

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

FRANÇOIS TRÈVES

Thèse d'Hörmander, I

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 130, p. 323-332

http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__323_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÈSE D'HÖRMANDER [1], I

par François TRÈVES

SOMMAIRE. - Etant donné un polynôme différentiel $P(D)$, à coefficients constants, sur R^n , HÖRMANDER introduit systématiquement les dérivées $P^{(p)}(D)$ de ce polynôme par rapport aux $\frac{\partial}{\partial x^j}$ ($1 \leq j \leq n$). Il établit une majoration fondamentale (lemme 1) des $P^{(p)}(D)$ par $P(D)$ sur les ouverts bornés de R^n . En particulier, cette majoration conduit immédiatement à l'existence de solutions élémentaires pour $P(D)$.

Pour la première fois, HÖRMANDER donne une caractérisation complète des opérateurs différentiels à coefficients constants hypo-elliptiques (proposition 1 et 2, théorème 1).

$P(D)$ désignera l'opérateur différentiel sur R^n obtenu en substituant $\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k}$ à X_k ($1 \leq k \leq n$) dans le polynôme $P(X_1, \dots, X_n)$. Pour tout système de n entiers $p = (p_1, \dots, p_n)$ nous noterons $P^{(p)}(X_1, \dots, X_n)$ le polynôme $\frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n}}{\partial X_1^{p_1} \dots \partial X_n^{p_n}} P(X_1, \dots, X_n)$. Par ailleurs, les notations seront celles de

SCHWARTZ. Par exemple $\mathcal{D}(\Omega)$ sera l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact contenu dans l'ouvert Ω de R^n .

LEMME 1. - Si Ω est un ouvert relativement compact de R^n , on peut trouver une constante C_Ω , ne dépendant que de l'ordre m de l'opérateur différentiel $P(D)$ et Ω telle que :

$$\|P^{(p)}(D)\varphi\| \leq C_\Omega \|P(D)\varphi\|$$

quels que soient $p = (p_1, \dots, p_n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$\|\cdot\|$ désigne la norme dans $L^2(R^n)$, \langle, \rangle le produit scalaire au sens des distributions. Si T est une distribution quelconque, à support compact, on a :

$$(1) \langle x_k(T*\varphi), \overline{(x_k T)*\varphi} \rangle = \langle (x_k T)*\varphi, \overline{(x_k T)*\varphi} \rangle + \langle T*(x_k \varphi), \overline{(x_k T)*\varphi} \rangle = \\ = \| (x_k T)*\varphi \|^2 + \langle \overbrace{(x_k T)*\varphi}^{\mathcal{N}}, \overline{T*\varphi} \rangle = \| (x_k T)*\varphi \|^2 + \langle x_k [\overbrace{(x_k T)*\varphi}^{\mathcal{N}}], \\ \overline{T*\varphi} \rangle - \langle x_k^2 \overbrace{T}^{\mathcal{N}}*\varphi, \overline{T*\varphi} \rangle .$$

Rappelons que \tilde{T} est définie par $\langle \tilde{T}, \chi(x) \rangle = \langle T, \overline{\chi(-x)} \rangle$. Compte tenu de cela, (1) donne :

$$(2) \quad \| (x_k T)*\varphi \|^2 \leq \| T*\varphi \|^2 \left\{ \| (x_k^2 T)*\varphi \|^2 + 2B_k \| (x_k T)*\varphi \|^2 \right\}$$

où B_k désigne le maximum de $|x_k|$ sur le support de $T*\varphi$. Appliquons cela à $T = P(D)\delta$. Il est d'abord clair qu'il suffit de prouver le lemme pour $p = (1, 0, \dots, 0)$; nous prendrons donc $k = 1$ dans (2), car

$$-2i\pi x_1 P(D)\delta = P^{(1, 0, \dots, 0)}(D)\delta .$$

D'autre part, nous raisonnerons par récurrence sur le degré m de $P(X)$. Si $m = 1$, alors $x_1^2 P(D)\delta = 0$, et dans ce cas, (2) exprime bien le résultat désiré. Supposons le lemme vrai pour tous les polynômes de degré $\leq m - 1$. En particulier, cela suppose qu'il existe C'_h telle que :

$$\| (x_1^2 P(D)\delta)*\varphi \| \leq C'_h \| (x_1 P(D)\delta)*\varphi \| .$$

d'où

$$(3) \quad \| (x_1 P(D)\delta)*\varphi \| \leq (C'_h + 2B_1) \| P(D)\varphi \| .$$

C. Q. F. D.

En prenant $p_1 + \dots + p_n$ assez élevé, on déduit du lemme 1 que

$$\|\varphi\| \leq C_\Omega \|P(D)\varphi\|$$

D'ailleurs l'inégalité (3) montre qu'il est facile d'obtenir une majoration simple pour C_Ω . L'inégalité précédente $\|\varphi\| \leq C_\Omega \|P(D)\varphi\|$ permet d'établir (par Hahn-Banach) l'existence d'une solution élémentaire pour $P(D)$.

PROPOSITION 1. - Soit $P(X_1, \dots, X_n)$ un polynôme à coefficients complexes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° Ou bien P est un polynôme constant, ou bien lorsqu'on fixe η dans \mathbb{R}^n et lorsque $|\xi| \rightarrow +\infty$ ($\xi \in \mathbb{R}^n$), $|P(\xi + i\eta)| \rightarrow +\infty$, cette convergence étant uniforme par rapport à η si η reste dans un compact fixe.

2° A tout compact K de \mathbb{R}^n on peut faire correspondre un compact H de \mathbb{R}^n tel que $\xi \in H, \eta \in K$ impliquent $P(\xi + i\eta) \neq 0$.

3° Quel que soit $\zeta' \in \mathbb{C}^n$, $[P(\xi)]^{-1} P(\xi + \zeta') \rightarrow 1$ lorsque $|\xi| \rightarrow +\infty$ (ici encore, convergence uniforme par rapport à ζ' sur chaque compact de \mathbb{C}^n).

4° Quel que soit $\zeta' \in \mathbb{C}^n$, et quel que soit $p \neq (0, \dots, 0)$,
 $[P(\xi + \zeta')]^{-1} P^{(p)}(\xi + \zeta') \rightarrow 0$ lorsque $|\xi| \rightarrow +\infty$. La convergence est uni-
 forme par rapport à ζ' sur chaque compact de \mathbb{C}^n .

On démontre $1^\circ \Rightarrow 2^\circ \Rightarrow 3^\circ \Rightarrow 4^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Nous prouverons les implications $2^\circ \Rightarrow 3^\circ \Rightarrow 4^\circ$;
 les autres sont parfaitement évidentes.

Supposons d'abord $\zeta' \in \mathbb{R}^n$; nous pouvons même supposer que $\zeta' = (1, 0, \dots, 0)$
 en effectuant éventuellement un changement linéaire de coordonnées dans \mathbb{R}^n .

Substituons, dans $P(X_1, \dots, X_n)$, $n-1$ nombres réels quelconques

ξ_2, \dots, ξ_n à X_2, \dots, X_n respectivement et notons $P(X_1)$ le polynôme à
 une indéterminée obtenu ainsi ; si r_j ($1 \leq j \leq m$) sont les m racines de $P(X_1)$,
 (en vertu de 2°) P dépend effectivement de tous les X_k , et donc $m \geq 1$. Alors,

$$P(\xi)^{-1} P(\xi + \zeta') = \prod_{j=1}^m \left(1 + \frac{1}{\xi_1 - r_j}\right).$$

On se donne alors $\varepsilon > 0$ arbitraire ; il correspond à ε une constante finie B
 telle que $|\eta| \leq \varepsilon^{-1}$, $|\xi| \geq B$ impliquent $P(\xi + i\eta) \neq 0$. Si on prend
 $|\xi_1| \geq B + \varepsilon^{-1}$, quel que soit le zéro z de $P(X_1, \dots, X_n)$, on aura
 $|\xi - z| \geq \varepsilon^{-1}$. En particulier, cela est vrai pour $z = (r_j, \xi_2, \dots, \xi_n)$;
 on doit donc avoir $|\xi_1 - r_j| \geq \varepsilon^{-1}$, et par suite :

$$|P(\xi)^{-1} P(\xi + \zeta') - 1| \leq m \varepsilon (1 + \varepsilon)^{m-1}$$

pourvu que $|\xi_1| \geq B + \varepsilon^{-1}$.

D'autre part, il n'est pas difficile de voir que l'on peut toujours trouver r
 vecteurs $v_i \in \mathbb{R}^n$ et r nombres complexes c_i , tels que $P^{(p)}(\xi) = \sum c_i P(\xi + v_i)$.
 Si $p \neq (0, \dots, 0)$, il faut $\sum c_i = 0$, d'où l'on déduit, en vertu du résul-
 tat qui vient d'être établi :

$$(4) \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} [P(\xi)^{-1} P^{(p)}(\xi)] = \sum c_i = 0.$$

Soit alors ζ' un vecteur complexe quelconque ; la formule de Taylor donne :

$$(5) \quad P(\xi + \zeta') = P(\xi) + \sum P^{(p)}(\xi) \frac{\zeta'^p}{p!}$$

où la sommation est étendue aux indices $p \neq (0, \dots, 0)$, où $p! = p_1! \dots p_n!$
 et $\zeta'^p = \zeta_1^{p_1} \dots \zeta_n^{p_n}$. Mais alors, en divisant les deux membres de (5) par
 $P(\xi)$, et en tenant compte de (4), on voit que $P(\xi)^{-1} P(\xi + \zeta') \rightarrow 1$ lorsque
 $|\xi| \rightarrow +\infty$, uniformément par rapport à ζ' sur chaque compact de \mathbb{C}^n . Ainsi
 $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Mais en revenant à ζ' l'une des formules qui précèdent, on voit aussi
 que :

$$P(\xi + \zeta')^{-1} P^{(p)}(\xi + \zeta') + \sum c_i [P(\xi)^{-1} P(\xi + v_i + \zeta')] [P(\xi + \zeta')^{-1} P(\xi)]$$

tend vers $\sum c_i = 0$ lorsque $|\xi| \rightarrow +\infty$, avec l'uniformité en ζ' que l'on désire. $3^\circ \Rightarrow 4^\circ$.

PROPOSITION 2. - Soit un opérateur différentiel $P(D)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(L) Quels que soient l'ouvert Ω de \mathbb{R}^n et l'élément u de $L^2(\Omega)$ tel que $P(D)u \in L^2(\Omega)$ (au sens des distributions), on a aussi $P(D)(\varphi u) \in L^2(\Omega)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

(L') Quels que soient Ω et $u \in L^2(\Omega)$ telle que $P(D)u \in L^2(\Omega)$, $P^{(p)}(D)u$ est localement L^2 dans Ω pour tout $p = (p_1, \dots, p_n)$. Plus précisément, à tout ouvert relativement compact Ω' tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, correspond $A < +\infty$ (ne dépendant pas de u) telle que :

$$\|P^{(p)}(D)u\|_{\Omega'}^2 \leq A(\|u\|_{\Omega}^2 + \|P(D)u\|_{\Omega}^2).$$

Pour voir que $(L') \Rightarrow (L)$, il suffit d'appliquer une "formule de Leibniz" (fréquemment utilisée par HÖRMANDER) :

$$P(D)(uv) = \sum_p \frac{1}{p_1! \dots p_n!} [P^{(p)}(D)u] \left[\frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} v \right].$$

Prenons alors $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$, ayant son support dans Ω' ; on a :

$$\|P(D)(\alpha u)\| \leq \sum_p \|\alpha_p P^{(p)}(D)u\|$$

où les $\alpha_p \in \mathcal{D}(\Omega)$ ont toutes leur support dans Ω' .

Réciproquement, $(L) \Rightarrow (L')$. Pour prouver cela, on considère le graphe G de $P(D)$ dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, cet espace étant muni de la norme usuelle

$$\|\{u, v\}\| = (\|u\|^2 + \|v\|^2)^{1/2}.$$

G est fermé pour cette norme. Prenons alors Ω' comme il est dit dans (L') , et considérons l'application $(u, P(D)u) \rightarrow P^{(p)}(D)u$ de G dans $\mathcal{D}'(\Omega')$. En réalité, l'image de G par cette application est dans $L^2(\Omega')$. Cela résulte du lemme 1. Car soit $\beta \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\beta = 1$ sur Ω' ; et prenons la suite habituelle $\{\rho_m\}$ de fonctions de \mathcal{D} qui convergent vers δ dans \mathcal{E}' . D'après le lemme 1, on a :

$$0 \|P(D)(\rho_m * (\beta u))\| \geq \|P^{(p)}(D)(\rho_m * (\beta u))\|.$$

Mais $P(D)(\rho_m * (\beta u))$ converge dans $L^2(\Omega)$, vers $P(D)(\beta u)$ qui appartient à $L^2(\Omega)$ en vertu de la condition (L) . Il en résulte que les $P^{(p)}(D)(\rho_m * (\beta u))$

convergent aussi dans $L^2(\Omega)$; leur limite est $P^{(p)}(D)(\beta u)$ (définie a priori comme distribution), qui coïncide avec $P^{(p)}(D)u$ sur Ω' .

La démonstration s'achève en montrant, par un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait, que le graphe dans $G \times L^2(\Omega')$ de l'application $(u, P(D)u) \rightarrow P^{(p)}(D)u$ est fermé. Cette application est donc continue, et ceci équivaut à l'inégalité de la condition (L').

Tout opérateur différentiel $P(D)$ qui vérifie la condition (L) ou (L') est appelé de type local par HÖRMANDER. Nous dirons d'autre part qu'un polynôme $P(X)$ est complet, s'il n'existe aucun vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^n$, tel que l'on ait : $P(\xi) = P(\xi + \lambda v)$ quels que soient $\xi \in \mathbb{R}^n$ et le nombre réel λ . Nous dirons que l'opérateur différentiel $P(D)$ est complet si le polynôme associé $P(X)$ l'est.

D'autre part, on appelle hypo-elliptique tout opérateur différentiel $P(D)$ qui possède l'une des deux propriétés suivantes, équivalentes :

(HE) Toute solution élémentaire de $P(D)$ est indéfiniment différentiable dans le complémentaire de l'origine.

(HE') Quel que soit l'ouvert Ω de \mathbb{R}^n et la fonction g , indéfiniment différentiable dans Ω , toute solution sur Ω de $P(D)f = g$ est aussi indéfiniment différentiable dans Ω [3].

Le résultat principal du chapitre 2 de la thèse d'HÖRMANDER est constitué par le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Soit $P(D)$ un opérateur différentiel. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° $P(D)$ est complet et de type local.

2° $P(D)$ est hypo-elliptique.

3° $P(X)$ vérifie les conditions équivalentes de la proposition 1.

De plus, si $P(D)$ possède l'une des propriétés ci-dessus, et si E est une solution élémentaire quelconque de $P(D)$, pour toute $u \in \mathcal{C}' \cap L^2$ et tout $p = (p_1, \dots, p_n)$ la convolution $P^{(p)}(D)E * u$ est localement $-L^2$.

Nous commencerons par prouver que les conditions, portant sur le polynôme $P(X)$, de la proposition 1 sont équivalentes au fait que $P(D)$ soit hypo-elliptique.

Remarquons que pour établir ce dernier fait, il suffit de prouver qu'il existe une solution élémentaire E de $P(D)$, indéfiniment différentiable dans le complémentaire de l'origine (voir [3], Exposé n° 4). Par la même occasion, nous démontrons la dernière propriété énoncée dans le théorème 1, à partir de la propriété 2.

Prouvons tout de suite que (HE') entraîne la propriété 2 de la proposition 1. Prenons un ouvert relativement compact Ω de \mathbb{R}^n . L'ensemble N des $u \in L^2(\Omega)$ tels que $P(D)u = 0$ (sur Ω) est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega)$. Soit Ω' un ouvert tel que $\bar{\Omega}' \subset \Omega$; considérons l'application $u \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j}$ de N dans $\mathcal{D}'(\Omega')$. C'est ici que nous utilisons (HE'); elle implique que $N \subset \mathcal{E}(\Omega)$, i.e. que $\frac{\partial}{\partial x_j}$ applique N dans $L^2(\Omega')$. On voit immédiatement que le graphe de cette application est fermé, d'où résulte qu'il existe $B < +\infty$ et que :

$$\sum_j \left\| \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \right\|_{\Omega'}^2 \leq B \|\chi\|_{\Omega'}^2, \text{ pour toute } \chi \in N.$$

Fixons η dans \mathbb{R}^n , et choisissons ζ de manière à ce que $\zeta = \xi + i\eta$ soit un zéro de $P(X)$. Prenons, dans l'inégalité précédente,

$$\chi(x) = \exp(-2i\pi \langle x, \zeta \rangle);$$

elle conduit à :

$$\left(\sum_j |\zeta_j|^2 \right) \int_{\Omega'} \exp(4\pi \langle x, \eta \rangle) dx \leq B_1 \int_{\Omega} \exp(4\pi \langle x, \eta \rangle) dx$$

ce qui prouve que $|\zeta|$ reste borné pourvu que $|\eta|$ le reste aussi.

Montrons maintenant que les propriétés de la proposition 1 entraînent l'existence d'une solution élémentaire E de $P(D)$, indéfiniment différentiable dans le complémentaire de l'origine.

Choisissons une constante finie A telle que $|\zeta| \geq A$ implique $|P(\zeta)| \geq 1$; ceci est possible d'après la propriété 1 de la proposition 1. Nous pouvons toujours supposer que le terme de plus haut degré en X_1 de $P(X)$ est X_1^m . Alors si le point $(\zeta_2, \dots, \zeta_n)$ varie dans \mathbb{R}^{n-1} en restant dans la boule

$$\zeta_2^2 + \dots + \zeta_n^2 \leq A^2, \text{ l'ensemble des nombres complexes } \zeta_1 \text{ tels que}$$

$|P(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)| \leq 1$, reste dans un compact H de \mathbb{C} . Prenons alors $A' \geq A$, telle que le cercle $|\zeta_1| = A'$ contienne H à son intérieur. Posons :

$$\langle E, \check{\varphi} \rangle = \int d\zeta_2 \dots d\zeta_n \oint \frac{\hat{\varphi}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)}{P(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)} d\zeta_1,$$

$\hat{\varphi}$ est la transformée de Fourier de $\varphi \in \mathcal{D}$, et $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

Les intégrales par rapport aux ζ_k ($2 \leq k \leq n$) sont prises de $-\infty$ à $+\infty$ sur l'axe réel; l'intégrale \oint par rapport à ζ_1 est prise aussi sur l'axe réel si $\zeta_2^2 + \dots + \zeta_n^2 \geq A^2$. Par contre, si $\zeta_2^2 + \dots + \zeta_n^2 < A^2$, elle est prise sur l'axe réel pour $|\zeta_1| \geq A'$, et sur le demi-cercle $\zeta_1^2 + \eta_1^2 = A'^2$, $\eta_1 \leq 0$ si $|\zeta_1| \leq A'$. Ainsi, sur tout le chemin d'intégration, $|P(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)| \geq 1$.

$\langle E, \check{\psi} \rangle$ définit bien une forme linéaire continue sur \mathcal{O} : c'est à peu près évident. C'est une solution élémentaire de $P(D)$, car si $\check{\psi} = \check{P}(D)\psi$ (si $T \in \mathcal{O}$, \check{T} est définie par $\langle \check{T}, \chi \rangle = \langle T, \check{\chi} \rangle$ pour toute $\chi \in \mathcal{O}$),

$$\langle E, \check{\psi} \rangle = \int d\xi_2 \dots d\xi_n \oint \hat{\psi}(\zeta_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\zeta_1.$$

Puisque $\hat{\psi}(\zeta)$ est une fonction entière de ζ_1, \dots, ζ_n , cette dernière intégrale est égale à $\int \psi(\xi) d\xi = \psi(0)$. Ensuite il nous faut établir que E est indéfiniment différentiable dans le complémentaire de l'origine. Posons

$$M = \sqrt{A^2 + A'^2} \text{ et : } \langle E_1, \check{\psi} \rangle = \int_{|\xi| \geq M} \frac{\hat{\psi}(\xi)}{P(\xi)} d\xi ;$$

$$\langle E_2, \check{\psi} \rangle = \oint_{|\zeta| \leq M} \frac{\hat{\psi}(\zeta)}{P(\zeta)} d\zeta.$$

Dans la deuxième intégrale, $\zeta = (\zeta_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ et le chemin d'intégration est pris, dans $C \times R^{n-1}$, comme il a été dit. Il est d'ailleurs contenu dans un compact, et $E_2 = \oint e^{2i\pi \langle x, \zeta \rangle} P(\zeta)^{-1} d\zeta$ est une fonction analytique entière de x . En particulier, si $u \in \mathcal{E}' \cap L^2$, $P^{(p)}(D)E_2 * u$ est localement L^2 , quel que soit p .

Reste à étudier E_1 . Mais auparavant montrons que $P^{(p)}(D)E_1 * u$ appartient à L^2 . Car si $\psi \in \mathcal{O}$, on a :

$$\langle P^{(p)}(D)E_1 * u, \psi \rangle = \langle P^{(p)}(D)E_1, \check{u} * \check{\psi} \rangle = \int_{|\xi| \geq M} \frac{P^{(p)}(\xi)}{P(\xi)} \hat{u}(\xi) \hat{\psi}(\xi) d\xi.$$

Ceci signifie qu'en tant que distribution, $P^{(p)}(D)E_1 * u$ est égale à la fonction, nulle pour $|x| < M$, et qui coïncide avec $\frac{P^{(p)}(x)}{P(x)} \hat{u}(x)$ pour $|x| \geq M$. Or, puisque $|P(x)| > 1$ si $|x| \geq M$, et d'après la propriété 4 de la proposition 1, $P^{-1}(x)P^{(p)}(x)$ est borné pour $|x| \geq M$. Comme $\hat{u} \in L^2$, on a bien le résultat annoncé. Ainsi $P^{(p)}(D)E_1 * u$ est localement $-L^2$. Or, du fait que E est indéfiniment différentiable dans $\{0\}$, et par suite que (HE') est valable, découlera que toute solution élémentaire de $P(D)$ possède aussi la propriété qui vient d'être établie.

Notons y et η deux vecteurs quelconques, non orthogonaux, de R^n , et $\langle D, y \rangle \delta$ la transformée de Fourier (par rapport à ξ) de $\langle \xi, y \rangle$. Prouver que, E_1 est indéfiniment différentiable dans $\{0\}$ équivaut à prouver que, quels que soient y, η et l'entier k , on peut trouver un entier h tel que $F = \langle y, x \rangle^h \langle D, \eta \rangle^k E_1$ est une fonction continue sur R^n . Moyennant une rotation dans R^n , on se ramène au cas où y_1 est la seule composante non nulle de y (nous pouvons d'ailleurs supposer $y_1 = 1$).

Nous noterons $Q(\xi)$ le polynôme obtenu à partir de $P(\xi)$ par cette rotation ; on a évidemment $|Q(\xi)| \gg 1$ pour $|\xi| \gg M$. $\hat{\psi}(\xi)$ devient une certaine fonction $\hat{\psi}(\xi)$ qui est la transformée de Fourier d'une $\psi \in \mathcal{D}_x$. Au total nous pouvons écrire :

$$\langle F, \check{\psi} \rangle = (2i\pi)^{-h} \int_{|\xi| \gg M} \frac{\langle \xi, \eta \rangle^k}{Q(\xi)} \left(\frac{\partial^h}{\partial \xi_1^h} \hat{\psi}(\xi) \right) d\xi.$$

En intégrant par parties h fois successives, on obtient d'abord une intégrale sur le fermé $|\xi| \gg M$:

$$\langle F_1, \check{\psi} \rangle = (-2i\pi)^{-h} \int_{|\xi| \gg M} \hat{\psi}(\xi) \frac{\partial^h}{\partial \xi_1^h} \left(\frac{\langle \xi, \eta \rangle^k}{Q(\xi)} \right) d\xi,$$

et une somme finie d'intégrales sur la sphère $|\xi| = M$:

$$\langle F_2, \check{\psi} \rangle = (2i\pi)^{-h} \sum_{\ell=0}^{k-1} \int_{|\xi|=M} \left[\frac{\partial^\ell}{\partial \xi_1^\ell} \left(\frac{\langle \xi, \eta \rangle^k}{Q(\xi)} \right) \right] \left[\frac{\partial^{h-\ell-1}}{\partial \xi_1^{h-\ell-1}} \hat{\psi}(\xi) \right] H_\xi$$

En effet, les termes intégrés s'annulent tous à l'infini, car $\hat{\psi} \in \mathcal{S}$; ne restent que leurs valeurs sur la sphère $|\xi| = M$, d'où les intégrales précédentes.

Posons d'ailleurs $\langle \check{F}_1, \check{\psi} \rangle = \langle F_1, \check{\psi} \rangle$ et de même pour F_2 . Il est clair que \check{F}_1 est la transformée de Fourier de la distribution $g(\xi)$, nulle pour $|\xi| < M$ et égale à $(-2i\pi)^k \frac{\partial^h}{\partial \xi_1^h} \left(\frac{\langle \xi, \eta \rangle^k}{Q(\xi)} \right)$ dans le reste de l'espace. Grâce à un

théorème de SEIDENBERG [2], on prouve que si $P(\xi)$ vérifie les conditions de la proposition 1, il existe un nombre $s > 0$ tel que :

$$|\xi|^s \left| \frac{P^{(p)}(\xi)}{P(\xi)} \right| \rightarrow 0 \text{ lorsque } |\xi| \rightarrow +\infty \text{ pour tout } p \neq (0, 0, \dots, 0)$$

La même propriété est évidemment vraie pour $Q(\xi)$ à la place de $P(\xi)$. Il en résulte aussitôt qu'à tout entier ν correspond h assez élevé pour qu'on ait :

$$\left| \frac{\partial^h}{\partial \xi_1^h} \left(\frac{\langle \xi, \eta \rangle^k}{Q(\xi)} \right) \right| \leq |\xi|^{-\nu} \text{ pour } |\xi| \gg M \text{ (} M > 1 \text{)}.$$

En prenant ν assez grand, on pourra faire en sorte que $g(\xi) \in L^1$; alors \check{F}_1 sera une fonction continue sur \mathbb{R}^n , et il en sera de même de \check{F}_1 , qui se déduit de F_1 par une rotation sur les variables.

Quant à \check{F}_2 , remarquons que c'est la transformée de Fourier d'une distribution portée par la sphère $|\xi| = M$, donc à support compact ; le théorème de Paley-Weiner veut alors que \check{F}_2 (et par suite aussi F_2) soit une fonction analytique entière de x .

Reste maintenant à prouver que le fait, pour $P(D)$, d'être complet et de type local, équivaut à posséder l'une des propriétés équivalentes de la proposition 1, ou bien à être hypo-elliptique.

Si $P(D)$ est hypo-elliptique, il est de type local et complet.

Soient donc Ω , Ω' et u comme il est dit dans l'énoncé de la condition (L'). On choisit $\epsilon > 0$ de sorte que le voisinage fermé d'ordre ϵ de Ω' soit contenu dans Ω , et l'on utilise la paramétrix $F = \rho E$, où $\rho \in \mathcal{D}$ est égale à 1 sur la boule $|x| \leq \epsilon_1 < \epsilon$, et à 0 hors de la boule $|x| \leq \epsilon$; E est une solution élémentaire quelconque de $P(D)$. Par hypothèse, E est indéfiniment différentiable dans $\{0\}$. Si $\omega(x) = P(D)F - \delta$, on voit que $\omega \in \mathcal{D}$ et a son support dans la couronne $\epsilon_1 \leq |x| \leq \epsilon$. On a donc :

$$P^{(p)}(D)u = [P^{(p)}(D)F] * [P(D)u] - [P^{(p)}(D)\omega] * u .$$

La restriction à Ω' du deuxième terme du second membre appartient manifestement à $L^2(\Omega')$. Soit alors $\alpha \in \mathcal{D}$, $\alpha(x) = 1$ sur le voisinage d'ordre ϵ de Ω' . Un théorème classique sur la convolution énonce que, sur Ω' la valeur de $[P^{(p)}(D)F] * [P(D)u]$ est égale à :

$$[P^{(p)}(D)F] * [\alpha(P(D)u)] = [P^{(p)}(D)E] * [\alpha(P(D)u)] + [P^{(p)}(D)((\rho - 1)E)] * [\alpha(P(D)u)]$$

Mais le 2e terme du dernier membre est indéfiniment différentiable. Quant au premier, par hypothèse, il est localement $-L^2$ puisque $\alpha(P(D)u) \in \mathcal{C}' \cap L^2$.

Ceci montre bien que $P(D)$ est de type local. Il est complet, car il est visible qu'un polynôme $P(X)$ non complet ne peut vérifier les conditions de la proposition 1.

Si $P(D)$ est complet et de type local, le polynôme $P(X)$ possède la propriété 1 de la proposition 1.

Prenons deux ouverts relativement compacts Ω et Ω' , avec $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. L'inégalité énoncée dans la condition (L'), appliquée à $u = \exp(-2i\eta \langle x, \zeta \rangle)$ ($\zeta \in \mathbb{C}^n$) donne, pour chaque système p de n entiers

$$(5) \quad |P^{(p)}(\zeta)|^2 \leq B_\eta (1 + |P(\zeta)|^2)$$

où B_η est une constante finie, dépendant de η ($\zeta = \xi + i\eta$), mais qui est bornée si η reste dans un compact fixe de \mathbb{R}^n . Or on démontre ceci [1] : si $P(X)$ est un polynôme complet, alors, lorsque $|\xi| \rightarrow +\infty$, $\sum_p |P^{(p)}(\xi + i\eta)|^2$ tend vers $+\infty$, et cela uniformément par rapport à η sur chaque compact de \mathbb{R}^n . Ce fait, joint à la majoration (5), implique bien la propriété 1 de la proposition 1.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HÖRMANDER (Lars). - On the theory of general partial differential operators, Acta Math., t. 94, 1955, p. 161-248.
- [2] SEIDENBERG (A.). - A new decision method for elementary algebra, Ann. of Math, t. 60, 1954, p. 365-374.
- [3] Séminaire SCHWARTZ, t. 2, 1954/55.

[Juillet 1957]