JACQUES RIGUET

Calcul différentiel libre

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 105, p. 43-49
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__43_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1954)

CALCUL DIFFÉRENTIEL LIBRE

par Jacques RIGUET

C'est en analysant le concept de polynôme d'Alexander d'un noeud et en le généralisant pour obtenir une classification des "lens spaces" à trois dimensions que FOX parvient en 1944-45 à l'algorithme du calcul différentiel libre qui semble bien être l'outil le plus convenable pour l'étude des groupes définis par des générateurs et des relations. Cet algorithme est étroitement relié avec trois théories algébrico-topologiques : la théorie des chaînes d'homotopie de Reidemeister pour la dimension 2 , les développements en série formelle de Magnus, la théorie des groupes de cohomologie d'Eilenberg-MacLane.

Dans cet exposé on ne parlera que des applications au problème d'isomorphisme des groupes, aux polynômes d'Alexander et aux groupes de cohomologie, les applications à l'homotopie de Reidemeister, au calcul de divers sous-groupes et groupes-quotients, au calcul des groupes d'homologie et d'autres invariants topologiques d'un revêtement, à un "théorème d'addition" général pour les polynômes d'Alexander des variétés à 3 dimensions, à la classification topologique des "lens spaces" à trois dimensions, à la théorie des noeuds n'ayant pas encore été publiées.

1. Soient J un anneau commutatif et E un ensemble quelconque. Etant donnée une application u de E dans J , nous appellerons <u>support</u> de u l'ensemble X_u des éléments $x \in E$ tels que $u(x) \neq 0$. Soient F un ensemble quelconque et α une application de $E \times F$ dans J , nous appellerons support de α la relation binaire R_α constituée par les couples $(x , y) \in E \times F$ tels que $\alpha(x , y) \neq 0$.

On a toujours $X_{\alpha u} \subset R_\alpha(X_u)$.

On désignera par αu l'application de E dans J définie par

$$\alpha u(x) = \sum_{y \in X_u} \alpha(y , x) u(y)$$

lorsque u a un support fini, ce qui donne un sens à cette formule. Si u a un support fini et si α a un support localement fini (c'est-à-dire quel que soit x , $R_\alpha(x)$ est fini) alors αu a un support fini.

2. <u>Algèbre de groupe</u>.

Soient J un anneau commutatif à élément unité et G un groupe. Il est immédiat que l'ensemble des applications de G dans J dont le support est fini, muni de l'addition et de la multiplication (convolution) définies par,

quel que soit $g \in G$, $(u+v)(g) = u(g) + v(g)$

$$uv(g) = \sum_{hk=g} u(h)\ v(k)$$

et par des lois externes évidentes est une algèbre qu'on appelle <u>algèbre de groupe</u> de G par rapport à J et qu'on désingera par JG . On désignera par f_x l'élément de l'algèbre de groupe tel que $f_x(g) = 0$ ou 1 suivant que $g = x$ ou $g \neq x$. L'ensemble des f_x quand x parcourt G constitue une base de JG et un groupe multiplicatif isomorphe à G . Si φ désigne une application de G dans un ensemble H , on désignera par $\bar{\varphi}$ l'extension linéaire de φ c'est-à-dire la "matrice" définie par

$$\bar{\varphi} u = \sum_{x \in X_u} u(x)\ f_{\varphi(x)} \ .$$

Si H est un groupe et φ un homomorphisme de G dans H, on a $\bar{\varphi}(uv) = \bar{\varphi}u . \bar{\varphi}v$. D'où un homomorphisme de JG dans JH dont le noyau est l'idéal bilatère constitué par les éléments u de JH tels que $\bar{\varphi}u = 0$. De cette façon, à tout sous-groupe distingué K de G correspond un idéal bilatère $\mathfrak{a}_K$ de JG constitué par tous les u tels que $f_K u = 0$ $(f_K(g) = 0$ ou 1 suivant que $g \notin K$ ou $g \in K)$.

Réciproquement tout idéal bilatère $\mathfrak{a}$ de JG détermine un sous-groupe distingué $K_{\mathfrak{a}}$ de G constitué par les éléments de G dont l'image est f_e par l'application canonique de JG dans $JG/\mathfrak{a}$. En d'autres termes, $K_{\mathfrak{a}}$ est constitué par l'ensemble des $x \in G$ tels que $f_x \in f_e + \mathfrak{a}$. On voit facilement que $K_{\mathfrak{a}_K} = K$ et que si $X \subset G$ engendre K , l'ensemble des $f_x - f_e$, lorsque x parcourt X , engendre $\mathfrak{a}$.

On appellera <u>retraction</u> la "matrice" ω définie par

$$\omega u = \left(\sum_{g \in G} u(g) \right) f_e \quad (\omega = \bar{\varphi} \text{ si, quel que soit } g \in G ,\ \varphi(g) = e)$$

$\mathfrak{a}_G$ est appelé <u>idéal fondamental</u> de JG (ou parfois <u>anneau de Magnus</u> de G) . Il est identique à l'ensemble des $u \in JG$ tels que $\omega u = 0$.

3. <u>Dérivation dans une algèbre de groupe</u> JG

Nous dirons que la "matrice" α application de $G \times G$ dans J est une <u>dérivation</u>

de JG lorsque

quel que soit $u \in JG$, le support de αu est fini (c'est-à-dire $\alpha u \in JG$)

quels que soient $u, v \in JG$, $\alpha(uv) = (\alpha u)(\omega v) + u(\alpha v)$.

On voit facilement que si α est une dérivation, on a

(3.1) $$\alpha f_e = 0$$

(3.2) $$\alpha f_g^{-1} = (f_g^{-1})(\alpha f_g) \quad \text{si } g \in G$$

(3.3) $$\alpha(u_1 \dots u_r) = \sum_{i=1}^{r} u_1 \dots u_{i-1} (\alpha u_i)(\omega u_{i+1}) \dots (\omega u_r) \quad \text{si } u_1 \dots u_r \in JG$$

(3.4) $$\alpha(n^n) = (u^{n-1} + (\omega u)u^{n-2} + \dots + (\omega u^{n-2})u + \omega u^{n-1})\alpha u \quad .$$

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des dérivations de support localement finis telles que $\alpha_1 \omega = \dots = \alpha_n \omega = 0$, on a

(3.5) $$\alpha_n \dots \alpha_1(uv) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_n \dots \alpha_i u)(\omega \alpha_{i-1} \dots \alpha_1 v) + u(\omega \alpha_n) \dots \alpha_1 v \; .$$

On peut munir l'ensemble des dérivations d'une loi externe en prenant JG comme anneau d'opérateurs à droite et en définissant le transformé $\alpha . v$ de la dérivation α par l'opérateur $v \in JG$ par

$$(\alpha . v)u = (\alpha u)v \quad \text{quel que soit } u \in JG \; .$$

L'ensemble des dérivations est ainsi un JG module à droite. On remarquera que ω étant la rétraction définie au paragraphe 2 et δ la "matrice" identité, la "matrice" $\delta - \omega$ est une dérivation (car, quels que soient $u, v \in JG$, $\omega(uv) = (\omega u)(\omega v)$).

4. Dérivation dans une algèbre de groupe libre.

Soient L un groupe libre et X un ensemble de générateurs libres de L. A tout élément g de L correspond un mot réduit unique $\dot{g}$. Soit Ω la relation d'ordre dans L définie par $(g, h) \in \Omega$ si et seulement si $\dot{g}$ est un segment initial de $\dot{h}$ et soit δ_x la translation à droite $\delta_x(g) = gx$.

La dérivation associée au générateur $x \in X$ sera par définition la "matrice" $\partial_x = \varepsilon_{\Omega \delta_x}^{-1} (\delta - \omega)$. On désigne par ε_R la "matrice" telle que $\varepsilon_R(x, y) = 1$

ou 0 suivant que $(x , y) \in R$ ou non.

Si on définit comme chez H. WEYL l'opération $\widehat{\ }$ par $\hat{u}(g) = u(g^{-1})$ on a $\partial_x u = (u - \omega u)\, \widehat{f_{\Omega(x)}}$.

D'où l'on vérifie aisément que ∂_x est bien une dérivation. On peut montrer que le support de ∂_x est contenu dans Ω^{-1} . Si x et y sont deux éléments de X on a

$$\partial_y f_x = \begin{cases} f_e & \text{si } x = y \\ 0 & x \neq y . \end{cases}$$

Il est facile de montrer que si α est une dérivation elle est identique à $\sum_{x \in X} \partial_x . \alpha f_x$ autrement dit que pour tout $u \in JG$ on a

$$\alpha u = \sum_{x \in X} (\partial_x u)(\alpha f_x) .$$

En particulier en substituant à α dans cette expression la dérivation $\delta - \omega$, on obtient la "formule fondamentale"

$$u = \omega u + \sum_{x \in X} (\partial_x u)(f_x - f_e)$$

qui montre que tout élément u de JG peut être retrouvé à partir de ωu et de ses dérivées.

La formule (3.4) permet d'écrire la dérivée de la puissance positive d'un générateur $x \in X$.

$$\partial_x f_{x^m} = f_e + f_x + \dots + f_{x^{m-1}} \qquad \text{si } m > 0 .$$

D'après la formule (3.2) on a pour les puissances négatives

$$\partial_x f_{x^{-m}} = - (f_e + f_{x^{-1}} + \dots + f_{x^{-(m-1)}})\, f_{x^{-1}} \qquad \text{si } m > 0 .$$

Dans les deux cas, on a ℓ étant positif ou négatif :

$$\partial_x f_{x^\ell} = (f_{x^\ell} - f_e)(f_x - f_e)^{-1} .$$

Si $L(X)$ et $L(Y)$ sont deux groupes libres engendrés par X , respectivement par Y , et si φ est homomorphisme de $L(X)$ dans $L(Y)$ on a, pour $x \in X$:

$$\partial_x \bar{\varphi} u = \sum_{y \in Y} (\bar{\varphi} \partial_y u)(\partial_x \bar{\varphi} f_y) \quad \text{quel que soit } u \in JL(Y).$$

5. Dérivation d'ordre supérieur.

Soient $x_1, \dots, x_n \in X$. Si on fait $\alpha_1 = \partial_{x_1}, \dots, \alpha_n = \partial_{x_n}$ dans la formule (3.5), on obtient l'expression d'une dérivée n-ième en fonction des dérivées d'ordre inférieur.

Si on applique la formule fondamentale à $\partial_{x_1} u$, $\partial_{x_2} \partial_{x_1} u$, ..., on obtient après simplification le développement de Magnus (ou de Taylor, si l'on veut) :

$$u = \omega u + \sum_{x \in X} (\omega \partial_x u)(f_x - f_e) + \sum_{x_1, x_2 \in X} (\omega \partial_{x_1} \partial_{x_2} u)(f_{x_1} - f_e)(f_{x_2} - f_e) + \dots$$

$$+ \sum_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in X} (\omega \partial_{x_1} \partial_{x_2} \dots \partial_{x_{n-1}} u)(f_{x_1} - f_e) \dots (f_{x_{n-1}} - f_e) +$$

$$+ \sum_{x_1, \dots, x_n \in X} \partial_{x_1} \dots \partial_{x_n} (f_{x_1} - f_e) \dots (f_{x_n} - f_e) .$$

Si au lieu de ce développement, on considère le développement formel qu'on obtient en remplaçant le dernier terme-reste par des points de suspension, on peut constater que le produit des développements formels de u et de v est identique au développement formel du produit uv. D'où la représentation de Magnus du groupe libre par les éléments de l'anneau libre engendre les $f_x - f_e$ lorsque x parcourt X.

Pour clore ce paragraphe signalons la formule

$\partial_x^p f_{x^n} = \partial_x^p f_{x^{n-1}} + \partial_x^{p-1} f_{x^{n-1}}$ valable pour $x \in X$ et n de signe quelconque, d'où l'on déduit immédiatement pour $n > 0$

$$\omega \partial_x^p f_{x^n} = \binom{n}{p} f_e$$

$$\omega \partial_x^p f_{x^{-n}} = (-1)^p \binom{n+p-1}{p}$$

6. Théorème d'unicité.

Il s'énonce ainsi : si u et v sont deux éléments de JG tels que

$\omega u = \omega v$, $\omega\partial_{x_1} u = \omega\partial_{x_1} v$, $\omega\partial_{x_1}\partial_{x_2} u = \omega\partial_{x_1}\partial_{x_2} v$, etc., quels que soient $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in X$ alors $u = v$. Comme corollaire, on démontre que si α est l'idéal fondamental de JG on a $\bigcap_{n \in N} \alpha^n = (0)$.

Le n-ième centre L_n de $L(X)$ est déterminé par α^n : pour que $g \in L_n$, il faut et il suffit que $f_g \in f_e + \alpha^n$.

Le théorème d'unicité permet également de démontrer le théorème de Higman : $JL(X)$ n'a pas de diviseurs de zéro ainsi que le théorème de Schumann et Blanchfield: l'idéal $\alpha_K \alpha$ détermine le groupe dérivé $D_1(K)$.

7. Présentations d'un groupe.

Soient X un ensemble et R un sous-ensemble de $L(X)$ groupe libre engendré par X . On dira que le couple $(X : R)$ est une présentation du groupe G si G est isomorphe à $L(X)/[R]$, $[R]$ étant le sous-groupe distingué de $L(X)$ engendré par R .

Plus généralement, soient X et A deux ensembles, R un sous-ensemble de $L(X \cup A)$, $[R]$ le sous-groupe distingué de $L(X \cup A)$ engendré par R . G et F étant deux groupes on dira que le triple $(X ; A : R)$ est une présentation du couple de groupes (G , F) lorsque G est isomorphe à $L(X \cup A)/[R]$ et F à $L(A)/[R] \cap L(A)$.

Théorème de Tietze (généralisé) : X , Y , A , B étant des ensembles finis, pour que les présentations $(X ; A : R)$ et $(Y ; B : S)$ définissent des couples isomorphes, il faut et il suffit que l'on passe de l'une à l'autre par une suite finie de transformations de Tietze de type I , II ou II' avec les définitions suivantes:

- une transformation de Tietze de type I est le passage de $(X ; A , R)$ à $(X ; A : R \cup \{s\})$ où $s \in [R]$ ou son inverse ;
- une transformation de Tietze de type II est le passage de $(X ; A , R)$ à $(X \cup \{y\} , A : R \cup \{yt^{-1}\})$ où $t \in L(X \cup A)$ ou son inverse ;
- une transformation de Tietze de type II' est le passage de $(X ; A , R)$ à $(X , A \cup \{b\} : R \cup \{bt^{-1}\})$ où $t \in L(A)$ ou son inverse.

8. Jacobiennes.

Soit $(X ; A : R)$ une présentation du couple de groupes (G , F) et soit φ l'homomorphisme de $L(X)$ sur G . On appelle matrice jacobienne de la présentation

(X ; A : R) la "matrice" M application de $X \times R$ dans JG définie par $M(x , r) = \widetilde{\varphi}\, \partial_x f_r$.

On a alors le théorème :

Les matrices jacobiennes des présentations à ensembles de générateurs finis d'un couple (G , F) consistant en un groupe G possédant un ensemble fini de générateurs finis et un sous-groupe F possédant un ensemble fini de générateurs appartiennent toutes à une même classe d'équivalence sur JG .

9. Graupes de cohomologie d'un groupe.

Soit $\mathfrak{U}$ un JG module à droite, et soient $H_n(G , \mathfrak{U})$ et $H^n(G , \mathfrak{U})$ les groupes d'homologie et de cohomologie de dimension n de G sur $\mathfrak{U}$ au sens d'Eilenberg MacLane. On a alors le théorème : quels que soient n et $\mathfrak{U}$, $H_n(G , \mathfrak{U})$ et $H^n(G , \mathfrak{U})$ sont déterminés par une matrice jacobienne d'une présentation arbitraire de G .

BIBLIOGRAPHIE

[1] FOX (Ralph H.). - Free differential calculus, I : Derivation in the free group ring, Annals of Math., Series 2, t. 57, 1953, p. 547-560.

[2] FOX (Ralph H.). - Free differential calculus, II : The isomorphism problem of groups, Annals of Math., Series 2, t. 59, 1954, p. 196-210.