Jean-Louis Koszul

Formes hermitiennes canoniques des espaces homogènes complexes

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 108, p. 69-75

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__69_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1955)

FORMES HERMITIENNES CANONIQUES DES ESPACES HOMOGÈNES COMPLEXES

par Jean-Louis KOSZUL.

A tout volume réel ω sur une variété analytique complexe V est associée canoniquement une forme hermitienne sur V , dégénérée ou non. Si

$$z_1, z_2, \dots, z_n$$

sont des coordonnées locales complexes sur V et si

$$\omega = K\, dz_1\, dz_2 \dots dz_n\, d\bar{z}_1\, d\bar{z}_2 \dots d\bar{z}_n \quad (\bar{K} = (-1)^n K)$$

alors la forme associée s'écrit localement

$$\frac{d^2 \operatorname{Log} K}{dz_i\, d\bar{z}_j}\, dz_i\, d\bar{z}_j \ .$$

Si V est une variété analytique complexe sur laquelle est donné un groupe transitif G d'automorphismes et s'il existe sur V un volume (réel) invariant par G , alors ce volume est unique à un facteur constant près ; la forme hermitienne associée est donc entièrement déterminée par la structure complexe de V et le groupe transitif G . C'est cette forme que l'on appelle ici la <u>forme hermitienne canonique</u> de V , considéré comme espace homogène de groupe G . E. Cartan a observé qu'une condition nécessaire pour que V soit un domaine borné est que cette forme canonique soit définie positive (on peut en effet prendre pour volume invariant le volume de Bergmann du domaine). Les résultats exposés reposent sur une expression de la forme hermitienne canonique en termes de traces (analogue à l'expression Tr adX adY de la forme de Killing).

1. Structure complexe invariante sur un espace homogène.

Soit G un groupe de Lie connexe et B un sous-groupe fermé de G . On notera G/B l'espace homogène quotient de G par la relation "$s \sim s' \Leftrightarrow sB = s'B$". Soient g l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à <u>gauche</u> sur G et b la sous-algèbre de g qui correspond à B . Soit F l'algèbre des fonctions différentiables sur G . Un champ de vecteurs X sur G qui vérifie la condition $Xs - X \in Fb$ pour tout $s \in B$ peut être <u>projeté</u> sur G/B ; sa projection est un champ de vecteurs sur G/B que l'on note $\pi.X$.

Soit J un endomorphisme de g vérifiant les conditions :

(1) $J.b = (0)$

(2) $J^2.X = -X \bmod b$, quelque soit $X \in g$,

(3) $J.(Xs) = (J.X)s \bmod b$, quels que soient $X \in g$ et $s \subset B$.

On peut considérer J comme un tenseur de type $(1, 1)$ invariant à gauche sur G . Compte tenu des propriétés (1) et (3), il existe sur G/B un tenseur I de type $(1, 1)$ invariant par G tel que $I\pi.X = \pi J.X$ pour tout champ de vecteurs projetable X sur G . Par suite de (2) , ce tenseur I vérifie la condition $I^2 = -1$ et définit donc une structure presque complexe invariants sur G/B . Toute structure presque complexe invariante sur G/B peut s'obtenir ainsi ; deux endomorphismes J et J' définissent le même tenseur I sur G/B lorsque

$$J.X = J'.X \bmod b \qquad \text{pour tout } X \in g .$$

Pour que la structure presque complexe définie par J soit une structure complexe sur G/B , il faut et il suffit que J vérifie la condition d'intégrabilité :

(4) $$[X , Y] + J.[J.X , Y] + J.[X , J.Y] - [J.X , J.Y] = 0 \bmod b ,$$

quels que soient $X , Y \in g$. Le prolongement J^c de J à l'algèbre de Lie g^c complexifiée de g a pour polynôme minimal $x(x^2 + 1)$. La condition (4) signifie que les zéros de $J^c(J^c - \sqrt{-1})$ constituent une <u>sous-algèbre</u> (complexe) de g^c .

2. <u>La forme</u> ψ .

Pour tout endomorphisme α de g tel que $\alpha.b \subset b$, on notera $Tr_{g/b}\,\alpha$ la trace de l'endomorphisme de g/b déduit de α par passage au quotient. Pour qu'il existe un volume invariant sur G/B , il est nécessaire que $Tr_{g/b}\, ad(Y) = 0$ pour tout $Y \subset b$ (condition qui est suffisante si B est connexe). Soit J un endomorphisme de g définissant une structure complexe invariante sur G/B . La condition (3) sous-forme infinitésimale implique que $ad(Y)J.X = J\, ad(Y).X \bmod b$ quels que soient $X \in g$ et $Y \in b$. Par suite, quel que soit $X \in g$, b est stable par $ad(J.X) - J\, ad(X)$. La fonction linéaire

$$\psi(X) = Tr_{g/b}\,(ad(J.X) - J\, ad(X))$$

est la restriction à g d'une <u>forme différentielle</u> ψ <u>de degré</u> 1 , <u>invariante à gauche sur</u> G . Cette forme est entièrement déterminée par la structure complexe invariante de G/B : elle est indépendante du choix de J .

<u>La forme</u> ψ <u>est invariante à droite par</u> B . On a

(5) $$\psi([X , Y]) = 0 \quad \text{quels que soient } X \in g \text{ et } Y \in b .$$

La différentielle extérieure $d\psi$ de ψ est donc l'image inverse par la projection

$G \to G/B$ d'une forme Ω de degré 2 sur G/B . On démontre que cette forme Ω est, à un facteur près, la forme de Kähler définie par la forme hermitienne canonique de G/B . Plus précisément, la forme hermitienne canonique de G/B est la forme h définie par la condition

$$h(\pi.X\ ,\ \pi.Y) = 1/2(d\psi)\ (X\ ,\ J.Y) \tag{6}$$

quels que soient les champs de vecteurs projetables X , Y sur G .

REMARQUE. - La forme ψ n'est généralement pas l'image réciproque d'une forme de G/B . C'est cependant le cas lorsque $b = [b\ ,\ b]$ et en particulier lorsque B est discret. Ainsi lorsque G est le groupe $z \to az + b$ $(a > 0)$ opérant sur le demi-plan de Poincaré, ψ est l'image inverse de la forme $\frac{2dx}{y}$.

3. Les espaces homogènes complexes dont la forme hermitienne canonique est non dégénérée.

Soient e l'élément neutre de G et e' son image canonique dans G/B . Soient X un champ invariant à gauche sur G et X' le champ invariant à droite qui coïncide avec X en e . Le champ X' est projetable. Pour que $\pi.X' = 0$ en e' , il faut et il suffit que $X \in b$. Pour que $h(\pi.X'\ ,\ V) = 0$ en e' pour tout champ de vecteurs V sur G/B , il faut et il suffit que $(d\psi)\ (X'\ ,\ Y') = 0$ en e quel que soit le champ invariant à droite Y' sur G , ou encore que

$$\psi([X\ ,\ Y]) = (d\psi)(X\ ,\ Y) = 0 \quad \text{quel que soit } Y \in g .$$

Pour que la forme hermitienne canonique de G/B soit <u>non dégénérée</u>, il est donc nécessaire et suffisant que <u>les éléments de</u> b <u>soient les seuls éléments</u> $X \in g$ <u>tels que</u> $\psi([X\ ,\ Y]) = 0$ <u>pour tout</u> $Y \in g$. La sous-algèbre b' des éléments $X \in g$ qui vérifient cette condition correspond au sous-groupe B' des éléments de G qui laissent ψ invariante dans la représentation duale de la représentation adjointe. On a toujours $B' \supset B$; la forme canonique de G/B est non dégénérée lorsque $b' = b$, c'est-à-dire lorsque B est un sous-groupe ouvert de B' . Comme conséquences de cette remarque, on a les résultats suivants :

<u>Soit</u> G/B <u>un espace homogène complexe dont la forme hermitienne canonique est non dégénérée</u>.

a) <u>Si</u> G <u>est effectif sur</u> G/B , <u>alors le centre de</u> G <u>est discret</u>. En effet, le centre de G étant dans B' , sa composante connexe contenant e est dans B et se réduit donc à e si G est effectif.

b) <u>Si</u> G <u>est semi-simple</u>, B <u>est un sous-groupe ouvert du centralisateur d'un</u>

<u>sous-groupe à un paramètre de</u> G .

En effet, la représentation adjointe étant isomorphe à la représentation duale, B' est le centralisateur d'un sous-groupe à un paramètre de G .

c) <u>Si</u> G <u>est effectif sur</u> G/B <u>et si</u> g/b <u>est un</u> B-<u>module irréductible alors</u> G <u>est semi-simple</u>.

4. Le cas compact.

THÉORÈME. - Si G est un groupe compact et si G/B est un espace homogène complexe dont la forme hermitianne est non dégénérée, cette forme est définie négative.

On peut supposer G effectif ; d'après le n° 3 , G est alors semi-simple et B est un sous-groupe ouvert du centralisateur B' d'un sous-groupe à un paramètre de G (en fait B' est connexe et $B = B'$). Soit h une sous-algèbre abélienne maximale de b et soient $g^c \supset b^c \supset h^c$ les complexifiées de g , b , h . Soient $(\alpha , \beta , \gamma , \dots)$ les racines de g^c relatives à h^c qui est une sous-algèbre de Cartan. On peut choisir des vecteurs propres X_α appartenant aux racines $\alpha \neq 0$ de sorte que $\overline{X}_\alpha = - X_{-\alpha}$, $[X_\alpha , X_{-\alpha}] = H_\alpha \in h^c$ et $\alpha(H_\alpha) = 2$. L'endomorphisme J de g qui définit la structure complexe invariante de G/B se prolonge en un endomorphisme J^c de g^c et ψ se prolonge en une forme linéaire complexe sur g^c que l'on peut écrire $\psi^c(X) = \mathrm{Tr}_{g^c/b^c} (\mathrm{ad}(J^c.X) - J^c \,\mathrm{ad}(X))$. Puisque B est compact, on peut supposer J choisi de sorte que $J\,\mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}(X)J$ pour tout $X \in b$. Les X_α sont alors des vecteurs propres de J^c . Soit D l'ensemble des racines α telles que $J^c.X_\alpha = \sqrt{-1}\, X_\alpha$. Les X_α et $X_{-\alpha}$ pour $\alpha \in D$ constituent une base d'un supplémentaire de b^c dans g^c . Pour toute racine $\gamma \neq 0$, $X_\gamma \in [b^c , g^c]$, ce qui implique $\psi^c(X_\gamma) = 0$ d'après (6) . Pour $H \in h^c$, on a $J^c.H = 0$ et $J^c \,\mathrm{ad}(H).X_\gamma = \sqrt{-1}\,\gamma(H)X_\gamma$ lorsque $\gamma \in D$. Par suite,

$$\psi^c(H) = - 2\sqrt{-1} \sum_{\gamma \in D} \gamma(H) \tag{7}$$

Les $U_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$ et $V_\alpha = \sqrt{-1}\,(X_\alpha + X_{-\alpha})$ pour $\alpha \in D$ constituent une base d'un supplémentaire de b dans g . On a $J.U_\alpha = V_\alpha$ et $J.V_\alpha = - U_\alpha$. Compte tenu de (7) , on en déduit que les U_α et V_α sont deux à deux orthogonaux pour la forme $\psi([X , J.Y])$ et que

$$\psi([U_\alpha , J.U_\alpha]) = \psi([V_\alpha , J.V_\alpha]) = - 2 \sum_{\gamma \in D} \gamma(H_\alpha) . \tag{8}$$

LEMME. - Pour toute racine $\alpha \in D$, on a $\sum_{\gamma \in D} \gamma(H_\alpha) > 0$; pour toute racine

$\alpha \neq 0$ telle que $X_\alpha \in b^c$, on a $\sum_{\gamma \in D} \gamma(H_\alpha) = 0$.

Soit N l'ensemble des racines dont les vecteurs propres sont des zéros de

$$J^c(J^c - \sqrt{-1}) .$$

Pour que $\beta \in N - D$, il faut et il suffit que $\beta \in N$ et $-\beta \in N$. Compte tenu de la remarque en fin du n° 1, il en résulte que si $\gamma \in D$, si $\beta \in N$ et si $\gamma + \beta$ est racine, alors $\gamma + \beta \in D$. Soit $\alpha \neq 0$ dans N et soit β une racine telle que $\beta + \alpha$ ne soit pas racine. On désigne par D_β l'ensemble des racines de la forme $\beta + k\alpha$ (k entier ≤ 0) qui sont contenues dans D. Les D_β constituent une partition de D et chaque $D_\beta \neq \emptyset$ est constitué par les racines de la forme $+ k\alpha$ où $0 \geq k \geq s$ (s entier ≤ 0). D'après H.WEYL, l'ensemble de <u>toutes</u> les racines de la forme $\beta + k\alpha$ s'obtient en prenant les entiers $k \leq 0$ et $\geq p$ (p entier $\leq s$) ; de plus, on a alors $\beta(H_\alpha) = p$. Comme $\alpha(H_\alpha) = 2$, il en résulte que

$$\sum_{\gamma \in D_\beta} \gamma(H_\alpha) = (\beta + \beta - \alpha + \dots + \beta + s\alpha)(H_\alpha) = (1 - s)(s - p) \geq 0 .$$

Si $\alpha \in D$, alors pour D_α, on a $p = -2$ et $s = 0$: la somme partielle relative à D_α est donc égale à 2. Si $\alpha \in N - D$, alors $-\alpha \in N$ et pour tout D_β on a $p = s$, ce qui démontre le lemme.

Le théorème est une conséquence directe de ce lemme et de la formule (8). D'après un résultat de Montgomery, on peut dans son énoncé remplacer l'hypothèse "G est compact" par "G/B est compact et de groupe de Poincaré fini", mais on ne sait pas si l'hypothèse "G/B est compact" suffit. Un résultat de Bochner permet de démontrer a priori que si la forme hermitienne canonique d'un espace homogène compact est <u>définie</u>, elle est définie négative.

5. <u>Le cas</u> G <u>semi-simple et</u> B <u>compact</u>.

Les hypothèses étant les mêmes qu'au n° 4, soit σ un automorphisme involutif de g tel que $(\sigma - 1).b = (0)$. Les éléments $X + \sqrt{-1}\, Y \in g^c$ tels que

$$\sigma.X = X \quad \text{et} \quad \sigma.Y = -Y$$

constituent une sous-algèbre réelle g' de g ayant g^c pour complexifiée et contenant la sous-algèbre $k \subset g$ des zéros de $\sigma - 1$. Soient G' le groupe (semi-simple) adjoint de g' et B' le sous-groupe compact de G' qui correspond à $b \subset g'$. On voit facilement que $J^c.g' \subset g'$ et que la restriction J' de J^c à g' définit sur l'espace homogène G'/B' une structure complexe invariante ne dépendant que de la structure complexe invariante définie par J sur G/B. La forme ψ' correspondante est la restriction de ψ^c à g'. Pour tout $\alpha \in D$, on a

$$\sigma U_\alpha = \pm U_\alpha ;$$

soit D_+ l'ensemble des racines $\alpha \in D$ telles que $\sigma . U_\alpha = U_\alpha$ et soit $D_- = D - D_+$. Les U_α , V_α où $\alpha \in D_+$ constituent une base d'un supplémentaire de b' dans k ; les $\sqrt{-1}\, U_\alpha$ et $\sqrt{-1}\, V_\alpha$ (où $\alpha \in D_-$) constituent une base d'un supplémentaire de k dans g' . Ces éléments sont deux à deux orthogonaux pour la forme

$$\psi'([X , J'.Y])$$

et l'on a

$$\psi'([U_\alpha , J'.U_\alpha]) = \psi([U_\alpha , J.U_\alpha]) \qquad \text{si } \alpha \in D_+$$
$$\psi'([\sqrt{-1}\, U_\alpha , J'.\sqrt{-1}\, U_\alpha]) = -\psi([U_\alpha , U.U_\alpha]) \qquad \text{si } \alpha \in D_-$$

et des égalités analogues pour les V_α .

Compte tenu des résultats obtenus dans le cas compact, ceci prouve que la forme hermitienne canonique de G'/B' est non dégénérée et que le nombre de ses carrés négatifs est égal au nombre des éléments U_α , V_α où $\alpha \in D_+$, c'est-à-dire à la dimension de k/b . Or on sait que k est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe compact maximal de G' .

En s'appuyant sur les résultats du n° 3 , on démontre d'autre part que tout espace homogène complexe G''/B'' où G'' est semi-simple, B'' compact et dont la forme hermitienne canonique est non dégénérée, est localement isomorphe à un espace homogène G'/B' déduit comme il vient d'être indiqué d'un espace homogène compact G/B . On obtient ainsi le

THÉORÈME. - Soient G un groupe semi-simple, B un sous-groupe compact de G . Pour qu'il existe sur G/B une structure complexe invariante dont la forme hermitienne canonique n'est pas dégénérée, il faut et il suffit que B et G aient même rang. Le nombre des carrés négatifs de cette forme est alors égal à la différence entre la dimension des sous-groupes compacts maximaux de G et la dimension de B .

En particulier, si la forme hermitienne canonique est définie positive, alors K est un compact maximal de G et G/B est donc un des espaces symétriques complexes étudiés par E. CARTAN. Un domaine borné homogène, dont le groupe des automorphismes est semi-simple, est donc symétrique. Le résultat subsiste, d'après A. BOREL, pour les domaines bornés admettant un groupe transitif semi-simple (on démontre que c'est alors le groupe de tous les automorphismes).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOREL (Armand). - Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups, Proc. nat. Acad. Sc., t. 40, 1954, p. 1147-1151.

[2] KOSZUL (Jean-Louis). - Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes, Canadian J. of Math., t. 7, 1955, p. 562-576.

Voir aussi :

HANO (Sun-ichi). - On Kählerian homogeneous spaces of unimodular Lie Groups, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 885-900.

[Mai 1958]