ROGER GODEMENT

Représentations induites des groupes de Lie

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. nº 126, p. 287-294

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__287_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1956)

REPRÉSENTATIONS INDUITES DES GROUPES DE LIE

par Roger GODEMENT

On se propose d'exposer une petite partie de la thèse de BRUHAT, à savoir ce qui concerne l'étude des distributions quasi-invariantes sur un espace où opère un groupe de Lie G. Pour ne pas faire double emploi on donnera ici principalement les détails qui ne se trouvent pas dans Bruhat... Contrairement à la tradition, on s'élèvera du particulier en général.

1. Distributions invariantes sur un groupe.

Soient G un groupe de Lie, U un ouvert de G, et T une distribution définie dans U. Si g est un élément de G, l'image $T.g$ de T par la translation $s \to sg$ est une distribution dans $U.g$; on dira que T est invariante à droite si $T = T.g$ dans $U \cap Ug$ pour tout g. Alors T est proportionnelle à la mesure invariante à droite de G ; en effet les distributions Tg définies dans les Ug se recollent en une distribution sur G, qui est invariante à droite, d'où facilement le résultat.

2. Distributions quasi-invariantes sur un espace homogène.

Soit $X = G/\Gamma$ un espace homogène sur lequel G opère à droite ; E étant un vectoriel de dimension finie (pour simplifier) on appellera E-distribution (ou distribution à valeurs dans E') toute forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{D}_E(X)$ des fonctions différentiables à support compact et à valeurs dans E ; la définition s'applique à toute variété X bien entendu, et se dualise facilement...

Soit x_0 le point de X qui correspond à l'élément unité de G, et U un voisinage ouvert de x_0 dans X. Si E est un vectoriel, une fonction différentiable $A(x, g)$ à valeurs dans les endomorphismes de E sera appelée un E-multiplicateur défini dans U si :

(a) la fonction $A(x, g)$ est définie si et seulement si $x \in U \cap Ug$

(b) on a la relation $A(x, gh) = A(xh^{-1}, g)\, A(x, h)$ toutes les fois que cette relation a un sens ;

(c) on a la relation $A(x, e) = 1$ pour tout $x \in U$.

Comme on a évidemment $x_0 \in U \cap U_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, on voit que la fonction

(1) $$A(\gamma) = A(x_0 , \gamma)$$

est définie sur Γ tout entier, et que $\gamma \rightarrow A(\gamma)$ est une représentation linéaire de Γ dans E . D'autre part, considérons l'expression $A(x_0 g , g)$; elle est définie si et seulement si $x_0 g \in U \cap Ug$ i.e., puisque l'on a toujours $x_0 g \in Ug$, si et seulement si $x_0 g \in U$; notant π l'application canonique $g \rightarrow x_0 g$ on voit donc que

(2) $$A(x_0 g , g) \text{ est définie dans } \pi^{-1}(U) .$$

On notera l'identité

(3) $$A(x_0 g , \gamma g) = A(\gamma) A(x_0 g , g) \quad (\gamma \in \Gamma , g \in \pi^{-1}(U)) .$$

Soit T une E-distribution définie dans U ; on dira que T admet le multiplicateur A si l'on a, quel que soit $g \in G$,

(4) $$\int \langle \varphi(xg) , dT(x) \rangle = \int \langle A^{-1}(x , g) \varphi(x) , dT(x) \rangle$$

pour toute fonction différentiable φ à valeurs dans E et dont le support vérifie

(5) $$|\varphi| \subset U \cap Ug ;$$

chaque membre de (4) a alors un sens : $\varphi(x)$ étant nulle en dehors d'un compact contenu dans Ug , la fonction $\varphi(xg)$ est nulle en dehors d'un compact contenu dans U , ce qui justifie le premier membre ; le second a de même un sens puisque le support de $\varphi(x)$ est contenu dans U et puisque la fonction $A^{-1}(x , g)$ est définie au voisinage du support en question. On se propose d'étudier ces distributions.

Définissons une application $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$ de $\mathcal{D}_E(\pi^{-1}(U))$ dans $\mathcal{D}_E(U)$ par la formule

(6) $$\tilde{\varphi}(x_0 g) = \int A^{-1}(x_0 g , \gamma g) \varphi(\gamma g) d\gamma = A^{-1}(x_0 g , g) \int A^{-1}(\gamma) \varphi(\gamma g) d\gamma ,$$

ce qui a un sens en vertu de (2) et (3). Des raisonnements bien connus montrent qu'on obtient ainsi un <u>homomorphisme</u> de $\mathcal{D}_E(\pi^{-1}(U))$ <u>sur</u> $\mathcal{D}_E(U)$, lequel transforme T en une E-distribution $\tilde{T}$ sur $\pi^{-1}(U)$. On va voir que celle-ci est <u>invariante à droite</u> au sens du n° 1 .

Soit en effet $s \in G$; il faut prouver que l'on a

$$(7) \qquad \int \langle \varphi(gs) , d\tilde{T}(g) \rangle = \int \langle \varphi(g) , d\tilde{T}(g) \rangle$$

dès que

$$(8) \qquad |\varphi| \subset \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(U)s \quad ;$$

or posant $\psi(g) = \varphi(gs)$ on a

$$\tilde{\psi}(x_o\, g) = A^{-1}(x_o\, g , g) \int A^{-1}(\gamma)\, \varphi(\gamma gs)d\gamma$$

d'où en comparant avec (6) la relation

$$A(x_o\, g , g)\, \tilde{\psi}(x_o\, g) = A(x_o\, gs , gs)\, \tilde{\varphi}(x_o\, gs)$$

et comme on a $A(x_o\, gs , gs) = A(x_o\, g , g)\, A(x_o\, gs , s)$ il vient

$$(9) \qquad \tilde{\psi}(x_o\, g) = A(x_o\, gs , s)\, \tilde{\varphi}(x_o\, gs)$$

ou encore

$$(10) \qquad \tilde{\psi}(x) = A(xs , s)\, \tilde{\varphi}(xs) \quad (x \in U \cap Us^{-1}) .$$

Le premier membre (7) est donc égal à

$$\int \langle A(xs , s)\, \tilde{\varphi}(xs) , dT(x) \rangle = \int \langle A^{-1}(x , s)\, A(x , s)\, \tilde{\varphi}(x) , dT(x) \rangle$$
$$= \int \langle \tilde{\varphi}(x) , dT(x) \rangle$$

d'où (7).

En vertu du résultat du n° 1 la distribution $\tilde{T}$ est proportionnelle à la mesure invariante à droite dg ; autrement dit il existe un vecteur fixe $a' \in E'$ tel que l'on ait

$$(11) \qquad \int \langle \varphi(g) , d\tilde{T}(g) \rangle = \int \langle \varphi(g) , a' \rangle\, dg$$

dès que $|\varphi| \subset \pi^{-1}(U)$.

La correspondance entre T et a' est évidemment biunivoque.

Le vecteur a' n'est pas quelconque. Remplaçons en effet la fonction $\varphi(g)$ par la fonction $\varphi(\gamma_o^{-1}\, g) = \psi(g)$ pour un $\gamma_o \in \Gamma$; $\tilde{\varphi}$ est remplacée par

$$\tilde{\psi}(x_o\, g) = A^{-1}(x_o\, g , g) \int A^{-1}(\gamma)\, \varphi(\gamma_o^{-1}\, \gamma\, g)d\gamma \quad ;$$

posons

$$d(\gamma_o\,\gamma) = \delta_\Gamma(\gamma_o)d\gamma \quad ; \quad d(g_o\,g) = \delta_G(g_o)dg \quad ; \tag{12}$$

il vient

$$\widetilde{\psi}(x_o\,g) = A^{-1}(x_o\,g\ ,\ g)\int A^{-1}(\gamma)A^{-1}(\gamma_o)\ \delta_\Gamma(\gamma_o)\ \varphi(\gamma\,g)d\gamma$$
$$= \widetilde{\theta}(x_o\,g) \quad \text{où} \quad \theta(g) = \delta_\Gamma(\gamma_o)A^{-1}(\gamma_o)\ \varphi(g) \quad ;$$

les valeurs de $a'.dg$ sur ψ et θ sont donc égales, ce qui donne

$$\int\langle\varphi(\gamma_o^{-1}\,g)\ ,\ a'\rangle\,dg = \delta_\Gamma(\gamma_o)\int\langle A^{-1}(\gamma_o)\ \varphi(g)\ ,\ a'\rangle\,dg$$

et comme φ est arbitraire dans $\mathcal{D}_E(\pi^{-1}(U))$ cela prouve que l'on doit avoir $\delta_G(\gamma)a' = \delta_\Gamma(\gamma)\ \check{A}(\gamma)a'$, où $\gamma \longrightarrow \check{A}(\gamma)$ est la représentation contragrédiente de $\gamma \longrightarrow A(\gamma)$; posant

$$\rho(\gamma) = \delta_\Gamma(\gamma)/\delta_G(\gamma) \tag{13}$$

on voit donc que le <u>vecteur</u> a' <u>est assujetti aux relations</u>

$$\rho(\gamma)\ \check{A}(\gamma)a' = a' \ . \tag{14}$$

Réciproquement il est facile de voir que ces conditions suffisent à définir une distribution sur U vérifiant les conditions énoncées.

Bien entendu la formule (11) pourrait servir à prouver, comme le fait BRUHAT, que la <u>distribution</u> $dT(x)$ sur U est en réalité une <u>fonction</u> (en prenant comme référence une mesure quasi-invariante sur X). Cela ne sert d'ailleurs à rien, sans parler du fait que les considérations précédentes involvent implicitement la question des mesures quasi-invariantes sur G/Γ .

3. <u>Distributions quasi-invariantes ayant pour support une classe.</u>

Soit M une variété analytique sur laquelle G opère à droite, et soit $g \longrightarrow A(g)$ une représentation de G dans un vectoriel E de dimension finie. On va étudier les E-distributions T sur M qui vérifient

$$T.g = \check{A}(g)T \quad \text{pour tout} \quad g \in G \quad ; \tag{15}$$

on supposera que <u>le support de</u> T <u>est une classe</u> $X = x_o\,G$ <u>fermée dans</u> M , cas particulièrement important comme on le verra plus tard.

Notons Γ le stabilisateur de x_o dans G ; l'application $g \longrightarrow x_o\,g$ étant de rang constant, X est une sous-variété fermée de X , isomorphe à G/Γ .

Dans un voisinage ouvert assez petit V de x_o , on peut trouver un système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ tel que $X \cap V$ soit défini par les équations $y_j = 0$; si $m = (m_1, \dots, m_q)$ est un système d'entiers positifs on posera

$$D^m = \partial^{|m|}/\partial y_1^{m_1} \dots \partial y_q^{m_q} \quad (|m| = m_1 + \dots + m_q) \tag{16}$$

ce qui définit dans V des "dérivations transversales à X" et, en chaque point $u \in M$, des distributions

$$D^m(u) : \varphi \rightarrow D^m \varphi(u) \tag{17}$$

de support réduit à u .

Posons $U = V \cap X$; c'est un voisinage ouvert de x_o dans X . En raison de (15) l'ordre transversal de T le long de X est constant ; appelons-le r ; alors (SCHWARTZ) il existe sur U des E-distributions T_m $(|m| \leq r)$ bien déterminées telles que l'on ait

$$\int \langle \varphi(u) , dT(u) \rangle = \sum_{|m| \leq r} \int_U \langle D^m \varphi(x) , dT_m(x) \rangle \tag{18}$$

dès que $|\varphi| \subset X \cap U$. Nous nous intéresserons uniquement aux termes d'ordre transversal maximum r ; dans ce qui suit on emploiera le signe $\equiv$ pour indiquer qu'une relation est vraie modulo des distributions d'ordre transversal $< r$.

Comme l'ordre transversal est invariant par translation, on a tout d'abord des relations de la forme

$$D^m(x).g^{-1} \equiv \sum_{|n|=r} \lambda_n^m(x , g) D^n(xg^{-1}) \quad \text{pour } |m| = r \text{ , et } x \in U \cap Ug \tag{19}$$

où les fonctions $\lambda_n^m(x , g)$ $(|m| = |n| = r)$ sont définies et différentiables pour $x \in U \cap Ug$.

Prenons alors une $\varphi \in \mathcal{D}_E(M)$ telle que

$$|\varphi| \cap X \subset U \cap Ug^{-1} \tag{20}$$

de telle sorte que les supports des fonctions $\varphi(u)$ et $\varphi(ug^{-1})$ rencontrent X suivant des compacts contenus dans U ; au second membre de (18) figure $D^m \varphi(x)$, i.e. $D^m(x)$ appliquée à φ ; si l'on remplace $\varphi(u)$ par $\varphi(ug^{-1})$, $D^m \varphi(x)$ se transforme en $D^m(x)$ g^{-1} appliquée à φ, i.e. (pour $x \in U \cap Ug$)

en $\sum \lambda_n^m(x\,,\,g)\,D^n\,\varphi(xg^{-1})$ modulo des termes d'ordre $< r$; on a donc

$$(21)\quad \int \langle \varphi(ug^{-1})\,,\,dT(u)\rangle \equiv \sum_{\substack{|m|=r\\|n|=r}} \int_U \langle D^n\,\varphi(xg^{-1})\,,\,\lambda_n^m(x\,,\,g)\,dT_m(x)\rangle$$

(on notera que les fonctions $\lambda_n^m(x\,,\,g)$, pour g donné, sont définies sur $U \cap Ug$, et que les fonctions $D^n\,\varphi(xg^{-1})$, en vertu de (20), sont nulles en dehors d'un compact contenu dans cet ensemble, de sorte que (21) a un sens). Mais d'autre part on a en vertu de (15) la relation

$$\begin{aligned}\int \langle \varphi(ug^{-1})\,,\,dT(u)\rangle &= \int \langle A(g)\,\varphi(u)\,,\,dT(u)\rangle \\ &\equiv \sum_{|m|=r} \int_{U \cap Ug^{-1}} \langle D^m\,\varphi(x)\,,\,{}^tA(g)dT_m(x)\rangle \\ &\equiv \sum_{|m|=r} \int_{U \cap Ug} \langle D^m\,\varphi(xg^{-1})\,,\,{}^tA(g)dT_m(xg^{-1})\rangle \quad ;\end{aligned}$$

comparant avec (21) et tenant compte de l'unicité de la décomposition (18) on voit que l'on doit avoir, pour $|m| = r$, la relation

$$(22)\quad dT_m(x).g = dT_m(xg^{-1}) = \sum_{|n|=r} \lambda_m^n(x\,,\,g)\,\check{A}(g)dT_n(x) \quad \text{dans } U \cap Ug\ .$$

Il s'agit bien entendu ici du signe = usuel.

Il est clair qu'ainsi on est ramené au problème traité au n° 2 ; posant, pour $|m| = r$,

$$(23)\qquad D^m(x_o).\gamma^{-1} \equiv \sum \lambda_n^m(\gamma)\,D^n(x_o) \qquad \text{i.e. } \lambda_n^m(\gamma) = \lambda_n^m(x_o\,,\,\gamma)$$

on définit une représentation matricielle

$$(24)\qquad \Lambda_r : \gamma \to (\lambda_n^m(\gamma))_{|m|=|n|=r}$$

du sous-groupe Γ , et les solutions du système (22) sont en correspondance biunivoque avec les systèmes de vecteurs $a'_m \in E'$ qui vérifient

$$(25)\qquad \rho(\gamma)\,\check{A}(\gamma) \sum_{|n|=r} \lambda_m^n(\gamma)a'_n = a'_m \quad (|m| = r) \quad ;$$

on peut encore interpréter ces systèmes de vecteurs comme étant les <u>invariants bilinéaires de la représentation</u>

(26) $$\rho^{-1}(\gamma)\, A(\gamma) \otimes \Lambda_r(\gamma)$$

de Γ (invariant bilinéaire = forme bilinéaire invariante = forme d'entrelacement dans la terminologie de BRUHAT).

En conclusion, et vu les relations connues entre la dimension d'un module filtré et celle du module gradué associé, on voit que la dimension de l'espace des solutions de (15) est majorée par la somme des dimensions des espaces de formes bilinéaires invariantes des diverses représentations (26) $(r = 0, 1, \ldots)$

4. Cas d'un nombre fini de classes.

Supposons qu'il n'y ait dans M qu'un nombre fini de classes. Chaque classe étant réunion dénombrable de compacts, le théorème de Baire prouve qu'il existe des classes ouvertes dans M ; posant

$$M^1 = M - \text{réunion des classes ouvertes dans } M$$
$$M^2 = M^1 - \text{réunion des classes ouvertes dans } M^1 ,$$

et ainsi de suite, on finit par s'arrêter, par exemple parce que le nombre de classes disponibles diminue à chaque pas. On peut d'ailleurs prouver qu'on s'arrête au bout d'un nombre de pas au plus égal à la dimension de M.

Soit X une classe ; posons

$$M_X = X \cup (M - M^i) , \quad X \text{ ouverte dans } M^i \ ;$$

alors X est une sous-variété fermée de l'ouvert M_X, stable par G.

Soit T une E-distribution sur M vérifiant (15) ; on ne fait plus de restriction sur le support de T. Désignons par $N(X)$ le nombre de solutions de (15) qui sont définies dans M_X et ont pour support X, on a montré au numéro précédent comment calculer ce nombre, ou le majorer. Alors le nombre de solutions de (15) définies sur M est $\leqslant \sum_X N(X)$. En effet associons d'abord à T ses restrictions aux classes X ouvertes dans M, on obtient

$$\sum_{X \subset M-M^1} N(X) \quad \text{possibilités} \ ;$$

si les distributions obtenues sont toutes nulles, c'est que $|T| \subset M^1$; associons-lui alors ses restrictions aux ouverts M_X, X ouverte dans M^1 ; on obtient à nouveau

$$\sum_{X \subset M^1 - M^2} N(X) \text{ possibilités,}$$

et ainsi de suite, d'où le résultat annoncé.

On donnera dans l'exposé suivant les applications aux représentations induites des groupes semi-simples.