^2}^1(\Omega) .$$

3. Espace Q .

On prend $Q = V$ si $V = \mathcal{O}_{L^2}^1(\Omega)$; sinon $Q = L^2(\Omega)$.

Reste maintenant à choisir la forme sesquilinéaire $((u, v))$. On va voir que ce choix est possible d'une infinité de manières, chaque choix conduisant à de nouveaux problèmes aux limites.

4. Première forme sesquilinéaire.

$$(4) \quad ((u, v)) = (u, v)_1 + s(u, v)_{L^2(\Omega)} .$$

Cette forme définit bien $\Lambda = -\Delta + s$, et elle est hermitienne :

$$((u, v)) = ((u, v))_1 . \text{ Enfin elle est elliptique, quel que soit } V .$$

L'espace N est l'espace des $u \in V$ tels que

$$(5) \quad (-\Delta u, \varphi)_{L^2} = (u, v)_1 \text{ pour tout } v \in V .$$

Le théorème 1 s'applique : on a donc déjà résolu autant de problèmes aux limites qu'il y a d'espaces V .

EXEMPLE 1. - Problème de Dirichlet.

$V = \mathcal{O}_{L^2}^1(\Omega)$; $-\Delta + s$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{L^2}^1(\Omega)$ sur $\mathcal{O}_{L^2}^1(\Omega)$ (cf. [3] et [8]). Dans le problème 1, paragraphe 1, la condition (13) signifie que U prend des valeurs données sur Γ (égales à h).

EXEMPLE 2. - Problème de Neumann.

On prend $V = \mathcal{C}_{L^2}^1(\Omega)$.

La condition (5) signifie, formellement, que $\int \frac{\partial u}{\partial n} \bar{\varphi} \, ds = 0$ donc que $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur Γ (pour des précisions, cf. [7]).

Dans le problème 1, paragraphe 1, la condition (13) signifie que $\frac{\partial u}{\partial n}$ prend sur Γ des valeurs données (égales à $\frac{\partial h}{\partial n}$).

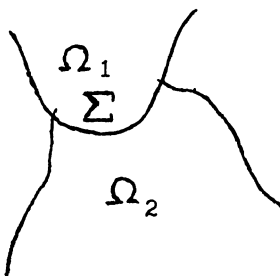
EXEMPLE 3. - Problème mélangé.

Il faut utiliser le résultat suivant ; soit Σ une portion de Γ , qui est une variété une fois continûment différentiable par morceaux de dimension $n - 1$, bornée. Alors on peut prolonger les fonctions de $\mathcal{C}_{L^2}^1(\Omega)$ sur Σ . De façon précise : il existe une application linéaire continue et une seule, $u \rightarrow \sigma u$, de $\mathcal{C}_{L^2}^1(\Omega)$ dans $L^2(\Sigma)$ (espace des fonctions de carré sommable sur Σ pour la mesure superficielle), telle que σu coïncide presque partout avec les valeurs de u sur Σ lorsque u est continue dans $\Omega \cup \Sigma$.

Cette propriété permet de définir aisément des espaces V importants. Prenons : $V = V_\Sigma$ espace des u tels que $\sigma u = 0$. Alors $u \in N$ signifie que $\sigma u = 0$ (u "nulle" sur Σ) et que sur $\Gamma - \Sigma$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ est nul. Le problème 1, paragraphe 1, correspondant, est un problème mélangé : on donne U sur Σ , $\frac{\partial u}{\partial n}$ sur $\Gamma - \Sigma$.

EXEMPLE 4. - Problème de transmission.

On suppose Ω non connexe, par exemple (cf. figure) $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Gamma_1 =$ frontière de Ω_1 , Γ_2 et Γ_2 ayant en commun une portion Σ "régulière" de sorte que l'on puisse définir :



$$\sigma_1(u_1) \in L^2(\Sigma), \quad i = 1, 2, \quad u_1 \in \mathcal{C}_{L^2}^1(\Omega_1)$$

Toute fonction u de $\mathcal{C}_{L^2}^1(\Omega)$ s'identifie à un couple (u_1, u_2) , $u_1 \in \mathcal{C}_{L^2}^1(\Omega_1)$.

On prend pour V l'espace des u telles que $\sigma_1 u_1 = \alpha \sigma_2 u_2$, $\alpha = \text{Cte}$ (pour simplifier). Alors $u \in N$ signifie :

$$(6) \quad \sigma_1 u_1 = \alpha \sigma_2 u_2,$$

puis

$$(-\Delta u_1, v_1)_{L^2(\Omega_1)} + (-\Delta u_2, v_2)_{L^2(\Omega_2)} = (u_1, v_1)_1 + (u_2, v_2)_1$$

i.e.

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 - \Sigma, & \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 - \Sigma, \\ \alpha \frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 \text{ sur } \Sigma \end{cases}$$

Le problème 1 , paragraphe 1 , correspondant, est un problème de transmission.

5. Deuxième forme sesquilinéaire.

Voici maintenant une deuxième forme sesquilinéaire.

On se place dans les hypothèses de l'exemple 3 ci-dessus, et l'on prend :

$$(8) \quad ((u, v)) = (u, v)_1 + s(u, v)_{L^2(\Omega)} + k(\sigma u, \sigma v)_{L^2(\Sigma)}$$

k constante > 0 (condition non nécessaire).

La forme (8) définit encore $\Lambda = -\Delta + s$. Elle est évidemment elliptique quel que soit V . L'espace N est cette fois défini par :

$$(9) \quad (-\Delta u, \mathcal{V})_{L^2} = (u, \mathcal{V})_1 + k(\sigma u, \sigma \mathcal{V})_{L^2(\Sigma)} \quad \text{pour tout } \mathcal{V} \in V.$$

A chaque espace V va correspondre un nouveau problème aux limites (du moins si $u \in V$ n'entraîne pas $\sigma u = 0!$)

Donnons un seul exemple :

EXEMPLE 5. - On prend $V = \mathcal{C}_L^1(\Omega)$. Alors $u \in N$ signifie

$$(10) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma - \Sigma, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = ku \quad \text{sur } \Sigma.$$

6. Troisième forme sesquilinéaire.

Vu sa grande importance pratique voici une 3e forme sesquilinéaire.

On considère $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ comme dans l'exemple 4 , et l'on prend

$$(11) \quad ((u, \mathcal{V})) = \varepsilon_1[(u_1, \mathcal{V}_1)_1 + s(u_1, v_1)_{L^2}] + \varepsilon_2[(u_2, v_2)_1 + s(u_2, \mathcal{V}_2)_{L^2}]$$

$\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, s > 0$.

(ε_1 constante physique dépendant de la nature de Ω_1). On a là une forme sesquilinéaire elliptique, quel que soit $V \in \mathcal{C}_L^1(\Omega)$.

On prend par exemple pour espace V , l'espace des $u = (u_1, u_2)$ tels que

$$(12) \quad \sigma_1 u_1 = \sigma_2 u_2.$$

Alors, $u \in N$ signifie

$$\varepsilon_1(u_1, \gamma_1)_1 + \varepsilon_2(u_2, \gamma_2)_1 = - \varepsilon_1(\Delta u_1, \gamma_1)_{L^2} - \varepsilon_2(\Delta u_2, \gamma_2)_{L^2}$$

pour tout $v = (v_1, v_2) \in V$, donc

$$(13) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 - \Sigma, \\ \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 & \text{sur } \Gamma_2 - \Sigma. \end{cases}$$

Le problème aux limites correspondant (avec $h = 0$) est : trouver (u_1, u_2) avec

$$(14) \quad \begin{aligned} -\Delta u_1 + s u_1 &= f_1 & \text{dans } \Omega_1, & \quad f_1 \in L^2(\Omega_1) \\ -\Delta u_2 + s u_2 &= f_2 & \text{dans } \Omega_2, & \quad f_2 \in L^2(\Omega_2) \end{aligned}$$

et les conditions aux limites (12), (13). C'est un problème aux limites du type Poisson (à vrai dire, le cas essentiel correspond à $s = 0$, ce qui entraîne quelques complications : il est nécessaire d'introduire des classes spéciales d'ouverts, les ouverts de Soboleff, cf. [5]).

REMARQUES :

1° Lorsque la frontière de Ω est une variété suffisamment dérivable de dimension $(n - 1)$, on peut, à l'aide d'une étude plus précise de l'espace $\mathcal{C}_{L^2}^1(\Omega)$, étudier les problèmes de dérivée oblique (généralisation de la théorie de BOULIGAND-GIRAUD) [7].

2° Il est évident que l'on peut remplacer $-\Delta$ par $D = -\sum \frac{\partial}{\partial x_i} (g_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j})$, $g_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, avec

$$\sum_{i,j=1}^n (g_{ij}(x) + \overline{g_{ji}(x)}) \zeta_j \bar{\zeta}_i \geq a(|\zeta_1|^2 + \dots + |\zeta_n|^2), \quad a > 0,$$

presque partout dans Ω , pour tout système de n nombres complexes $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$. Les espaces V sont les mêmes ; la forme $((u, v))$ sera, par exemple :

$$((u, v)) = \sum \int g_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx + s(u, v)_{L^2(\Omega)}.$$

3. Utilisation de la théorie de Riesz-Fredholm

Hypothèses. - On se place sous les hypothèses du paragraphe 1, avec en outre :

(1) $Q = L^2(\Omega)$

(2) L'injection de V dans $L^2(\Omega)$ est complètement continue.

Cherchons $u \in N$, solution de

(3) $\mathcal{A}u + \lambda u = f$, f donné dans L^2 , $\lambda \in G$.

Ceci équivaut à

(4) $u + \lambda Gu = Gf$, $G \in \mathcal{L}(L^2; N)$

et dans le premier membre il suffit de considérer la restriction G_1 de G à V ; de façon précise, si $G_1 \in \mathcal{L}(V; V)$, (4) équivaut à la résolution dans V de

(5) $(1 + \lambda G_1)u = Gf$.

Or G_1 est complètement continue, grâce à (2). Ceci permet d'utiliser la théorie de Riesz-Fredholm. Signalons notamment la conséquence suivante :

THÉOREME. - La forme $((u, v))$ est supposée elliptique hermitienne (i.e. $((u, v)) = ((v, u))$), avec (1) et (2). Alors $\mathcal{A} - \lambda$ est un isomorphisme de N sur $L^2(\Omega)$ sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de λ (le spectre du problème) :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Soit u_k les fonctions propres correspondantes ($\mathcal{A}u_k = \lambda_k u_k$), avec $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$

Le système u_k (resp. $\frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k}}$; resp. $\frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k + \lambda_k^2}}$) est un système orthonormal

complet dans $L^2(\Omega)$ (resp. V ; resp. N).

L'application pratique du théorème dépend de la vérification de (2). La plupart (mais non tous) des résultats de complète continuité se ramènent aux deux propriétés suivantes :

(A) Si Ω est un ouvert borné de R^n , l'injection de $\mathcal{O}_{L^2}^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est complètement continue (GÄRDING).

(B) Si Ω est un ouvert borné de frontière assez régulière (pour un énoncé précis, cf. [2]), l'injection de $\mathcal{C}_{L^2}^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est complètement continue.

(RELLICH, KONDRACHOFF, etc. pour l'essentiel).

Les applications aux exemples du paragraphe 2 sont immédiates.

4. Application du théorème de Hille-Yosida.

On suppose encore que $Q = L^2(\Omega)$ et on suppose que $\mathcal{O}(\Omega) \subset N$ (ce qui est toujours vérifié dans la pratique).

On désigne par \mathcal{A} l'opérateur Λ considéré comme opérateur non continu de N (muni de la topologie induite par $L^2(\Omega)$) dans $L^2(\Omega)$. Alors :

THÉOREME. - La forme $((u, v))$ étant elliptique, l'opérateur $-\mathcal{A}$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe, représentation continue $t \rightarrow U(t)$ de \mathcal{B}^+ dans $\mathcal{L}_s(L^2; L^2)$, $U(t) \rightarrow 1$, si $t \rightarrow 0$.

DÉMONSTRATION. - Grâce au théorème de Hille-Yosida (pour ce théorème, cf. [4]), le théorème résulte de la vérification des deux points suivants :

1° $-\mathcal{A}$ a un "domaine" de définition dense dans $L^2(\Omega)$, et $-\mathcal{A}$ est fermé (immédiat)

2° $\lambda + \mathcal{A}$ est inversible pour $\mathcal{R}\lambda > 0$, l'inverse vérifiant

$$\|(\lambda + \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2; L^2)} \leq \frac{1}{\mathcal{R}\lambda} .$$

Vérifions ce point. On est ramené à résoudre dans N :

$$(1) \quad (\Lambda + \lambda)u = f, \quad f \in L^2 .$$

Ceci admet une solution unique pour $\mathcal{R}\lambda > 0$. Majorons $\|u\|_{L^2}$. On déduit de (1) : $((u, u)) + \lambda \|u\|_{L^2}^2 = (f, u)_{L^2}$; prenant les parties réelles des deux membres et utilisant d'ellipticité, on a

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{\mathcal{R}\lambda} \|f\|_{L^2}, \text{ d'où le théorème.}$$

REMARQUE. - En fait l'hypothèse d'ellipticité est trop forte. Il suffit de supposer qu'il existe $\omega > 0$ tel que

$$((u, u))_1 + \omega \|u\|_{L^2}^2 \geq a \|u\|_V^2, \quad a > 0, \text{ pour tout } u \in V .$$

Application du théorème.

Il existe une fonction $t \rightarrow u(t)$ et une seule, continûment dérivable de $t > 0$ à valeurs dans $L^2(\Omega)$, continue de $t \geq 0$ à valeurs dans N , solution de

$$(2) \quad \begin{cases} \Lambda u(t) + \frac{d}{dt} u(t) = 0, & t > 0 \\ u(t) \rightarrow f \text{ dans } N \text{ lorsque } t \rightarrow 0 & (f \in N) . \end{cases}$$

Cette solution est donnée par :

$$u(t) = U(t).f .$$

Le problème (2) est un problème mixte (au sens de M. HADAMARD).

ADDITIF

Le théorème du paragraphe 1 , n° 4 , résout des problèmes aux limites faibles : les solutions obtenues ne sont généralement pas continues, et les conditions aux limites sont prises dans un sens généralisé. Si l'on est dans un ouvert Ω de frontière régulière, et si la fonction f donnée dans Q' est elle aussi régulière dans Ω et sa frontière, alors on peut espérer démontrer que la solution de l'équation (6) : $\Delta u = f$, est une solution usuelle. Ceci a été démontré par L. NIRENBERG [11] pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann, ordre quelconque. Pour d'autres conditions aux limites, la méthode de Nirenberg doit être modifiée suivant une idée de ARONSZAJN-SMITH (à paraître) ; des simplifications et compléments sont donnés dans [8]. La question de la régularité au bord n'est pas définitivement réglée pour les problèmes mêlés, même pour l'ordre 2 (cf. sur ce point les travaux de l'école italienne (détails et bibliographie dans le livre de C. MIRANDA [10])).

Dernière minute : pour l'ordre 2, des résultats importants ont été obtenus par G. STAMPACCHIA.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] COURANT (R.) und HILBERT (D.). - Methoden der mathematischen Physik, Zweiter Band. - Berlin, Springer, 1937 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 48).
- [2] DENY (J.) et LIONS (J.-L.). - Les espaces du type de Beppo Levi, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 5, 1953-54, p. 305-370.
- [3] GÄRDING (Lars). - Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, Math. Scand., t. 1, 1953, p. 55-72.
- [4] LATTES (Robert). - Application de la théorie des semi-groupes à l'intégration d'équations aux dérivées partielles, Séminaire Bourbaki, t. 5, 1952/53.
- [5] LIONS (Jacques-Louis). - Problèmes aux limites, II., C.R. Acad. Sc. Paris, t. 236, 1953, p. 2470-2472.
- [6] LIONS (Jacques-Louis). - Problèmes aux limites en théorie des distributions, Acta Math., t. 94, 1955, p. 13-153.
- [7] LIONS (Jacques-Louis). - Sur les problèmes de dérivée oblique, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 240, 1955, p. 266-268 ; Sur les problèmes aux limites du type dérivée oblique, Annals of Math., t. 64, 1956, p. 207-239.
- [8] LIONS (Jacques-Louis). - Cours professé au Tata Institute en 1957. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research.
- [9] LIONS (J.-L.) et SCHWARTZ (L.). - Problèmes aux limites sur des espaces fibrés, Acta Math., t. 94, 1955, p. 155-159.
- [10] MIRANDA (Carlo). - Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, - Berlin, Springer, 1955 (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, Heft 2).
- [11] NIRENBERG (Louis). - Remarks strongly elliptic partial differential equations, Comm. pure and applied Math., t. 8, 1955, p. 649-675.
- [12] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, T. 1 et 2. - Hermann, Paris, 1950-1951 (Act. scient. et ind. 1091-1122, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 9-10).
- [13] SCHWARTZ (Laurent). - Les travaux de Garding sur les équations aux dérivées partielles elliptiques, Séminaire Bourbaki, t. 4, 1951/52.

[Mai 1959]