

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MARCEL BERGER

## Groupes d'holonomie des variétés à connexion affine

*Séminaire N. Bourbaki*, 1956, exp. n° 101, p. 7-12

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1954-1956\\_\\_3\\_\\_7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__7_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GROUPES D'HOLONOMIE DES VARIÉTÉS À CONNEXION AFFINE,

par Marcel BERGER.

1. Connexions.

$B$  est un espace fibré principal différentiable de base  $V$  ( $V_m$ , de dimension  $m$ ), de groupe structural de Lie connexe  $G$ , de projection  $p$ . L'application  $g \rightarrow b.g$  de  $G$  sur la fibre contenant  $b \in B$  définit un isomorphisme de l'algèbre de Lie  $\Gamma$  de  $G$  sur un sous-espace  $V(b)$  de l'espace  $T(b)$  tangent à  $B$  en  $b$ . Une connexion sur  $V$ , de groupe  $G$ , est la donnée en tout point  $b \in B$  d'un projecteur  $h(b)$  parallèle à  $V(b)$  qui :

- 1°) dépend différentiablement de  $b$  ;
- 2°) est invariant par  $G$ , i.e.  $h(b.g) = h(b).g$ .

Le projecteur détermine en  $b$  un sous-espace  $H(b)$  de  $T(b)$  : les éléments de  $H(b)$  seront dits horizontaux. Une connexion est équivalente à la donnée d'une 1-forme différentielle  $\omega$  sur  $B$ , à valeurs dans  $\Gamma$ , qui est telle que :

- 1°)  $\omega$  est l'identité sur  $V(b)$  ;
- 2°)  $\omega$  vérifie  $\omega(b.g) = \text{ad}(g^{-1}) \omega(b)$ .

On associe canoniquement à  $\omega$  une 2-forme de courbure  $\bar{\omega}$  sur  $B$ , à valeurs dans  $\Gamma$ , définie par  $\bar{\omega}(s,t) = d\omega(h(s),h(t))$ .

Une connexion permet de définir la dérivée covariante  $\nabla T$  d'un tenseur quelconque  $T$  défini sur  $V$ .

Dans le cas où le fibré est celui des repères tangents à la variété  $V_m$ , le groupe structural étant alors  $GL(m,R)$ , la connexion est dite affine ; en réalisant  $\Gamma$  par des  $m \times m$  matrices,  $\omega$  est définie par des  $T_{i k}^j$  et  $\bar{\omega}$  par le tenseur de courbure  $R : R_{i, st}^j$ . Si  $T_{i k}^j = T_{k i}^j$ , la connexion est dite sans torsion.  $R$  et  $\nabla R$  satisfont alors aux relations :

- (1)  $R_{i, st}^j + R_{s, ti}^j + R_{t, is}^j = 0$
- (2)  $\nabla_u R_{i, st}^j + \nabla_s R_{i, tu}^j + \nabla_t R_{i, us}^j = 0$

2. Groupes d'holonomie d'une connexion.

Soit  $\Omega_x$  (resp.  $\Omega_x^0$ ) l'espace des lacets (resp. homotopes à l'identité) de  $V$ , d'origine  $x$ , différentiables par morceaux. Supposons  $V$  munie d'une connexion de groupe  $G$  : tout élément  $\lambda \in \Omega_x$  peut être remonté en un chemin horizontal  $\mu$  de  $B$ , d'origine  $z$  et d'extrémité  $z.g$ , tel que  $p.\mu = \lambda$ . L'élément  $g$  ne dépend pas de  $z$ , d'où une application  $f : \Omega_x \rightarrow G$ ;  $g$  n'est autre que le transport parallèle le long de  $\lambda$ .

DÉFINITION. - On appelle groupe d'holonomie homogène (resp. restreint) et on note  $\Psi_x$  (resp.  $\sigma_x$ ) l'image  $f(\Omega_x)$  (resp.  $f(\Omega_x^0)$ ).

Un chemin différentiable par morceaux joignant  $x$  et  $y$  définit un isomorphisme entre  $\Psi_x$  et  $\Psi_y$  (resp.  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ ); on écrira, par abus de langage :  $\Psi$ ,  $\sigma$ . Le groupe  $\sigma$  est un groupe de Lie, car c'est un sous-groupe connexe par arcs de  $G$  de Lie. Par passage aux quotients, on déduit de  $f$  une application  $\bar{f} : \pi_1(V) \rightarrow \Psi/\sigma$ .

PROPOSITION 1 (Ambrose-Singer-Lichnerowicz). -  $\sigma$  est la composante connexe de l'élément neutre dans  $\Psi$ .

DÉMONSTRATION. - Soit  $\bar{\sigma}$  la composante connexe de l'élément neutre dans  $\Psi$ . Puisque  $\pi_1(V)$  est dénombrable,  $\bar{f}$  entraîne que  $\bar{\sigma}/\sigma$  est dénombrable.  $\sigma$  est ouvert, sinon il serait de mesure nulle pour la mesure de Haar sur  $\bar{\sigma}$ . Il est donc fermé, et  $\sigma = \bar{\sigma}$ . C.Q.F.D.

Soit  $b_0$  donné  $\in B$ . On notera  $\bar{B}$  le sous-ensemble de  $B$  formé des  $b$  qui peuvent être joints à  $b_0$  par un chemin horizontal différentiable par morceaux;  $\bar{B}$  est fibré principal de base  $V$ , de groupe  $\Psi$ . Dans toute la suite nous ne considérerons que des tenseurs sur  $\bar{B}$ . Dans ces conditions :

PROPOSITION 2 (Nijenhuis). - Quels que soient  $s, t, u : R_i^j, st$  et  $\nabla_u R_i^j, st$  appartiennent pour les indices  $i$  et  $j$  à l'algèbre de Lie  $\sum$  de  $\sigma$ .

Bien que la proposition 2 soit suffisante pour la suite, signalons que, plus précisément :

PROPOSITION 3 (Ambrose-Singer). -  $\sum$  est engendré par les  $\bar{\omega}_b(s, t)$  quand  $s$  et  $t$  parcourent  $T(b)$  et  $b$  parcourt  $\bar{B}$ .

3.  $\sigma$  des variétés à connexion affine sans torsion.

Dans toute la suite  $V$  sera munie d'une connexion affine sans torsion et sera irréductible.

THÉOREME 1. -  $\sigma$  n'est pas quelconque.

$\sigma$  doit prendre place dans une liste (liste I) assez longue, analogue à celle des espaces riemanniens symétriques.

PRINCIPE DE LA DÉMONSTRATION. - Elle repose sur les faits suivants :

- $R$  vérifie la proposition 2.
- $R$  satisfait la condition (1).
- $\sum$ , algèbre de Lie d'un groupe de Lie irréductible, n'est pas quelconque.

Il faut examiner toutes les formes possibles pour  $\sum$ , à l'aide des résultats d'Elie CARTAN sur les groupes de Lie linéaires irréductibles. On constate alors que (1) entraîne  $R = 0$  "presque toujours".

EXEMPLE. -  $\sigma$  est la représentation tensorielle du produit direct d'au moins trois groupes  $\sigma_i \subset GL(n_i, R)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Alors :

$$(3) \quad \sum_{aim}^{bjn} = \sum_1^b \frac{b}{a} \delta_i^j \delta_m^n + \delta_a^b \sum_2^j \delta_i^m + \delta_a^b \delta_i^j \sum_3^m$$

où  $a, b, c, d = 1, \dots, n_1$  (resp.  $i, j, k, h = 1, \dots, n_2$  et  $m, n, p, q = 1, \dots, n_3$ ) et  $\delta$  a la signification classique. La proposition 1 et la formule (3) montrent qu'une composante non nulle de  $R$  est de la forme  $\bar{R} = R_{aim, ckp, dhq}^{bim}$  (et les autres composantes analogues). Supposons  $a \neq b$ .  $\bar{R}$  est alors indépendant de  $i$  et  $m$ ; si  $n_2$  et  $n_3$  sont  $\geq 3$ , on peut choisir  $i \neq k$ ,  $h$  et  $m \neq p, q$ . Les relations (3) et (1) entraînent que  $\bar{R} = 0$ . On montre que  $\bar{R}$  est encore nul quand  $a = b$ .

4.  $\sigma$  des espaces affines symétriques.

Prenons maintenant les  $\sigma$  de la liste I et les  $\sum$  correspondantes. On ne peut plus montrer que  $R = 0$ , mais en utilisant  $\nabla R$ , la proposition 2 et la relation (2), on peut montrer que "presque toujours"  $\nabla R = 0$ .

EXEMPLE. -  $\sigma$  est la représentation tensorielle du produit direct d'au moins deux groupes  $\sigma_i \subset SO(n_i, R)$  ( $i = 1, 2$ ). Avec les mêmes notations qu'au n° 3, on a pour  $\sum$  :

$$(4) \quad \sum a_i^{bj} = \sum_1^b a_i^j + \delta_a^b \sum_2^j a_i^j .$$

Une composante non nulle de  $R$  est de la forme  $\bar{R} = R_{ai,ck,dh}^{bi}$  et est indépendante de  $i$ . Mais de  $\sum_1^b a_i^b = -\sum_1^a a_i^b$ , on déduit de (4) et (1) que si  $n_2 \gg 3$ ,  $\bar{R}$  ne peut être que du type  $R_{ai,aj,bj}^{bi}$  qui est indépendant de  $i$  et  $j$ .

Alors on déduit de (2) que  $\nabla_{ck} R_{ai,aj,bj}^{bi} = 0$ , car il suffit de choisir  $j \neq k$ .

Les variétés pour lesquelles  $\nabla R = 0$  et  $T = 0$  ont une structure géométrique particulière : NOMIZU a montré en effet (Séminaire BOURBAKI : Mai 1954) qu'une telle variété est localement isomorphe à un espace homogène symétrique. Les  $\sigma$  restants forment une liste II, réduite à une vingtaine d'éléments : ce sont ceux qui peuvent être groupes d'holonomie homogène restreint d'une variété à connexion affine sans torsion pour laquelle  $\nabla R \neq 0$ .

### 5. $\sigma$ des variétés riemanniennes.

Désormais  $V$  sera une variété riemannienne, c'est-à-dire munie d'une métrique définie positive et de la connexion affine sans torsion canonique. Dans ce cas,  $\sigma$  irréductible n'est pas une restriction. On a en effet :

PROPOSITION 4 (Lichnerowicz-de Rham). - Si  $\sigma$  est réductible et  $V$  complète,  $\sigma$  est un produit direct de  $\sigma_i$  irréductibles de variétés riemanniennes  $V_i$ .

D'après de RHAM, le revêtement universel  $\tilde{V}$  de  $V$  est un produit riemannien  $\prod_i V_i$ , d'où  $\psi = \prod_i \psi_i$ . On en déduit le théorème en remarquant que  $\sigma$  est le  $\psi$  de  $\tilde{V}$ .

Pour obtenir les  $\sigma$  possibles pour une variété riemannienne, il suffit de prendre dans les listes I et II les groupes qui sont orthogonaux. La liste I redonne les espaces riemanniens symétriques déterminés par Elie CARTAN. La liste II montre que :

THÉOREME 2. - Pour une variété riemannienne  $V_m$  telle que  $\nabla R \neq 0$ ,  $\sigma$  irréductible ne peut être que :  $SO(m)$  ;  $U(n)$  ou  $SU(n)$  si  $m = 2n$  ;  $Sp(1) \times Sp(n)$  ou  $Sp(n)$  si  $m = 4n$ . Il y a trois exceptions :  $G_2$  pour  $V_7$ ,  $Spin(7)$  pour  $V_8$ ,  $Spin(9)$  pour  $V_{16}$ .

Les variétés pour lesquelles  $\sigma$  est  $U(n)$  ou  $SU(n)$  sont les suivantes :  $\sigma \subset U(n)$  si  $V_{2n}$  est pseudo-kählérienne. Il est équivalent de dire qu'il existe

sur  $V_{2n}$  une forme 2-forme échangeable avec la métrique, de rang maximum et à dérivée covariante nulle, soit  $\varphi$  telle que  $\nabla\varphi = 0$ .  $\sigma = \text{SU}(n)$  s'il existe en plus sur la variété précédente une forme  $\theta$  de type  $(n,0)$  telle que  $\nabla\theta = 0$ . Ceci est équivalent à la nullité de la courbure de Ricci de  $V_{2n}$ . La première classe de Chern est alors nulle.

REMARQUE. - Les groupes obtenus, exceptions comprises, sont transitifs sur la sphère  $S_{m-1}$  des vecteurs unités tangents. Il serait agréable de pouvoir le montrer directement, auquel cas la démonstration du théorème 2 serait réduite à l'élimination du groupe  $T^1 \times \text{Sp}(n)$ , qui est facile.

### 6. Formes à dérivée covariante nulle des variétés riemanniennes.

Soit  $\tau$  une forme extérieure sur  $V$ ; " $\nabla\tau = 0$ " est équivalent à " $\tau$  est invariante par  $\psi_x$ " en tout  $x \in V$ . Nous avons déjà rencontré de telles formes au n° 5 : quand  $\psi$  est réductible, les formes monômes définissant les sous-espaces stables pour  $\psi$  sont à dérivée covariante nulle ; quand  $\psi \subset \text{U}(n)$  (resp.  $\text{SU}(n)$ ), la forme  $\varphi$  et ses puissances  $\varphi^p$  ( $p = 1, \dots, n-1$ ) (resp.  $\theta$ ) sont aussi à dérivée covariante nulle.

La représentation linéaire de  $\text{Sp}(n) \times \text{Sp}(1)$  (resp.  $\text{Spin}(9)$ ) dans  $\mathbb{R}^{4n}$  (resp.  $\mathbb{R}^{16}$ ) laisse invariante une 4-forme et ses puissances (resp. une 8-forme). Le théorème 2 montre que, si  $\nabla R \neq 0$ , les formes précédentes sont les seules formes à dérivée covariante nulle que l'on puisse rencontrer sur une variété riemannienne. Car les représentations rencontrées de  $\text{SO}(m)$ ,  $G_2$  et  $\text{Spin}(7)$  ne laissent invariante aucune forme extérieure. On peut encore dire :

COROLLAIRE 1. - S'il existe sur une variété riemannienne  $V$  une forme  $\tau$  non triviale telle que  $\nabla\tau = 0$ , c'est qu'alors : soit  $V$  est symétrique, soit  $V$  est réductible, soit  $V$  est pseudo-kählérienne, soit le groupe d'holonomie homogène de  $V$  est  $\text{Sp}(n) \times \text{Sp}(1)$  ou  $\text{Spin}(9)$ .

### 7. $\psi$ des variétés riemanniennes orientables.

Dans ce numéro, supposons  $V$  orientable ; alors  $\psi \subset \text{SO}(m)$ . D'après le théorème 2,  $\psi$  ne peut différer de  $\sigma$  que si  $\sigma \subset \text{U}(n)$  pour  $V_{2n}$ , car  $\sigma$  est distingué dans  $\psi$  (proposition 1). Si  $\sigma = \text{U}(n)$ , il est classique que  $\psi$  peut avoir au plus une composante connexe dans  $\text{O}(2n)$  autre que  $\text{U}(n)$  ; cette composante est définie par l'élément  $k : z \rightarrow \bar{z}$ .  $k$  n'appartient d'ailleurs à  $\text{SO}(2n)$  que si  $n$  est pair. Ainsi :

COROLLAIRE 2. - Si une variété orientable  $V_{4n+2}$  admet un revêtement à cour-  
bure de Ricci non nulle qui est : pseudo-kählérien, non réductible, et tel que  
 $\nabla R \neq 0$ , alors  $V_{4n+2}$  elle-même est pseudo-kählérienne. Si une variété  $V_{4n}$   
admet un revêtement du type précédent, alors elle est orientable et admet un re-  
vêtement à 2 feuillets qui est pseudo-kählérien.

---