Séminaire N. Bourbaki

René Thom

Les singularités des applications différentiables

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. nº 134, p. 357-369

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__357_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LES SINGULARITÉS DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

par René THOM

NOTATIONS. - On considère des applications différentiables de R^n dans R^p. Conformément à la terminologie d'EHRESMANN, R^n sera appelé l'espace-source, R^p l'espace-but de l'application f. En un point x de la source, le rang r de l'application f est inférieur à $\inf(n, p)$. Les différences $s = n - r$, $b = p - r$ sont des entiers positifs appelés corang à la source, resp. au but en x. L'application f admet en x un point régulier si, en ce point, $r = \inf(n, p)$ un point y du but R^p est dit une valeur régulière $(n \geqslant p)$, si tout point de l'image réciproque $f^{-1}(y)$ est régulier pour f. Rappelons que, d'après un théorème de A. SARD [5], les valeurs régulières d'une application f de R^n dans R^p, de classe C^m, forment un ensemble partout dense de R^p dès que $m \geqslant n - p + 1$.

Soient N^{p-q} une sous-variété de M^p, de codimension q, y un point de N^{p-q}. Dans un voisinage U de y, N^{p-q} est définie par un système de coordonnées locales, représenté par une application $\Phi : U \longrightarrow R^q$, partout régulière telle que $U \cap N^{p-q} = \Phi^{-1}(0)$. L'application f de R^n dans R^p sera dite "transversalement régulière sur N^{p-q} en y" si, pour un voisinage U assez petit, l'application composée $\Phi \circ f$ admet 0 pour valeur régulière. Cette notion est évidemment indépendante du système de cartes choisi. Si tout point de N^{p-q} est une valeur transversale régulière pour f (f t-régulière sur N^{p-q}), l'image réciproque $f^{-1}(N^{p-q})$ est une sous-variété X^{n-q} de codimension q, dont les $\Phi \circ f$ constituent un système de cartes locales.

ESPACES FONCTIONNELS. - On désigne par $L^m_{n,p}$ l'espace des applications de classes C^m de R^n dans R^p, muni de la topologie définie par sup des valeurs absolues des dérivées partielles d'ordre $\leq m$ sur tout compact. $L^m_{n,p}$ est un espace de Fréchet, donc un espace de Baire.

DÉFINITION. - Une propriété (P) des applications $f \in L^m_{n,p}$ sera dite générique, si l'ensemble des f, qui ne présentent pas la propriété (P) en au moins un point d'un compact K de la source, forme un sous-ensemble rare de $L^m_{n,p}$; par suite l'ensemble des f, qui ne présentent pas (P) en au moins un point de R^n, forme un sous-espace maigre de $L^m_{n,p}$.

1. Un théorème de régularisation.

Désignons par (x_i) , $i = 1 , 2,\dots,n$, les coordonnées dans la source R^n , par (y_j) , $j = 1 , 2 , \dots , p$, des coordonnées dans le but. On considère par ailleurs un espace euclidien R^N , de coordonnées $u_1 , u_2 , \dots , u_N$. On supposera donnée, dans R^N , une sous-variété Y^{N-k} , définie, au moins localement, par un système de k équations :

$$G_j(u_1 , u_2 , \dots , u_N) = 0 \qquad j = 1 , 2 , \dots , k \tag{1}$$

Soit alors f une application de $L^r_{n,p}$, définie par les p fonctions $y_j = y_j(x_i)$ supposons qu'on identifie les variables u_ℓ , aux variables x_i , y_j , puis aux dérivées partielles

$$\frac{\partial y_j^s}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}}$$

jusqu'à l'ordre $m \leq r$ inclus. A toute application f correspond ainsi une application F de R^n dans R^N , de classe C^{r-m} . On peut alors montrer

THÉORÈME 1. - A toute application $f \in L^r_{n,p}$, où $r \geq n - k + m + 1$, correspond génériquement une application $F : R^n \to R^N$, t-régulière sur la sous-variété Y^{n-k} .

COROLLAIRE. - L'ensemble des points de R^n pour lesquels une application f générique satisfait à un système d'équations aux dérivées partielles

$$G_j(x_i , y_j , \frac{\partial y_j^s}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}}) = 0 \qquad j = 1 , 2 , \dots , k$$

(les différentielles dG_j étant linéairement indépendantes par rapport aux variables u_ℓ) est une sous-variété régulièrement plongée de codimension k de R^n .

APERÇU DE LA DÉMONSTRATION [Cf. [8]]. - Il est clair que si une application f donne naissance à une F , qui, sur un voisinage de x , est t-régulière sur Y , il en va de même de toute application assez voisine de f dans L . Le point délicat consiste à montrer qu'au voisinage de toute f il y a une g telle que l'application G correspondante est, sur un voisinage de x , t-régulière sur Y . Soit $y = f(x)$, $y \in Y$. On peut remplacer sans inconvénient, dans un voisinage de $y \in R^N$, les fonctions G_j par leurs développements Tayloriens du 1er ordre. On obtient ainsi des fonctions linéaires :

$$(1)' \qquad Q_j(x_i\ ,\ y_k\ ,\ \frac{\partial y^s}{\partial x_{(i)}}) = 0 \qquad j = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ k$$

On fait choix pour chaque Q_j d'une variable u "dominante", par exemple la dérivée partielle

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}$$

d'ordre le moins élevé possible figurant dans Q_j . On déforme alors f en substituant à y_j , autour de x la fonction

$$\bar{y}_j = y_j + \sum b_{i_1 \ldots i_m}(x_{i_1} \ldots x_{i_m}) \; .$$

En substituant dans (1)', les coefficients $b_{(i)}$ figurent linéairement dans les Q_j , et, en vertu du théorème de A. SARD cité plus haut, on peut déterminer ces coefficients $b_{(i)}$ de telle façon que l'application F correspondante soit t-régulière sur Y pour un voisinage de x .

COROLLAIRE. - L'ensemble des solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles (non trivial) est un ensemble rare de $L^r_{n,p}$.

2. Classification des singularités d'une application.

En un point singulier d'une application f , les deux corangs b , s ne sont pas nuls. On désignera par $S_i(f)$ le lieu des points x de l'espace source R^n en lesquels le corang au but b a la valeur i .

A toute application $f : R^n \longrightarrow R^p$, associons son graphe $\Gamma(f)$ dans R^{n+p} . En tout point $(x\ ,\ y)$ $(y = f(x))$, le graphe $\Gamma(f)$ admet un n-plan tangent. En menant par l'origine 0 le n-plan parallèle, on définit une application f de R^n dans la grassmanienne G^p_n des n-plans orientés dans R^{n+p} . Dans G^p_n , l'ensemble (F_r) des n-plans qui se projettent "horizontalement" suivant un sous-espace linéaire de dimension $(p - r)$ de R^p admet pour adhérence le cycle mod 2 (ou entier) dont le symbole de Schubert est

$$(\underbrace{p - r\ ,\ p - r\ ,\ \ldots\ ,\ p - r}_{(n - p + r)}\ ,\ \underbrace{p\ ,\ p\ ,\ \ldots\ ,\ p}_{p - r})$$

La codimension de F_r dans G^p_n est égale à

$$np - (p - r)\ (n - p + r) - p(p - r) = r(n - p + r)\ .$$

En un point "générique" de F_r , on peut trouver une carte locale dans G_n^p , représentée par les coefficients d'une matrice à p lignes et n colonnes telle que les éléments des $(p - r)$ premières lignes et colonnes forment un mineur non nul. On obtient un système d'équations locales pour F_r en annulant tous les mineurs d'ordre $(p - r + 1)$ contenant ce mineur. Il y en a effectivement autant que d'éléments dans le rectangle complémentaire, soit $r.(n - p + r)$. Les coefficients de la matrice sont, pour le n-plan tangent à (f) , les dérivées partielles premières $\frac{\partial y_j}{\partial x_j}$. Si l'on remarque que l'ensemble critique S_r est par définition l'image réciproque par $\dot{f}$ du cycle F_r de G_n^p , on peut appliquer le théorème 1 à cette application $\dot{f}$, et l'on obtient :

THÉORÈME 2. - Pour une application $f \in L_{n,p}^r$, où $r \geqslant n + 2 - bs$, l'application "dérivée" $\dot{f} : R^n \longrightarrow G_n^p$ est t-régulière sur le cycle F_r . Par suite, l'ensemble S_b des points singuliers de corang au but égal à b est génériquement une sous-variété, (sans singularités) de codimension

$$b(n - p + b) = sb. \tag{2}$$

Mnémotechniquement : la codimension générique d'un ensemble critique d'une application est égale au produit du corang à la source par le corang au but.

APPLICATIONS. - Si la dimension n de la source est strictement inférieure au produit s.b des corangs, alors l'ensemble singulier $S_b(f)$ est génériquement vide, i.e. on peut toujours le faire disparaître par une déformation arbitrairement petite de f . Par exemple, pour une application de $L_{3,3}^1$, l'ensemble singulier S_2 est génériquement vide $(3 < 2.2)$.

EXEMPLES de singularités. - Pour $L_{n,1}$ (fonctions sur R^n), il n'y a pas d'autre singularité que $S_1(f)$; la codimension en est $n.1 = n$; donc $S_1(f)$ se compose de points isolés. De plus, comme $\dot{f}$ est t-régulière sur le cycle de Schubert F_1 , les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ au point critique sont linéairement indépendantes : ceci exprime que la forme quadratique du développement de Taylor en x n'est pas dégénérée. Donc :

THÉORÈME 3 (dû à Marston MORSE). - Toute fonction numérique sur R^n peut être approchée arbitrairement près dans $L_{n,1}^m$ $(m \geqslant 2)$ par une fonction g dont les seules singularités sont des points critiques quadratiques non dégénérés.

De même une application de $L_{n,2}$ n'a pas d'autres singularités que S_1 , qui est alors une courbe critique. Il en va de même pour les applications de

$R^n \longrightarrow R^3$, qui ne peuvent présenter un S_2 non vide que pour $n \geqslant 2(n-3+2)$, soit $n \geqslant 2$. Excluant le cas trivial $n = 1$, reste $n = 2$: la codimension est 2 : on obtient ainsi la singularité connue sous le nom de "point cuspidal" d'une surface. Pour L_{44} , l'ensemble S_2 se réduit à des points isolés ; on obtient aisément un système d'équations locales pour ce type de singularités, par exemple :

$$X = x \ , \quad Y = y \ , \quad U = u\,x + v\,y \ , \quad V = u^2 + v^2 \ .$$

De façon générale, il résulte de la formule (2) que pour $n \geqslant p$, l'ensemble S_r n'est non vide que si $p \geqslant r^2$. Si, n étant fixé, on fait varier la dimension p du but, on constate qu'il y a "isomorphisme" pour les dimensions des ensembles critiques des applications de R^n dans R^{n+k} d'une part, dans R^{n-k} d'autre part: pour $L_{n,n+k}$ et $L_{n,n-k}$, les ensembles S_{k+r} , S_r resp. ont la même codimension $r(k+r)$. On pourrait parler en ce cas de singularités "duales".

Il est facile de montrer que dès que la condition (2) $n \geqslant s.b$ est satisfaite, il existe effectivement des applications de $L_{n,p}$ qui présentent des singularités de ce type : on peut donner leurs équations locales à l'aide de formes quadratiques. Bien entendu, la seule donnée du corang ne suffit pas à caractériser le type topologique de la singularité ; d'autres invariants (en général, d'ailleurs non explicités) sont nécessaires ; par exemple, pour définir un point critique d'une fonction sur R^n , il faut se donner de plus l'indice de la forme quadratique du développement de Taylor au point.

Plongement de S_{r+1} dans $\overline{S}_r$. - Il est clair, par continuité, que S_{r+1} est plongé dans l'adhérence de S_r . Si f est générique, l'application f de R^n dans G_n^p est t-régulière sur F_{r+1} ; le plongement local de S_{r+1} dans $\overline{S}_r$ est donc isomorphe à celui de F_{r+1} dans $\overline{F}_r$. Ce dernier plongement est aisé à déterminer : on obtient F_r dans un système d'équations locales définissant F_{r+1} , donné par une matrice à $(r+1)$ lignes et $(n-p+r+1)$ colonnes, en annulant de cette matrice tous les mineurs d'ordre 2 ; la variété ainsi définie dans l'espace $R^{(r+1)(n-p+r+1)}$ des éléments de la matrice, est, topologiquement, un cône admettant pour base le produit de sphéres $S^r \times S^{n-p+r}$. Noter que,

$$\text{codimension } S_{b+1} - (\text{codimension } S_b) = (b+1)(s+1) - sb = (s+b+1) \ .$$

Ainsi : l'adhérence de S_b n'est pas une sous-variété ; c'est seulement une pseudo-variété admettant S_{b+1} comme lieu de points singuliers.

3. Variétés critiques exceptionnelles.

Le lieu critique $S_r(f)$ est génériquement une sous-variété de codimension $r.(n-p+r)$; dans le cas, seul intéressant ici, $n \geqslant p$, on a $r \geqslant 1$, $s \geqslant n-p+1$, de sorte que $\dim S_r \leqslant p-1$: la dimension générique d'une variété critique est toujours strictement inférieure à la dimension du but. On peut se demander, dans ces conditions, si l'image $f(S_r)$ de la variété critique sera une sous-variété sans singularités dans le but. Or, en étudiant le rang de la restriction de f à S_r, on voit que l'abaissement du rang de la restriction de f à S_r en un point fait intervenir des conditions non triviales portant sur les dérivées secondes de l'application f. Le théorème 1 permet par suite d'affirmer que f applique S_r avec rang maximum (= dimension de S_r) en presque tout point de S_r. Le rang ne s'abaisse de j unités que sur une sous-variété $S_j(S_r)$ plongée sans singularités dans S_r, mais dont l'adhérence contient S_{j+1} comme lieu de points singuliers. Une telle sous-variété sera appelée variété critique (exceptionnelle) d'ordre 2. La connaissance des variétés critiques exceptionnelles est indispensable pour déterminer le type topologique d'une application. En effet, S_r est appliquée par f sur son image $f(S_r)$ avec rang maximum, sauf sur les singularités exceptionnelles $S_1(S_r)$. Il en résulte que dans l'espace-but, $f(S_r)$ est une sous-variété qui présente comme lieu singulier $f(S_1(S_2))$. L'exemple le plus simple de singularités du second ordre apparaît pour une application de R^2 dans R^2. Il s'agit de la singularité "cusp" étudiée récemment par WHITNEY [6], et représentée localement par les équations : $X = x$, $Y = xy - y^3$. Elle donne naissance, dans le plan-but, à un rebroussement de la courbe des valeurs critiques ; on sait, en effet, que le contour apparent d'une surface présente en général des points de rebroussements Il importe de bien voir que ces singularités sont "stables", c'est-à-dire qu'elles subsistent pour une petite déformation de l'application ; cependant, considéré comme singularité d'une courbe, le rebroussement n'est pas une singularité générique.

Si l'on étudie comment f applique les singularités du 2e ordre, on constate que f les applique dans le but avec rang maximum, sauf sur certaines sous-variétés, dites exceptionnelles du 3e ordre $S_i(S_j(S_r))$, dont la détermination fait intervenir les dérivées du 3e ordre de f. Et ainsi de suite ... on définira des variétés exceptionnelles d'ordre k, dont la détermination fait intervenir les dérivées d'ordre k de f ; l'image par f d'une variété critique d'ordre k est un lieu de points singuliers pour l'image par f de la variété d'ordre

$k-1$ dans laquelle elle est définie. On notera qu'ainsi pour une application générique $f \in L_{n,p}$ les diverses variétés critiques exceptionnelles de la source sont appliquées par f dans le but avec conservation de la dimension. Autrement dit, si, dans $L_{n,p}$, avec $p \leq n$, on forme la partition de l'espace source définie par les variétés critiques des divers ordres, on constate que, génériquement, l'abaissement de dimension n'a lieu qu'en un point régulier de l'application. Ceci permet d'affirmer :

THÉORÈME 4. - Pour une application $f : R^n \to R^p$, générique, l'image réciproque $f^{-1}(y)$ de tout point y de R^p est de dimension $\leq n-p$.

Existence et dimension des variétés critiques exceptionnelles. - On ignore si des singularités exceptionnelles d'un type donné $S_i(S_j(S_r))$ existent génériquement pour une $f \in L_{n,p}$. De plus, lorsqu'elles existent, il n'y a pas, semble-t-il, de formule semblable à (2) qui permette de calculer leur dimension. La formule (2) donne en tout cas une borne supérieure pour la codimension d'une variété exceptionnelle. Toutefois, l'expérience montre que, du fait de l'existence de relations d'"intégrabilité" de la forme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} \quad :$$

la codimension peut se trouver abaissée. (Exemple la singularité $S_2(S_1)$ pour $L_{4,3}$). Autrement dit : les variétés critiques d'une application "attrapent" plus facilement des singularités qu'une variété ordinaire. Faute d'avoir un procédé permettant une étude générale et systématique des variétés exceptionnelles, j'ai déterminé empiriquement ces singularités pour les petites dimensions n, $p \leq 4$. Les résultats (dont l'exactitude n'est pas totalement garantie) sont consignés dans le tableau suivant :

n \ p	1	2	3	4
1	S_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
2	S_1	S_1 $S_1(S_1)$ (cusp)	S_2 (Point cuspidal)	$\emptyset$
3	S_1	S_1 $S_1(S_1)$	S_1 $S_1(S_1)$ $S_1(S_1(S_1))$	S_2 (courbe de points cuspidaux)
4	S_1	S_1 $S_1(S_1)$	S_1 $S_1(S_1)$ $S_1(S_1(S_1))$	S_1 $S_1(S_1)$ $S_1(S_1(S_1))$ $S_1(S_1(S_1(S_1)))$ S_2 (Points isolés)

Il serait intéressant de donner un procédé formel permettant la construction de ce tableau. On notera toutefois que toute translation parallèle à la diagonale principale (dans le sens descendant) définit une <u>injection</u> du tableau dans lui-même. C'est là un fait général : l'opération géométrique correspondante est la <u>suspension</u>, bien connue en topologie, et il n'est pas difficile de voir que pour qu'une singularité soit générique, il faut et il suffit que sa suspendue le soit. On peut également penser que pour p fixé, toutes les singularités génériques des applications de R^n dans R^p sont isomorphes, dès que n est assez grand (probablement $n \geq 2p$ suffit). Mais le fait n'est pas établi.

La connaissance des variétés critiques exceptionnelles de tous ordres, ainsi que de leurs images dans le but, ne suffit pas à déterminer le type topologique d'une application. En effet, pour une application du type plongement $(p > n)$, il faut y joindre la donnée des ensembles de "self-intersection", variété image des couples x, x' tels que $f(x) = f(x')$ par exemple. Une simple généralisation du théorème 1 montre que pour une f générique les ensembles de self-intersection sont de vraies sous-variétés (emboîtées avec singularités les unes dans les autres) ; de plus ces variétés de self-intersection ont dans leur adhérence les images des variétés critiques de f. Le premier exemple de ce phénomène est donné par le point cuspidal d'une surface, qui est point d'arrêt pour la courbe double de la surface.

Si l'on ajoute, pour compléter le tableau, que les images des variétés critiques présentent génériquement elles-mêmes des variétés de self-intersection, on aura une idée (très faible) de la complexité requise pour décrire le type topologique d'une application, même générique, dès que les dimensions en jeu dépassent 3 ou 4.

4. Problèmes d'équivalence.

On dira que deux applications f, $g \in L^r_{n,p}$ sont C^m-équivalentes, s'il existe deux homéomorphismes de classe C^m, h et h' de la source et du but tels que $g = h' f h^{-1}$. Elles seront dites C^m-continûment équivalentes, si g dépendant d'un paramètre réel t, les homéomorphismes h et h' dépendent m fois différentiablement de t.

Avant d'aborder le problème global d'équivalence, il est utile de considérer d'abord le problème local ; il s'agit essentiellement de donner, autour d'un point singulier de f une "forme canonique", la plus simple possible. Par exemple, en un point régulier, toute application de classe C^m est C^m (continûment) équivalente à une application linéaire. On peut penser qu'une application générique f de $L^r_{n,p}$ est C^1-continûment équivalente à toute application déformée de f, assez voisine de f. La chose peut être établie sans trop de difficultés pour les fonctions sur R^n. Il est déjà beaucoup plus délicat de l'établir pour la singularité "cusp" de WHITNEY. On peut penser qu'elle reste valable dans des conditions plus générales. Un fait néanmoins est à souligner : même si l'on fait croître la classe r des applications, on ne pourra pas affirmer que la classe m des équivalences croît simultanément : il apparait ici un phénomène assez inattendu de "rigidité du différentiable", mis en évidence en particulier par R. ISS [1] : dans l'étude des équivalences locales des "jets" de R^1 dans R^n, ISS a montré qu'il existe des applications singulières de R^1 dans R^2, qui ne sont C^m-équivalentes à aucun de leur développement taylorien. Il semble tout à fait vraisemblable que ce phénomène soit très général, dès que les singularités mises en jeu sont un peu compliquées. C'est pourquoi une théorie de l'équivalence, si elle veut un large domaine de généralité, doit se restreindre à des homéomorphismes C^1, voire peut-être uniquement lipschitziens. Dans ces conditions, on peut faire la conjecture suivante :

Une application f générique, présentant à l'origine O un point critique exceptionnel d'ordre k, est C^1-équivalente autour de O à l'application $j^{k+1}(f)$ obtenue en arrêtant le développement de Taylor de f à l'ordre $(k + 1)$.

Signalons, dans le même ordre d'idées, le théorème suivant, relatif aux fonctions :

Si une fonction de classe C^m sur R^n , f , est telle que son développement de Taylor d'ordre k $j^k(f)$ présente en 0 un point singulier isolé, alors f est localement C^{m-1}-équivalente à $j^k(f)$ $(k < m)$.

Cas particulier (Marston MORSE). - 0 est un point critique non dégénéré ; alors dans une carte convenable, f s'exprime comme une vraie forme quadratique.

Applications presque-génériques. - Une application $f \in L_{n,p}$ sera dite "presque-générique", si l'ensemble des déformées de f équivalentes à f forme, dans un voisinage de f dans $L_{n,p}$, un sous-ensemble de codimension finie de $L^r_{n,p}$. Par exemple, dans L^m_{11} , les fonctions qui admettent un point d'inflexion (de type usuel) forment un sous-espace de codimension 1 , celles qui admettent deux inflexions, ou un méplat, un sous-ensemble de codimension 2 , etc. On peut définir ainsi, dans les espaces $L_{n,p}$, des sortes de subdivisions co-cellulaires, dont l'étude serait d'un grand intérêt pour les problèmes d'isotopie et de variétés plongées, ainsi que pour certaines questions de Calcul des Variations.

5. Propriétés globales.

Etant données deux variétés différentiables V^n , M^p , on désigne par $L(V^n , M^p ; r)$ l'espace des applications de classe C^r de V^n dans M^p , muni de la topologie définie par l'écart sur les dérivées partielles de tout ordre r sur tout compact. $L(V^n , M^p ; r)$ est encore un espace de Baire, et l'on a par suite la notion de propriété générique.

Les propriétés de singularités génériques s'étendent sans difficultés au cas des variétés ; par exemple, toute fonction sur V^n peut être approchée d'aussi près qu'on veut dans $L(V^n , R^1 ; m)$ par une fonction g dont les seules singularités sont des points critiques quadratiques non dégénérés.

On peut se demander également si des applications partout localement équivalentes sont globalement équivalentes ; la réponse n'est pas connue ; néanmoins, s'il s'agit d'équivalence continue (en un sens assez fort), on peut, par une somme de champs de vecteurs pondérée selon une partition de l'unité, montrer que l'équivalence locale implique l'équivalence globale continue. Un problème voisin est le suivant : disons qu'une application f est localement algébroïde, si elle est localement équivalente à une application algébrique. (Les applications génériques et presque-génériques sont, en tout point, localement algébroïdes). Peut-on affirmer alors que f est globalement équivalente à une application algébrique ? (Rappelons qu'une variété V^n , plongée dans R^m , est partout localement algébroïde, et qu'elle peut être isotopiquement déformée en une nappe de variété algébrique réelle). (Théorème de J. NASH [4]).

Propriétés homologiques des variétés critiques. – On a vu que les ensembles critiques du premier ordre S_r ont génériquement pour adhérence une pseudo-variété ; ce sont donc des cycles mod 2 (quelquefois entiers) ; c'est un fait d'expérience qu'il en va de même pour les cycles critiques exceptionnels d'ordre quelconque ; bien qu'une démonstration rigoureuse n'en soit pas fournie, nous admettrons le fait (qui découle pratiquement du fait que toute variété algébrique réelle a un cycle fondamental mod 2).

Etant données deux applications f, g de V^n dans M^p, génériques et homotopes, on peut toujours supposer l'homotopie réalisée par une application $F : V^n \times I$ dans $M^p \times I$, elle-même générique ; on suppose que F applique (V, t) dans (M^p, t) suivant l'application f_t $(f_0 = f, \ f_1 = g)$. Dans ces conditions, les ensembles critiques d'un type donné pour f et g sont bords, dans $V \times I$, de l'ensemble critique relatif à la singularité suspendue. Comme l'adhérence de cet ensemble critique est un cycle mod 2, on peut en conclure :

THÉORÈME 5. – Les classes d'homologie mod 2 des cycles critiques exceptionnels d'un type donné pour une application $f : V^n \to M^p$ sont des invariants d'homotopie de l'application f.

REMARQUE. – En fait ce sont des invariants d'une nature plus générale : on pourrait, dans le raisonnement précédent, remplacer le produit $V \times I$ par une variété à bord quelconque admettant $(V, 0)$ et $(V, 1)$ pour bord.

1° Cas des variétés critiques du premier ordre.

Le théorème étant établi en ce cas, on en déduit que les classes d'homologie des cycles critiques pour une application de V_n dans un espace euclidien R^k sont des invariants de la structure différentiable de V^n. D'ailleurs :

Le cycle critique $S_1(f)$ d'une application $f : V^n \to R^{n-k}$ est dual à la classe de Stiefel-Whitney W^{k+1} de la structure fibrée des vecteurs tangents.

Le cycle critique $S_{k+1}(f)$ d'une application $f : V^n \to R^{n+k}$, des singularités duales, est dual à la classe "duale" $\overline{W}^{k+1}$ de la structure fibrée des vecteurs normaux à V^n dans R^m.

Ceci résulte immédiatement de l'expression de F_1 comme cycle de Schubert dans la grassmanienne.

De même, la singularité $S_2(f)$ pour une application $f : V^n \to R^{n-2k}$ est un cycle entier, dual à la classe de Pontrjagin $P^{2k(k+1)}$. Par exemple, le nombre de Pontrjagin $P^4(V^4)$ d'une variété de dimension 4 est la somme algébrique des points où le rang d'une application $f : V^4 \to R^4$ s'abaisse à deux. De façon générale, le cycle S_r d'une application $f : V^n \to M^{n-k}$ est à coefficients entiers si et seulement si r et k sont pairs. Pour une application dans l'espace euclidien, ces classes sont duales à certains polynômes des classes de Pontrjagin, dont l'expression explicite n'est pas connue, à ma connaissance.

Pour une application $f : V^n \to M^p$, $n > p$, on peut obtenir la classe mod 2 duale au cycle $S_1(f)$ par le calcul suivant : on divise le polynôme de Stiefel-Withney $\sum W^j t^t$ de V^n par l'image par f^* de celui de M^p et la classe cherchée est le terme de plus bas degré du reste. Pour déterminer la classe de S_r, $r > 1$, je ne connais pas de procédé général.

2° Variétés critiques exceptionnelles.

Les classes d'homologie des variétés critiques exceptionnelles des applications $f : V^n \to R^p$ sont, d'après le théorème 5, également des invariants de la structure différentiable de V^n. On peut donc se proposer de les calculer en fonction des invariants connus. A cet égard, les seuls résultats connus concernent les singularités du 2e ordre du type $S_1(S_1)$. On a en effet :

THÉORÈME 6. - Le nombre des points critiques exceptionnels d'une application générique de V^n dans le plan R^2 est égal mod 2 à la caractéristique d'Euler-Poincaré de V^n.

Si q est ce nombre, la courbe critique $f(S_1)$ présente q rebroussements. La classe (au sens tangentiel) de cette courbe est égale à q mod 2 ; il y a donc un nombre μ égal à q mod 2 de tangentes à $f(S_1)$ parallèles à une direction donnée, par exemple, à l'axe Ox. C'est dire que la fonction y présente sur V^n un nombre μ de points critiques égal à q mod 2, ce qui démontre le théorème.

Ce résultat admet une généralisation :

THÉORÈME 7. - La classe d'homologie duale au cycle critique d'ordre 2 $S_1(S_1(f))$, pour une application $f : V^n \to R^{n-k+1}$ est égale à $(k+1)W^k$.

Ce résultat se généralise aux applications $f : V^n \to M^p$, le rôle des classes W_j étant joué par les classes coefficients du reste de la division du polynôme de Stiefel-Whitney de V^n par f^* de celui de M^p. Rien n'est connu pratiquement sur l'homologie des cycles critiques d'ordre $\geqslant 3$. Signalons suelement :

THÉORÈME 8. - Le nombre des points critiques exceptionnels d'ordre 3 , $S_1(S_1(S_1(f)))$ d'une application $f : V^3 \rightarrow R^3$ est génériquement pair.

Ceci provient du fait que toute variété V^3 de dimension 3 est le bord d'une variété à bord M^4 à laquelle f se prolonge.

Tous ces résultats semblent confirmer l'hypothèse naturelle suivant laquelle la détermination des cycles critiques exceptionnels ne fait pas intervenir d'autres invariants que les cycles critiques du premier ordre, à savoir les classes caractéristiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ISS (Roger). - Sur les singularités des jets infinitésimaux à une dimension, Colloque de Topologie de Strasbourg, 1954-1955.

[2] MORSE (Marston). - The calculus of variations in the large. - New-York, American mathematical Society, 1934 (Amer. math. Soc. Colloquium Publications n° 18).

[3] MORSE (Marston). - Functional topology and abstract variational theory. - Paris Gauthier-Villars, 1938 (Mémorial des Sciences mathématiques n° 92) ; p. 44.

[4] NASH (John). - Real algebraic manifolds, Annals of Math., t. 56, 1952, p. 405-421.

[5] SARD (Arthur). - The measure of the critical values of differentiable maps, Bull. Amer. math. Soc., t. 48, 1942, p. 883-890.

[6] WHITNEY (Hassler). - On singularities of mappings of euclidian spaces, I : Mappings of the plane into the plane, Annals of Math., t. 62, 1955, p. 374-410.

ADDITIF

On trouvera des précisions sur le contenu de cet exposé dans deux articles de l'auteur parus ultérieurement

[7] THOM (René). - Les singularités des applications différentiables, Ann. Inst. Fourier, t. 6, 1955-1956, p. 43-87.

[8] THOM (René). - Un lemme sur les applications différentiables, Bol. Soc. mat. Mexic., 2e série, t. 1, 1956, p. 59-71.

[Mars 1958]