

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

FRANÇOIS TRÈVES

Thèse d'Hörmander, II

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 135, p. 371-379

http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__371_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÈSE D'HÖRMANDER [1], II

par François TRÈVES.

SOMMAIRE. - HÖRMANDER définit une relation de préordre sur l'ensemble des polynômes différentiels $P(D)$, en utilisant leurs dérivées $P^{(p)}(D)$ (voir [2]).

Par une légère modification de la preuve du lemme 1 [2], on parvient à démontrer l'"inversibilité" locale d'une large catégorie d'opérateurs différentiels à coefficients variables.

Les notations sont celles du premier exposé [2].

1. Comparaison des opérateurs différentiels.

Soient $P(D)$, $Q(D)$ deux opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants sur R^n .

DÉFINITION 1. - On dit que $Q(D)$ est plus faible que $P(D)$ (ou que $P(D)$ est plus fort que $Q(D)$) si, à tout ouvert relativement compact Ω de R^n , il correspond une constante finie C_Ω telle que $\|Q(D)\varphi\|_{L^2} \leq C_\Omega \|P(D)\varphi\|_{L^2}$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Nous poserons, d'autre part, pour tout polynôme $P(X) \in C[X_1, \dots, X_n]$: $\tilde{P}(\zeta) = \sqrt{\sum |P^{(p)}(\zeta)|^2}$ ($\zeta \in C^n$), la sommation étant effectuée par rapport à tous les systèmes $p = (p_1, \dots, p_n)$ de n entiers ≥ 0 .

PROPOSITION 1. - S'il existe un ouvert Ω non vide de R^n , et une constante finie C_Ω , tels que $\|Q(D)\varphi\|_{L^2} \leq C_\Omega \|P(D)\varphi\|_{L^2}$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors il existe une constante finie B telle que $\tilde{Q}(\xi) \leq B \tilde{P}(\xi)$ pour tout $\xi \in R^n$. Et s'il existe une telle constante B , alors $Q(D)$ est plus faible que $P(D)$.

Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\psi(x) = \varphi(x) \exp(2i\pi \langle x, \xi \rangle)$. En vertu de la formule de Leibniz généralisée (voir [2]), on a :

$$P(D)\psi(x) = e^{2i\pi \langle x, \xi \rangle} \sum P^{(p)}(\xi) \frac{D^p \varphi(x)}{p!}.$$

Posons $a_{p,q} = \frac{1}{p!q!} \int D^p \varphi \cdot \overline{D^q \varphi} dx$. La forme quadratique $\sum a_{p,q} t_p \bar{t}_q$ est hermitique définie positive. Cela résulte de Plancherel :

$$\sum_{p,q} a_{p,q} t_p \bar{t}_q = \int \left(\sum_p \frac{t_p}{p!} D^p \psi \right) \overline{\left(\sum_q \frac{t_q}{q!} D^q \psi \right)} dx = \int \left| \sum_p \frac{t_p}{p!} D^p \psi \right|^2 dx =$$

$$= \int \left| \sum_p (2\pi)^{|p|} \frac{t_p y_1^{p_1} \dots y_n^{p_n}}{p!} \right|^2 |\mathcal{F}\psi(y)|^2 dy .$$

Or la forme $\sum_p (2\pi)^{|p|} \frac{t_p}{p!} y_1^{p_1} \dots y_n^{p_n}$ ne peut être nulle pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ que si tous les t_p sont nuls.

En particulier, cela implique l'existence d'une constante finie A_1 telle que $\sum_p |t_p|^2 \leq A_1^2 \sum_{p,q} a_{p,q} t_p \bar{t}_q$ pour tout système de μ nombres complexes t_p ; μ est un entier qui dépend de l'ordre m de $P(D)$.

Prenons alors $t_p = Q^{(p)}(\xi)$; on obtient :

$$\sum_p |Q^{(p)}(\xi)|^2 = \tilde{Q}^2(\xi) \leq A_1^2 \sum_{p,q} a_{p,q} Q^{(p)}(\xi) \overline{Q^{(q)}(\xi)} .$$

Mais l'inégalité $\|Q(D)\psi\|_{L^2}^2 \leq C_\Omega^2 \|P(D)\psi\|_{L^2}^2$ donne immédiatement

$$\sum_{p,q} a_{p,q} Q^{(p)}(\xi) \overline{Q^{(q)}(\xi)} \leq C_\Omega^2 \sum_{p,q} a_{p,q} P^{(q)}(\xi) \overline{P^{(p)}(\xi)}$$

et, compte tenu de ce que :

$$\sum_{p,q} a_{p,q} P^{(p)}(\xi) \overline{P^{(q)}(\xi)} \leq A_2^2 \sum_p |P^{(p)}(\xi)|^2$$

on en déduit : $\tilde{Q}(\xi) \leq B \tilde{P}(\xi)$, avec $B = A_1 A_2 C_\Omega$. La première partie de la proposition 1 se trouve ainsi démontrée.

Supposons maintenant $\tilde{Q}(\xi) \leq B \tilde{P}(\xi)$. En particulier, on aura

$$|Q(\xi)|^2 \leq B^2 \sum_p |P^{(p)}(\xi)|^2 ,$$

d'où, en appliquant de nouveau Plancherel :

$$\int |Q(D)\psi|^2 dx = \int |Q(\xi)|^2 |\mathcal{F}\psi(\xi)|^2 d\xi \leq B^2 \sum_p \int |P^{(p)}(\xi)|^2 |\mathcal{F}\psi(\xi)|^2 d\xi =$$

$$= B^2 \sum_p \|P^{(p)}(D)\psi\|_{L^2}^2 .$$

On a pris $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, où Ω est un ouvert relativement compact quelconque de \mathbb{R}^n . Mais d'après le lemme 1 du premier exposé, nous savons qu'il existe une

constante $A_{\Omega} \ll + \infty$ telle que

$$\|P^{(p)}(D)\psi\|_{L^2}^2 \leq A_{\Omega}^2 \|P(D)\psi\|_{L^2}^2$$

pour toute $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En prenant $C_{\Omega}^2 = B^2 \sum_p A_{\Omega}^2$, on obtient immédiatement :

$$\|Q(D)\psi\|_{L^2} \leq C_{\Omega} \|P(D)\psi\|_{L^2}.$$

COROLLAIRE. - Pour que $Q(D)$ soit plus faible que $P(D)$, il faut et il suffit qu'il existe une constante $A \ll + \infty$ telle que $|Q(\xi)| \leq A \tilde{Q}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Nécessité évidente, puisque $|Q(\xi)| \leq \tilde{Q}(\xi)$. D'autre part, la fin de la démonstration de la proposition 1 utilise simplement le fait que

$$|Q(\xi)|^2 \leq B^2 \sum_p |P^{(p)}(\xi)|^2.$$

Notons $P_m(X)$ la partie homogène de plus haut degré (en l'occurrence, de degré m) du polynôme $P(X)$. On sait que l'opérateur $P(D)$ est dit elliptique si le seul zéro de $P_m(X)$ dans \mathbb{R}^n est l'origine. Visiblement, si $P(D)$ est elliptique, il est complet et type local (voir [2]) ; et visiblement aussi (il suffit de prendre l'opérateur de la chaleur), la réciproque est inexacte.

PROPOSITION 2. - Pour que $P(D)$ soit elliptique, il faut et il suffit qu'il soit plus fort que tout opérateur $Q(D)$ d'ordre inférieur ou égal au sien.

Démonstration quasi immédiate : si $P(D)$ est elliptique, $|\xi|^{2m} \leq M_1 |P(\xi)|^2$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. Si $\deg Q(X) \leq m$, alors pour tout p ,

$$|Q^{(p)}(\xi)| \leq M_2 (1 + |\xi|^{2m})^{1/2} \quad (\text{quel que soit } \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Choisissons alors q de telle sorte que $P^{(q)}(X) = \text{Cte} \neq 0$; on voit qu'il existe $M \ll + \infty$ telle que :

$$\tilde{Q}(\xi)^2 = \sum |Q^{(p)}(\xi)|^2 \leq M^2 (|P^{(q)}(\xi)|^2 + |P(\xi)|^2).$$

D'où la nécessité de la condition, compte tenu de la proposition 1.

Inversement, si $P(D)$ n'était pas elliptique, il existerait un cône Γ , non réduit à l'origine et de sommet en ce point, sur lequel $P_m(\xi) = 0$, et donc

sur lequel $\tilde{P}(\xi)$ croîtrait (si l'on faisait tendre $|\xi|$ vers l'infini) au plus comme $|\xi|^{m-1}$. Il serait facile alors de trouver un polynôme $Q(X)$, de degré m tel qu'il n'existe aucune constante finie A vérifiant $|Q(\xi)| \leq A \tilde{P}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 2. - $P(D)$ sera dit de type principal si les dérivées partielles $\partial P_m / \partial X_j$ de la partie homogène $P_m(X)$ de plus haut degré de $P(X)$ ne s'annulent simultanément, dans \mathbb{R}^n , qu'à l'origine.

Les opérateurs de type principal ont des propriétés simples, même lorsque les coefficients sont variables, comme nous le verrons plus loin. Tout opérateur elliptique est de type principal ; la réciproque est fautive puisque tous les opérateurs du 1er ordre sont de type principal. Mais ils ne sont pas tous elliptiques.

L'opérateur de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ n'est pas de type principal, comme on le voit immédiatement. Par contre, l'opérateur des ondes $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ est de type principal.

D'ailleurs la définition 2 équivaut à la suivante : $P(D)$ sera de type principal si le cône de \mathbb{R}^n , dont l'équation est $P_m(\xi) = 0$, ne possède pas de génératrice double.

PROPOSITION 3. - Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1° $P(D)$ est de type principal ;

2° $P(D)$ est à la fois plus fort et plus faible que tout opérateur différentiel ayant la même partie homogène de plus haut degré que $P(D)$.

1° \implies 2°. Soit $Q(D)$ un opérateur différentiel ayant même partie homogène de degré maximum que $P(D)$. On a évidemment, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\tilde{P}(\xi)^2 > \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial P}{\partial \xi_j}(\xi) \right|^2 = \Pi(\xi) + r(\xi),$$

où $\deg r(\xi) < 2(m-1)$, et $\Pi(\xi) = \sum \left| \frac{\partial P}{\partial \xi_j}(\xi) \right|^2$.

$\Pi(\xi)$ est homogène, de degré $2(m-1)$, et ne s'annule par hypothèse qu'en $\xi = 0$. Il s'ensuit que $r(\xi)/\Pi(\xi) \rightarrow 0$ lorsque $|\xi| \rightarrow +\infty$.

Prenons $|\xi|$ assez grand pour avoir $|r(\xi)|/\Pi(\xi) < \frac{3}{4}$. On a alors

$$\frac{|Q(\xi)|}{\tilde{P}(\xi)} \leq \frac{|P(\xi)|}{\tilde{P}(\xi)} + \frac{|Q(\xi) - P(\xi)|}{\tilde{P}(\xi)} \leq 1 + \frac{2|Q(\xi) - P(\xi)|}{\sqrt{\pi}(\xi)}$$

et le dernier terme a visiblement une limite. Ceci prouve (corollaire de la proposition 1) que $Q(D)$ est plus faible que $P(D)$; mais on peut échanger les rôles de P et Q , puisqu'ils ont même partie homogène de degré m .

$2^\circ \implies 1^\circ$. Si $P(D)$ possède la propriété 2° , il en est évidemment de même de $P_m(D)$, qui est donc plus fort que $P_m(D) + \lambda D^p$, où λ est un scalaire, et $|p| = p_1 + \dots + p_n = m - 1$, et par suite aussi de λD^p . Il s'ensuit qu'il existe une constante $A < +\infty$ telle que $(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{m-1} \leq A^2 P_m^2(\xi)$.

Supposons alors qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\eta \neq 0$, tel que $\frac{\partial P_m}{\partial \eta_j}(\eta) = 0$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$.

Puisque $P_m(X)$ est homogène, on devrait avoir aussi $P_m(\eta) = 0$ d'après l'identité d'Euler. Et de même, on aurait $\frac{\partial P_m}{\partial \eta_j}(t\eta) = 0$, $P_m(t\eta) = 0$ ($1 \leq j \leq n$) pour tout réel t . Cela signifierait que $P_m^2(t\eta)$ croît au plus comme $|t|^{2m-3}$ lorsque $|t| \rightarrow \infty$; ceci est en contradiction avec l'inégalité précédente. C.Q.F.D.

Une autre caractérisation des opérateurs de type principal va nous servir bientôt :

Pour que $P(D)$ soit de type principal, il faut et il suffit qu'il existe $A < +\infty$ telle que

$$(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{m-1} \leq A \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial P_m}{\partial \xi_j}(\xi) \right|^2 \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Ce résultat est évident.

2. Un théorème sur les opérateurs différentiels à coefficients variables.

$P(x, D)$ désignera, à partir de maintenant, un opérateur différentiel linéaire, à coefficients variables, sur \mathbb{R}^n ; $P(x_0, D)$ sera l'opérateur à coefficients constants obtenu en faisant $x = x_0$ dans les coefficients de $P(x, D)$.

DÉFINITION 3. - $P(x, D)$ sera dit de type principal, si $P(x_0, D)$ est de type principal pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

$P_m(x, D)$ désignera la partie homogène d'ordre maximum m de $P(x, D)$.

THÉORÈME 1. - On suppose que $P(x, D)$ est de type principal, que les coefficients de $P_m(x, D)$ sont une fois continûment différentiables et réels, que ceux de $P(x, D)$ sont continus. Dans ces conditions, il existe un voisinage ouvert Ω de 0 et une constante $A < +\infty$ telle que :

$$\sum_{|p| \leq m} \|D^p \varphi\|_{L^2}^2 \leq A \|P(x, D) \varphi\|_{L^2}^2 \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Nous nous bornerons ici à esquisser une transcription de la preuve de ce théorème dans des notations plus simples que celles utilisées par HÖRMANDER.

De ce que $P(x, D)$ est de type principal découle qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$c (\sum |\xi_j|^2)^{m-1} \leq \sum \left| \frac{\partial}{\partial \xi_j} P_m(0, \xi) \right|^2 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Appliquons une fois de plus Plancherel ; la majoration précédente conduit à :

$$c' \sum_{|p|=m-1} \|D^p \varphi\|_{L^2}^2 \leq \sum_j \|P_{m,j}(0, D) \varphi\|_{L^2}^2$$

où $P_{m,j}(0, D)$ est l'opérateur (à coefficient constants) associé à

$$\frac{-1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial X_j} P_m(0, X).$$

Mais du lemme 1 de [2] résulte que, si $k \leq m-2$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (où Ω est, pour le moment, un ouvert relativement compact arbitraire), on aura :

$$\sum_{|p|=k} \|D^p \varphi\|_{L^2}^2 \leq B \delta \sum_{|p|=m-1} \|D^p \varphi\|_{L^2}^2$$

où $\delta = \sup_{x \in \Omega} |x|$.

Utilisons maintenant la continue différentiabilité des coefficients de $P_m(x, D)$;

elle permet d'écrire :

$$\sum_j \|P_{m,j}(0, D) \varphi\|_{L^2}^2 \leq \sum_j \|P_{m,j}(x, D) \varphi\|_{L^2}^2 + M \delta \sum_{|p|=m-1} \|D^p \varphi\|_{L^2}^2$$

où M est une constante, et où $P_{m,j}(x, D)$ est l'opérateur (à coefficients variables) obtenu en substituant $\frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial X_k}$ à X_k dans $\frac{-1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial X_j} P_m(x, X)$.

Parvenus à ce point, nous voyons que :

$$(c' - M\delta) \sum_{|p| \leq m-1} \|D^p \varphi\|_{L^2}^2 \leq B_1 \sum_j \|P_{m,j}(x, D) \varphi\|_{L^2}^2.$$

On essaie ensuite d'établir une majoration du type suivant :

$$(1) \quad \sum_j \|P_{m,j}(x, D) \varphi\|_{L^2}^2 \leq A_1 \delta [\|P(x, D) \varphi\|_{L^2}^2 + \\ + \left(\sum_{|p| \leq m-1} \|D^p \varphi\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}] + \left(\sum_{|p| \leq m-1} \|D^p \varphi\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

qui, jointe à la précédente, donne :

$$(c' - M\delta - A_1 \delta) \left(\sum_{|p| \leq m-1} \|D^p \varphi\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \leq A_1 \|P(x, D) \varphi\|_{L^2}.$$

Il suffira enfin de choisir Ω assez petit pour que $\delta < \frac{c'}{M + A_1}$.

Pour établir (1), on procède en s'inspirant de la démonstration du lemme 1 ([2]).

On part pour cela de

$$\langle x_k (P_m(x, D) \varphi), \overline{P_{m,k}(x, D) \varphi} \rangle = \|P_{m,k}(x, D) \varphi\|_{L^2}^2 + \\ + \langle P_m(x, D) [x_k \varphi(x)], \overline{P_{m,k}(x, D) \varphi} \rangle$$

et on transpose convenablement les dérivations et les multiplications. On parvient au résultat grâce au fait suivant : puisque les coefficients de $P_m(x, D)$ sont réels, il existe un opérateur différentiel $S(x, D)$ tel que

$$\tilde{P}_m(x, D) P_{m,k}(x, D) - \tilde{P}_{m,k}(x, D) P_m(x, D) - S(x, D) P_m(x, D)$$

ne fasse intervenir que des dérivations d'ordre $\leq 2(m-1)$, tandis que $S(x, D)$ lui-même est d'ordre $\leq m-1$. Rappelons que $\tilde{Q}(x, D)$ est défini par :

$$\langle Q(x, D) \varphi, \overline{\psi} \rangle = \langle \varphi, \overline{\tilde{Q}(x, D) \psi} \rangle$$

par exemple pour toutes $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$. Remarquons que le fait précédent n'est plus vrai en général si on ne suppose pas les coefficients réels, comme l'atteste le cas de

$$P_m(x, D) = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} .$$

On a $\tilde{P}_m(x, D) = -\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$, et $P_{m,1}(x, D) = 1$, d'où :

$$\tilde{P}_m(x, D)P_{m,1}(x, D) - \tilde{P}_{m,1}(x, D)P_m(x, D) = -2 \frac{\partial}{\partial x}$$

et notre assertion est en défaut.

Pour interpréter le théorème 1, introduisons l'espace $\mathcal{C}_{L^2}^m(\Omega)$ des fonctions définies sur Ω , dont toutes les dérivées (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre m inclus, appartiennent à $L^2(\Omega)$. On définit sur $\mathcal{C}_{L^2}^m(\Omega)$ une structure hilbertienne, et on note $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{C}_{L^2}^m(\Omega)$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{L^2}^m(\Omega)$. Alors la conclusion du théorème 1 implique l'existence d'une application linéaire continue J_1 de $L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{O}_{L^2}^{m-1}(\Omega)$, telle que $J_1 P(x, D)f = f$ pour toute $f \in \mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$. Comme les propriétés exigées par le théorème 1 sont vraies pour le transposé $\tilde{P}(x, D)$ dès qu'elles le sont pour $P(x, D)$, on en déduit qu'il existe une application linéaire continue J_2 de $\mathcal{O}_{L^2}^{m-1}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ telle que $P(x, D) J_2 f = f$ pour toute $f \in \mathcal{O}_{L^2}^{m-1}(\Omega)$.

Soulignons que Ω ne saurait être un voisinage arbitraire de 0 ; il dépend en général de l'opérateur $P(x, D)$, comme le prouve le contre-exemple suivant :

On considère l'opérateur $P(x, D) = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + \alpha(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$ sur \mathbb{R}^3 ; $\alpha(x, y, z)$ est une fonction réelle, indéfiniment dérivable, non nulle pour $x = y = 0$ mais nulle pour $0 < a \leq x^2 + y^2 \leq b$. L'opérateur $P(x, D)$ est de type principal ; ses coefficients sont réels et indéfiniment différentiables. Néanmoins, si $\varphi(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^1)$ a son support dans (a, b) ,

$$P(x, D) \varphi(z) \varphi(x^2 + y^2) = 0 ,$$

ce qui exclut l'existence d'un inverse (au sens ci-dessus) pour $P(x, D)$ lorsque Ω ne remplit pas certaines conditions.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HÖRMANDER (Lars). - On the theory of general partial differential operators, Acta Math., t. 94, 1955, p. 161-248.
- [2] TRÈVES (François). - Thèse d'Hörmander, I, Séminaire Bourbaki, t. 8, 1955/56, Exposé n°130.

[Juillet 1957]
