

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MICHEL HERVÉ

Travaux de Köcher sur les formes modulaires

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 132, p. 341-346

http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__341_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TRAVAUX DE KÖCHER SUR LES FORMES MODULAIRES

par Michel HERVÉ

1. Notations relatives aux matrices.

Les majuscules rondes (par exemple \mathcal{E} pour la matrice-unité) désignent des matrices à $2n$ lignes et colonnes ; les majuscules droites (par exemple E pour la matrice-unité) des matrices à n lignes et colonnes. Les majuscules grecques désignent des groupes. Par vecteur, on entendra une matrice à n lignes et 1 colonne.

A' est la matrice déduite de A par symétrie par rapport à la diagonale principale ; $|A|$ est le déterminant de A , $\sigma(A)$ la trace de A . Au sujet de la trace, on rappelle :

$$1^\circ \text{ que } \sigma(BAB^{-1}) = \sigma(A) ;$$

$$2^\circ \text{ que, si } A \text{ et } B \text{ sont symétriques et réelles, } A \geq 0 \text{ et } B > 0 \Rightarrow \sigma(AB) \geq 0 .$$

Les lettres S, T, U sont réservées : S aux matrices symétriques entières, T aux matrices symétriques demi-entières, c'est-à-dire telles que les éléments de la diagonale principale et les doubles des autres éléments soient entiers, U aux matrices unimodulaires, c'est-à-dire entières et de déterminant ± 1 .

2. Le groupe symplectique \sum_n .

C'est le groupe des matrices réelles \mathfrak{N} telles que

$$(1) \quad \mathfrak{N}' \begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix} \mathfrak{N} = \begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix} .$$

Si l'on pose

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} ,$$

la relation (1) équivaut à

$$(1') \quad A'C - C'A = B'D - D'B = 0 , \quad A'D - C'B = E .$$

Si \mathfrak{N} vérifie (1), \mathfrak{N}' aussi vérifie (1) et $|\mathfrak{N}| = 1$.

Les principaux sous-groupes de \sum_n considérés par KÖCHER sont :

- a. le sous-groupe modulaire Γ_n , formé des matrices entières \mathcal{M} vérifiant (1) ;
- b. pour chaque entier q , le sous-groupe de congruence $\Gamma_n(q)$, formé des $\mathcal{M} \in \Gamma_n$ telles que $\mathcal{M} \equiv \pm \mathcal{E} \pmod{q}$. L'index $[\Gamma_n : \Gamma_n(q)]$ est fini ; une récurrence sur n permet de le calculer.

3. Les automorphismes symplectiques.

Ils opèrent sur le demi-plan généralisé h_n , partie ouverte de $\mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ définie comme suit : les coordonnées d'un point de h_n sont les éléments d'une matrice Z telle que $Z' = Z$ et $\text{Im } Z > 0$.

Les automorphismes analytiques de h_n sont les applications

$$(2) \quad Z \rightarrow \mathcal{M} \langle Z \rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \quad \text{où } \mathcal{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \sum_n ;$$

ils forment un groupe transitif ; seules les matrices $\pm \mathcal{M}$ définissent le même automorphisme.

On vérifie la formule

$$(3) \quad \mathcal{M}_1 \langle \mathcal{M}_2 \langle Z \rangle \rangle = (\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2) \langle Z \rangle$$

et, en posant

$$j_{\mathcal{M}}(Z) = |CZ + D| \quad \text{avec } \mathcal{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

la formule

$$(4) \quad j_{\mathcal{M}_1}(\mathcal{M}_2 \langle Z \rangle) = \frac{j_{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2}(Z)}{j_{\mathcal{M}_2}(Z)}$$

A chaque matrice $\mathcal{M} \in \sum_n$ peut être associé un opérateur $\overset{\circ}{\mathcal{M}}_k$ agissant sur les fonctions f définies sur h_n :

$$(5) \quad \overset{\circ}{\mathcal{M}}_k f(Z) = [j_{\mathcal{M}}(Z)]^{-k} f(\mathcal{M} \langle Z \rangle)$$

où k est un entier ; lorsque cet entier est fixé, on peut écrire $\overset{\circ}{\mathcal{M}}$ au lieu de $\overset{\circ}{\mathcal{M}}_k$. Avec cette convention, des formules (3) et (4) on déduit

$$(6) \quad \overset{\circ}{\mathcal{M}}_2(\overset{\circ}{\mathcal{M}}_1 f)(Z) = (\overset{\circ}{\mathcal{M}}_1 \overset{\circ}{\mathcal{M}}_2) f(Z).$$

Notons que, pour S entière et symétrique, $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} \in \Gamma_n$ et $\overset{\circ}{\mathcal{M}} f(Z) = f(Z + S)$

4. Les formes modulaires considérées par SIEGEL [3].

SIEGEL considère le groupe modulaire Γ_n et construit dans h_n un domaine fondamental S_n pour ce groupe ; $Z \in S_n$ si les 3 conditions suivantes sont remplies :

1° pour chaque $\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n$, $|CZ + D|$ est de module ≥ 1 ;

2° la matrice $\text{Im } Z$ est réduite au sens de MINKOWSKI [3] ;

3° la matrice $\mathfrak{Q} \in Z$ a tous ses éléments compris entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Une conséquence de ces conditions est que $Z \in S_n \implies \text{Im } Z > c_1 E$, c_1 étant une constante positive. D'autre part S_n n'est pas borné, car $\lambda \gg 1 \implies i\lambda E \in S_n$.

SIEGEL dit que $f(Z)$ est une forme modulaire de poids k si $f(Z)$ remplit les 3 hypothèses suivantes :

1° sur h_n , $f(Z)$ est fonction holomorphe des $\frac{n(n+1)}{2}$ éléments de Z

2° $\mathfrak{M} \in \Gamma_n \implies \mathfrak{M}_k f(Z) \equiv f(Z)$; en particulier, $f(Z + S) \equiv f(Z)$;

3° $f(Z)$ est bornée sur le domaine fondamental S_n .

Avec cette définition, il montre :

a. que toute forme modulaire de poids négatif (resp. nul) est identiquement nulle (resp. constante) ;

b. en utilisant l'hypothèse 3, que, dans le développement de Fourier (normalement convergent sur tout compact de h_n) d'une forme modulaire $f(Z)$:

$$f(Z) = \sum_{T} a(T) e^{2i\pi \sigma(TZ)},$$

$a(T) \neq 0 \implies T \geq 0$;

c. à l'aide de b, que l'espace vectoriel sur \mathbb{C} des formes modulaires de poids $k > 0$ a une dimension

$$O\left(k \frac{n(n+1)}{2}\right) ;$$

de là résulte, par le procédé classique, que $\frac{n(n+1)}{2} + 2$ formes modulaires sont liées par une relation algébrique isobarique ; les séries d'Eisenstein (analogues à celles de Poincaré) permettent de construire $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ formes modulaires qui ne sont pas liées par une telle relation.

5. Principaux résultats de KÖCHER [1] .

Le résultat le plus frappant est que, pour $n > 1$, l'hypothèse 3 de Siegel (fonction bornée sur le domaine fondamental) est une conséquence des deux autres, non seulement pour les formes relatives au groupe modulaire Γ_n , mais aussi pour les formes relatives au groupe de congruence $\Gamma_n(q)$. Voici la démonstration complète de ce résultat.

LEMME (valable seulement pour $n > 1$) . - Si l'on a pas $T \leq 0$ (resp. $T \geq 0$) , étant donnés les entiers q et m , il existe une matrice unimodulaire U telle que $U \equiv \begin{pmatrix} 1 & \\ & \ddots \\ & & 1 \end{pmatrix} E \pmod{q}$, $|U| = 1$ et $\sigma(U' TU) > m$ (resp. $< -m$) .

Si l'on n'a pas $T \leq 0$, il existe un vecteur x , à éléments entiers x_i , tel que $x' Tx > 0$; soient A la matrice formée de n colonnes identiques à x , et D une matrice réduite à une diagonale principale formée d'entiers d_i . Comme $\sigma(AD) = \sum_{i=1}^n d_i x_i$, on peut choisir $D \neq 0$ telle que $\sigma(AD) = 0$; ce choix fait, si l'on pose $U = E + dAD$ (d entier multiple de q) , on a $U \equiv E \pmod{q}$, $|U| = 1 + d \sigma(AD) = 1$ et $\sigma(U' TU) = \sigma(T) + 2 d \sigma(TAD) + d^2 \sigma(D^2) \cdot x' Tx$, donc U répond à la question dès que d est assez grand.

THÉOREME . - Toute forme relative au groupe de congruence $\Gamma_n(q)$ est bornée pour $\text{Im } Z \gg cE$, quel que soit le nombre $c > 0$.

1re partie . - Si $f(Z)$ est une forme de poids k relative à $\Gamma_n(q)$, $\gamma \in \Gamma_n(q) \Rightarrow \gamma \circ_k f(Z) \equiv f(Z)$; en particulier, pour S entière et symétrique, $f(Z + qS) \equiv f(Z)$, $f(Z)$ est donc développable, et de façon unique, en série de Fourier normalement convergente sur tout compact :

$$(7) \quad f(Z) = \sum_T a(T) \exp\left(\frac{2i\pi}{q} \sigma(TZ)\right)$$

Si $U \equiv \begin{pmatrix} 1 & \\ & \ddots \\ & & 1 \end{pmatrix} E \pmod{q}$, $\gamma = \begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma_n(q)$; si en outre $|U| = 1$, $j_{\gamma}(Z) \equiv 1$, donc

$$U \equiv \begin{pmatrix} 1 & \\ & \ddots \\ & & 1 \end{pmatrix} E \pmod{q} \text{ et } |U| = 1 \Rightarrow f(U' ZU) \equiv f(Z) ;$$

alors, par suite de l'unicité du développement (7),

$$U \equiv \begin{pmatrix} 1 & \\ & \ddots \\ & & 1 \end{pmatrix} E \pmod{q} \text{ et } |U| = 1 \Rightarrow a(U' TU) = a(T) .$$

D'autre part, (7) donne en particulier

$$(7') \quad f(iE) = \sum_T a(T) \exp \left(-\frac{2\pi}{q} \sigma(T) \right)$$

et ce développement doit être absolument convergent ; mais, d'après le lemme, si pour une matrice T on a $a(T) \neq 0$ sans que $T \geq 0$, (7') a une infinité de termes de modules $> |a(T)|$, ce qui est absurde. Ainsi, dans (7), $a(T) \neq 0 \Rightarrow T \geq 0$.

2e partie. - Etant donné $c > 0$, pour $T \geq 0$,

$$\text{Im } Z > cE \Rightarrow \text{Im } \sigma(TZ) \geq \text{Im } \sigma(TicE),$$

donc, pour $\text{Im } Z > cE$, le terme général du développement (7) est majoré par le terme général du développement de $f(icE)$; comme celui-ci est absolument convergent, $f(Z)$ est bornée pour $\text{Im } Z > cE$. Le théorème est établi.

La convergence normale de (7) pour $\text{Im } Z > cE$ permet aussi de montrer que $f(Z)$ a une limite finie quand Z s'éloigne à l'infini dans certaines conditions précises : par exemple quand un élément diagonal z_{ii} de Z a une partie réelle fixe et une partie imaginaire tendant vers $+\infty$, tandis que tous les autres éléments de Z sont fixes ; la limite est fonction holomorphe des éléments de Z qui n'appartiennent ni à la i -ième ligne, ni à la i -ième colonne.

6. Autres résultats de KÖCHER [1 et 2].

Les propriétés a et c ci-dessus, établies par SIEGEL pour les formes relatives au groupe modulaire Γ_n , sont étendues sans difficulté aux formes relatives au groupe de congruence $\Gamma_n(q)$.

D'autre part, soient $f(Z)$ une forme relative à $\Gamma_n(q)$ et R une matrice symplectique rationnelle ; choisissons l'entier $p(R)$ de manière que pR et pR^{-1} soient entières, et posons

$$q' = q[p(R)]^2 : \mathfrak{m} \in \Gamma_n(q') \Rightarrow R \mathfrak{m} R^{-1} \in \Gamma_n(q)$$

donc, d'après (6),

$$\mathfrak{m} \in \Gamma_n(q') \Rightarrow \mathfrak{m} \circ (R \circ f)(Z) \equiv \mathfrak{m} \circ f(Z).$$

Ainsi $R \circ f(Z)$ est une forme relative à $\Gamma_n(q')$, et le théorème ci-dessus peut lui être appliqué, ainsi que le développement (7) (avec q' à la place de q) portant seulement sur les $T \geq 0$.

Dans [2], étant donnée une forme $f(Z)$ relative à $\Gamma_n(q)$, on étudie la famille φ obtenue en considérant, pour chaque matrice symplectique rationnelle \mathcal{R} ,

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \mathcal{R} \circ f \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & iy \end{pmatrix} \quad (\text{où } Z_1 \in h_{n-1});$$

d'après ce qui précède, cette limite existe pour chaque \mathcal{R} , et c'est une fonction de Z_1 holomorphe sur h_{n-1} . C'est même une forme relative à $\Gamma_{n-1}(q')$.

Lorsque toutes les fonctions de φ sont identiquement nulles, KÖCHER dit que $f(Z)$ est une "Spitzenform". Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que, dans le développement (7) de chaque $\mathcal{R} \circ f(Z)$, $a(T) \neq 0 \Rightarrow T > 0$.

Enfin un produit scalaire est défini dans l'espace des Spitzenformen de poids donné.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KÖCHER (Max). - Zur Theorie der Modulformen n -ten Grades, I., Math. Z., t. 59, 1954, p. 399-416.
- [2] KÖCHER (Max). - Zur Theorie der Modulformen n -ten Grades, II., Math. Z., t. 61, 1955, p. 455-466.
- [3] SIEGEL (Carl Ludwig). - Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n -ten Grades, Math. Annalen, t. 116, 1939, p. 617-657.
- [4] SIEGEL (Carl Ludwig). - Symplectic geometry, Amer. J. Math., t. 65, 1943, p. 1-86.