JACQUES DIXMIER

Travaux de Malgrange sur les équations aux dérivées partielles elliptiques

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 123, p. 251-259

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__251_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1955)

TRAVAUX DE MALGRANGE
SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ELLIPTIQUES.

par Jacques DIXMIER.

1. Notations.

Les notations $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ sont celles de SCHWARTZ.

$\mathcal{L}^m$ (m entier $\geqslant 0$) : espace des fonctions complexes sur R^n qui sont localement de carré intégrable ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre m , avec la topologie de la convergence compacte dans L^2 des fonctions et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre m .

$\mathcal{H}_K^m$: sous-espace des éléments de $\mathcal{L}^m$ à support dans le compact K ; $\mathcal{H}^m$: espace des éléments de $\mathcal{L}^m$ à support compact, avec la topologie limite inductive de celles des $\mathcal{H}_K^m$. Les $\mathcal{H}_K^m$ sont des espaces hilbertiens.

$\mathcal{L}^{-m}$ (resp. $\mathcal{H}^{-m}$) : dual fort de $\mathcal{H}^m$ (resp. $\mathcal{L}^m$) . Les éléments de $\mathcal{L}^{-m}$ sont les distributions sur R^n sommes de dérivées d'ordre $\leqslant m$ de fonctions localement de carré intégrable. Les éléments de $\mathcal{H}^{-m}$ sont les distributions de $\mathcal{L}^{-m}$ à support compact.

Soit O un ouvert de R^n . On emploie les notations $\mathcal{D}_O$, ... , $\mathcal{H}_O^m$ pour les espaces $\mathcal{D}$, ... , $\mathcal{H}^m$ relatifs à la variété O . Soit K un compact de R^n . On emploie les notations $\mathcal{D}_K$, ... , $\mathcal{H}_K^m$ pour les sous-espaces de $\mathcal{D}$, ... , $\mathcal{H}^m$ formés des éléments à support dans K .

Si O est un ouvert de R^n , on désigne par $\hat{O}$ la réunion de O et des composantes connexes compactes de $R^n - O$.

2. Théorèmes principaux.

Dans tout l'exposé, D est un opérateur différentiel d'ordre $m > 0$ sur R^n , soit

$$\sum_{j_1+\cdots+j_n\leqslant m} a_{j_1\cdots j_n} \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_n^{j_n}} ,$$

et on envisagera uniquement (dans cet exposé) le cas où les $a_{j_1\cdots j_n}$ sont des fonctions analytiques de x_1 , ... , x_n .

D opère dans $\mathcal{D}$, dans $\mathcal{E}$, etc., et D est appelé <u>opérateur de Petrowski</u> si, quels que soient $x_1, \dots, x_n$, la condition

$$\sum_{j_1+\dots+j_n=m} a_{j_1\dots j_n}(x_1, \dots, x_n)\, \xi_1^{j_1}\dots \xi_n^{j_n} = 0$$

(où $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sont des nombres réels) entraîne $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$. On sait (JOHN, PETROWSKI, et article ultérieur de MALGRANGE) que D est alors elliptique (resp. analytique-elliptique), i.e. que (si $Df = g$) f est indéfiniment différentiable (resp. analytique) sur tout ouvert où g l'est. En outre, f appartient à $\mathcal{L}^{k+m}$ dans tout ouvert où g appartient à $\mathcal{L}^k$. On désignera par D' le transposé de D, qui est un opérateur différentiel de Petrowski, et par $H_D(O)$ le sous-espace de $\mathcal{E}_O$ formé des solutions de $Df = 0$ dans O (O étant un ouvert de R^n).

Soit D un opérateur différentiel de Petrowski.

THÉORÈME 1. - $D\mathcal{L}^k = \mathcal{L}^{k-m}$; $D\mathcal{E} = \mathcal{E}$; $D\mathcal{D}' = \mathcal{D}'$.

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> O <u>un ouvert de</u> R^n.

a. <u>Si</u> $O = \hat{O}$, <u>toute</u> $f \in H_D(O)$ <u>est limite dans</u> $\mathcal{E}_O$ <u>de</u> $g_i \in H_D(R^n)$.

b. <u>Si</u> $O \neq \hat{O}$, <u>il y a des</u> f <u>qui mettent cette propriété en défaut</u>.

3. <u>Démonstration du théorème</u> 1.

1. LEMME 1. - <u>Pour tout compact</u> H <u>de</u> R^n, D <u>est un homomorphisme de</u> $\mathcal{K}_H^m$ <u>dans</u> $\mathcal{K}_H^0$.

$\mathcal{K}_H^0$ et $\mathcal{K}_H^m$ sont des espaces hilbertiens ; nous désignerons leurs normes par $\| \|_0$ et $\| \|_m$. Ecrivons $D = D_1 + D_2$, où D_1 est un opérateur différentiel homogène d'ordre m et où D_2 est d'ordre $\leqslant m - 1$. Tout opérateur différentiel d'ordre p est continu de $\mathcal{K}_H^h$ dans $\mathcal{K}_H^{h-p}$, et l'injection canonique de $\mathcal{K}_H^1$ dans $\mathcal{K}_H^0$ est complètement continue d'après un raisonnement classique du genre Ascoli ; ceci prouve que D_2 est complètement continu. Pour étudier D_1, supposons-le d'abord à coefficients constants. Effectuant la transformation de Fourier $\mathcal{F}$, et posant $\mathcal{F}f = F$, on a

$$(1) \quad \|D_1 f\|_0^2 = k \int \Big|\sum_{j_1+\dots+j_n=m} a_{j_1\dots j_n} \xi_1^{j_1}\dots \xi_n^{j_n} F(\xi_1,\dots,\xi_n)\Big|^2 d\xi_1\dots d\xi_n .$$

Puisque D_1 est homogène et de Petrowski,

$$\left|\sum_{j_1+\dots+j_n=m} a_{j_1\dots j_n}\xi_1^{j_1}\dots\xi_n^{j_n}\right|^2 \geqslant k'\sum_{j_1+\dots+j_n=m}\left|\xi_1^{j_1}\dots\xi_n^{j_n}\right|^2 .$$

Alors, (1) donne, en revenant à f :

$$\|D_1 f\|_0^2 \geqslant k'' \sum_{j_1+\dots+j_n=m}\left\|\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}}\right\|_0^2$$

et le second membre (ou plutôt sa racine carrée) est équivalent à la norme $\|\ \|_m$ (les normes quadratiques des dérivées d'ordre $< m$ se majorant à l'aide des normes quadratiques des dérivées d'ordre m). On a donc $\|D_1 f\|_0 \geqslant k_1\|f\|_m$, et des propriétés classiques dans l'espace hilbertien prouvent alors que $D = D_1 + D_2$ est un homomorphisme (et même que son noyau est de dimension finie, propriété qui permet d'étudier les opérateurs différentiels sur les variétés compactes). Lorsque D_1 n'est pas à coefficients constants, on opère en gros comme ceci : pour tout $a \in H$, il existe un voisinage V de a tel que, pour des fonctions à support contenu dans $V \cap H$, l'opérateur $D_1 - \tilde{D}_1$ (où $\tilde{D}_1$ est l'opérateur obtenu en remplaçant les coefficients de D_1 par leurs valeurs en a) soit de norme arbitrairement petite ; on peut donc appliquer les résultats précédents à D_1 dans $V \cap H$; on passe ensuite du "local" au "global" (i.e. à H tout entier) par des partitions de l'unité).

2. $D\,\mathcal{L}^{-k} = \mathcal{L}^{-m-k}$ pour $k \geqslant 0$.

Comme il s'agit d'espaces de Fréchet, il suffit de montrer que :

a. $D' : \mathcal{H}^{m+k} \longrightarrow \mathcal{H}^k$ est injectif

b. $D'\mathcal{H}^{m+k}$ est fermé dans $\mathcal{H}^k$

Or, si $f \in \mathcal{H}^{m+k}$ et $D'f = 0$, f est analytique à support compact, donc nulle, d'où (a) (notons, pour plus tard, l'importance de la non-compacité de R^n). Pour prouver (b), il suffit (théorème de Banach) de prouver ceci : si B est une partie faiblement compacte de $\mathcal{H}^k$, $B \cap D'\mathcal{H}^{m+k}$ est faiblement fermé. Or, <u>les distributions de</u> B <u>ont leurs supports dans un compact fixe</u> K ; et, si $\mu \in \mathcal{E}'$ est telle que $D'\mu$ ait son support dans K, μ est analytique dans $R^n - K$ et nulle hors d'un compact, donc identiquement nulle dans les composantes connexes non relativement compactes de $R^n - K$, donc μ a son support contenu dans $H = \hat{K}$. Bref, $B \cap D'\mathcal{H}^{m+k} = B \cap D'\mathcal{H}_H^{m+k}$, et il suffit de montrer que $D'\mathcal{H}_H^{m+k}$ est fermé dans $\mathcal{H}^k$. Or, un petit raisonnement de topologie générale montre que H est compact ; d'autre part, $D'\mathcal{H}_H^{m+k} = D'\mathcal{H}_H^m \cap \mathcal{H}_H^k$; le lemme 1 achève alors la démonstration.

3. $D\mathcal{L}^k = \mathcal{L}^{k-m}$ pour tout k, et $D\mathcal{E} = \mathcal{E}$.

$D\mathcal{L}^k \subset \mathcal{L}^{k-m}$ est clair. Toute $g \in \mathcal{L}^{k-m}$ est dans $\mathcal{L}^{-k'}$ pour k' assez grand, donc de la forme Df avec une distribution f (d'après 2.).

Comme D est de Petrowski, $f \in \mathcal{L}^k$. Raisonnement analogue pour $D\mathcal{E} = \mathcal{E}$.

4. $D\mathcal{D}' = \mathcal{D}'$.

Soit $f \in \mathcal{D}'$. Localement, f est d'ordre fini donc dans un $\mathcal{L}^k$. D'après 2., il existe un recouvrement ouvert localement fini (O_i) de R^n et des $g_i \in \mathcal{D}'$ tels que $Dg_i = f$ dans O_i. Soit (α_i) une partition de l'unité indéfiniment différentiable subordonnée à (O_i), et considérons la distibution $h = \sum \alpha_i g_i$. On va montrer que $f - Dh \in \mathcal{E}$, ce qui, avec 3., achèvera la démonstration. Or, dans O_i, $f - Dh = Dg_i - Dh = D(\sum \alpha_j (g_i - g_j))$, et, dans $O_i \cap O_j$, $D(g_i - g_j) = f - f = 0$, donc $g_i - g_j$ est indéfiniment différentiable.

4. Démonstration du théorème 2.

Soit O un ouvert de R^n.

1. Supposons $O = \hat{O}$. Il faut montrer que toute $f \in H_D(O)$ est limite dans $(\mathcal{E}_O)$ de $g_i \in H_D(R^n)$. Par dualité, il faut montrer ceci : soit $\nu \in \mathcal{E}'_O$ orthogonale à $H_D(R^n)$; alors, ν est orthogonale à f. Or, ν est dans l'adhérence de $D'\mathcal{E}'$, et $D'\mathcal{E}'$ est fermé d'après le théorème 1 (car $D : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est surjectif, donc est un homomorphisme). Donc il existe $\mu \in \mathcal{E}'$ tel que $\nu = D'\mu$. D'après un raisonnement déjà fait, μ est nulle dans les composantes connexes non compactes de $R^n - O$, donc $\mu \in \mathcal{E}'_O$. Alors,

$$\langle \nu, f \rangle = \langle D'\mu, f \rangle = \langle \mu, Df \rangle = 0 .$$

2. LEMME 2. - $\mathcal{E}_O$ et $\mathcal{E}_{\hat{O}}$ induisent la même topologie sur $H_D(\hat{O})$.

Sinon, il existerait une suite de $f_i \in H_D(\hat{O})$ qui tendraient vers 0 dans $\mathcal{E}_O$ mais non dans $\mathcal{E}_{\hat{O}}$. Soit K une partie ouverte et compacte de $\hat{O} - O$ telle que les f_i ne tendent pas vers 0 dans $\mathcal{E}_{O \cup K}$. D'après le théorème du graphe fermé ($H_D(O \cup K)$ étant un sous-espace fermé à la fois dans les espaces de Fréchet $\mathcal{E}(O \cup K)$ et $\mathcal{L}^o(O \cup K)$), les f_i ne tendent pas vers 0 dans $\mathcal{L}^o_{O \cup K}$. En multipliant au besoin les f_i par des constantes, on peut supposer la suite f_i bornée dans $\mathcal{L}^o_{O \cup K}$. Elle sera alors bornée dans l'espace de Montel $\mathcal{E}_{O \cup K}$, donc aura un point adhérent f dans $\mathcal{E}_{O \cup K}$. On aura $Df = 0$, $f \neq 0$, $f \in \mathcal{D}_K$, ce qui est absurde puisque D est de Petrowski.

3. Supposons $0 \neq \hat{0}$. Soit K une partie ouverte et compacte de $\hat{0} - 0$, non vide. Soient $x \in K$, et ε_x la mesure de Dirac en x. Il existe (théorème 1) $f_1 \in \mathcal{D}$ vérifiant $Df_1 = \delta_x$. La restriction f de f_1 à 0 est dans $H_D(0)$. Supposons que f soit prolongeable en $\hat{f} \in H_D(0)$. Soit $0_1 \subset K \cup 0$ un voisinage de K. Alors, la restriction de $f_1 - \hat{f}$ à 0_1 est une distribution h à support compact dans K et vérifie $Dh = \delta_x$; donc le support de h se réduit à x, de sorte qu'on ne peut avoir $Dh = \delta_x$. <u>On a donc fabriqué une</u> $f \in H_D(0)$ <u>qui n'est pas prolongeable en fonction de</u> $H_D(\hat{0})$. Supposons alors que f soit limite dans $\mathcal{E}_0$ de $g_i \in H_D(R^n)$. Alors, en vertu du lemme 2, les g_i convergent dans $\mathcal{E}_{\hat{0}}$, donc f est prolongeable en une fonction de $H_D(\hat{0})$. Cette absurdité achève la démonstration.

5. <u>Généralisation</u>.

Soit Ω une variété analytique réelle de dimension n, connexe, orientée, démombrable à l'infini. Soient V_1 et V_2 des espaces fibrés analytiques réels, de base Ω, à fibre vectorielle (sur C) de dimension p. Dans ce qui précède, on avait $\Omega = R^n$, $V_1 = V_2 = R^n \times C$.

$\mathcal{E}(V_1)$ (resp. $\mathcal{D}(V_1)$) sera l'espace des sections indéfiniment différentiables à support quelconque (resp. compact) de V_1.

Pour définir $\mathcal{E}'(V_1)$, $\mathcal{D}'(V_1)$, il faut introduire l'espace fibré V_1' dual de V_1, qui sera ici défini de la matière suivante : en tout point $x \in \Omega$ où la fibre de V_1 est F_x, celle de V_1' est $F_x' \otimes \bigwedge^n \Gamma_x$, F_x' étant l'espace dual de F_x et Γ_x étant l'espace des covecteurs tangents à Ω en x. (Les changements de cartes se définissent de manière évidente). Alors, si f (resp. f') est une section continue de V_1 (resp. V_1'), l'application canonique

$$(F_x , F_x' , \overset{n}{\bigwedge} \Gamma_x) \longrightarrow \overset{n}{\bigwedge} \Gamma_x$$

en chaque point x permet de construire une n-forme sur Ω qu'on pourra intégrer sur Ω si elle est (par exemple) à support compact. On voit ainsi que $\mathcal{E}(V_1)$ apparaît comme une partie du dual de $\mathcal{D}(V_1')$, donc qu'on généralise la situation habituelle en définissant l'espace $\mathcal{D}'(V_1)$ des distributions comme le dual de $\mathcal{D}(V_1')$. On pose de même $\mathcal{E}'(V_1) = (\mathcal{E}V_1'))'$. On définit successivement, par analogie avec le cas de $R^n \times C$, les espaces $\mathcal{L}^m(V_1)$, $\mathcal{H}^m(V_1)$ $(m \geqslant 0)$, puis $\mathcal{L}^{-m}(V_1)$, $\mathcal{H}^{-m}(V_1)$.

Soit D un (V_1 , V_2) <u>opérateur différentiel</u> d'ordre $m > 0$: tout $x \in \Omega$ possède un voisinage 0 qui s'identifie par une carte à un ouvert $\mathcal{O}$ de R^n,

V_1 et V_2 s'identifiant au-dessus de 0 à $\tilde{0} \times C^p$; alors, au-dessus de 0, D s'identifie à un opérateur

$$\sum_{j_1+\cdots+j_n \leqslant m} a_{j_1\cdots j_n} \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_n^{j_n}},$$

où les $a_{j_1\cdots j_n}$ sont cette fois des matrices à p lignes et p colonnes, dont on supposera les coefficients analytiques.

D opère de $\mathcal{D}'(V_1)$ dans $\mathcal{D}'(V_2)$, de $\mathcal{E}(V_1)$ dans $\mathcal{E}(V_2)$, etc.

D est appelé opérateur de Petrowski si (avec les notations précédentes) quel que soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \tilde{0}$, et quels que soient les nombres réels non tous nuls $\xi_1, \ldots, \xi_n$, la matrice

$$\sum_{j_n+\cdots+j_n=m} a_{j_1\cdots j_n}(x_1, \ldots, x_n)\, \xi_1^{j_1} \cdots \xi_n^{j_n}$$

est de rang p (condition indépendante des cartes choisies). Alors, les théorèmes 1 et 2 restent vrais pour Ω non compacte. Les méthodes précédentes se généralisent sans difficultés. Il faut utiliser D', qui est un (V_2', V_1') opérateur différentiel. (Pour Ω compacte, le théorème 1 est faux, le théorème 2 reste vrai, mais 2a est alors trivial).

6. Corollaires.

1. Soit Ω une variété analytique complexe connexe à 1 dimension complexe (= surface de Riemann). On a donc $n = 2$. Prenons $V_1 = \Omega \times C$. les formes de type $(0, 1)$ sur Ω sont les sections d'un espace fibré V_2 de base Ω. L'opérateur $f \longrightarrow d''f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ est un (V_1, V_2) opérateur différentiel de Petrowski. Les solutions de $d''f = 0$ sont les fonctions holomorphes sur Ω. Donc :

COROLLAIRE 1 (Behnke-Stein). - Soient Ω une surface de Riemann non compacte, 0 un ouvert de Ω. Pour que toute fonction holomorphe dans 0 puisse être approchée par des fonctions holomorphes dans Ω, il faut et il suffit que $0 = \hat{0}$.

On déduit aisément de là que : toute surface de Riemann non compacte est une variété de Stein.

2. Soit Ω une variété analytique réelle non compacte, munie d'un ds^2 analytique, positif non dégénéré. Soit V^p l'espace fibré sur Ω des p-covecteurs tangents. On a $\mathcal{E}(V^p) = \Phi^p$, espace des p-formes différentielles à coefficients indéfiniment différentiables. Le laplacien $\Delta = d\,\partial + \partial\, d$ est un (V^p, V^p)

opérateur différentiel de Petrowski. Le théorème 1 va alors entraîner le

COROLLAIRE 2. – La cohomologie de Ω peut se calculer à l'aide des formes différentielles à coefficients analytiques.

a. Soit $\alpha \in \Phi^p$ telle que $d\alpha = 0$. Montrons que α est d-homologue à une forme à coefficients analytiques. On a $\alpha = (d\partial + \partial d)\beta \sim \partial d\beta = \alpha'$, et α' vérifie $\Delta\alpha' = d\partial\partial d\beta + \partial d\alpha' = \partial d\alpha' = \partial d\alpha = 0$, d'où notre assertion.

b. Soit $\alpha \in \Phi^p$, à coefficients analytiques, vérifiant $\alpha = d\beta$ avec $\beta \in \Phi^{p-1}$. Montrons que α est d-bord d'une forme à coefficients analytiques. On a $\beta = (d\partial + \partial d)\gamma$, donc $\alpha = d\partial d\gamma = d\beta'$; et $\Delta\beta' = d\partial\partial d\gamma + \partial d\beta' = \partial\alpha$; comme $\partial\alpha$ est à coefficients analytiques, β' est à coefficients analytiques.

Le corollaire résulte alors du théorème de de Rham.

Le même résultat vaut pour les variétés kählériennes non compactes.

7. Noyaux élémentaires.

Nous nous placerons uniquement dans le cas de R^n (mais on peut généraliser sans peine au cas des espaces fibrés à fibre vectorielle sur une variété).

Rappelons qu'on peut identifier canoniquement $\mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$, $\mathcal{D}' \hat{\otimes} \mathcal{D}'$, et l'espace des distributions sur $R^n \times R^n$. Cette identification est telle que, si $N \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ s'identifie à $N_1 \in \mathcal{D}' \hat{\otimes} \mathcal{D}'$, $(D \otimes 1)N_1$ s'identifie à DN, et $(1 \otimes D')N_1$ s'identifie à ND. Un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ ou de $\mathcal{D}' \hat{\otimes} \mathcal{D}'$ s'appelle un noyau. Il est dit noyau élémentaire à droite (resp. à gauche) de D si, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, on a $DE\varphi = \varphi$ (resp. $ED\varphi = \varphi$) ; il est dit noyau élémentaire bilatère de D s'il est noyau élémentaire à gauche et à droite.

THÉORÈME 3. – Si D est de Petrowski, D possède un noyau élémentaire bilatère.

a. Soit O un ouvert relativement compact de R^n. On a vu (lemme 1) que $\bar{D}'$ (complexe conjugué de D') est un homomorphisme de $\mathcal{H}^m_{\bar{O}}$ dans $\mathcal{H}^o_{\bar{O}}$. Cet homomorphisme est évidemment injectif. Son adjoint hilbertien : $(\mathcal{H}^o_{\bar{O}})' \longrightarrow (\mathcal{H}^m_{\bar{O}})'$, est un homomorphisme surjectif, donc ($\mathcal{H}^o_{\bar{O}}$ et $\mathcal{H}^m_{\bar{O}}$ étant hilbertiens) admet un inverse à droite F ; il existe une injection canonique de $\mathcal{D}_O$ dans $(\mathcal{H}^m_{\bar{O}})'$, donc la restriction de F à $\mathcal{D}_O$ est un noyau élémentaire à droite de D au-dessus de O.

b. On a (théorème 1) $D\mathcal{E} = \mathcal{E}$. Donc, si F est un espace de Fréchet, $(D \otimes 1)(\mathcal{E} \hat{\otimes} F) = \mathcal{E} \hat{\otimes} F$ (grâce au fait que $\mathcal{E}$ est un espace de Fréchet). On en déduit, grâce à (a), que $(D \otimes 1)(\mathcal{D}' \hat{\otimes} F) = \mathcal{D}' \hat{\otimes} F$ (de même qu'on a déduit $D\mathcal{D}' = \mathcal{D}'$ de $D\mathcal{E} = \mathcal{E}$ au n° 3, 4.). Soient (O_i) un recouvrement localement fini de R^n par des ouverts relativement compacts, (O'_i) un recouvrement plus fin avec $\overline{O'_i} \subset O_i$, (α_i) une partition de l'unité subordonnée à (O'_i), β_i une fonction de $\mathcal{D}_{O_i}$ égale à 1 sur O'_i, E_i un noyau élémentaire à droite dans O_i. Notons β_i l'application $g \longrightarrow \beta_i g$ de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{E}'_{O_i}$. Ceci posé, soit $f \in \mathcal{D}' \hat{\otimes} F$. Posons $g_i = (E_i \otimes 1)(\beta_i \otimes 1)f$. Dans $O'_i \cap O'_j = O'_{ij}$, $g_i - g_j$ est dans $\mathcal{D}'_{O'_{ij}} \hat{\otimes} F$ et vérifie $(D \otimes 1)(g_i - g_j) = 0$, donc (grâce à l'ellipticité de D et à la théorie des espaces nucléaires) est dans $\mathcal{E}_{O'_{ij}} \hat{\otimes} F$. Soit $h = \sum \alpha_i g_i$; $f - (D \otimes 1)h$ est indéfiniment différentiable, car, dans O'_i

$$f - (D \otimes 1)h = (D \otimes 1) \sum \alpha_j (g_i - g_j) .$$

Donc il existe $h_1 \in \mathcal{E} \hat{\otimes} F$ vérifiant $(D \otimes 1)h_1 = f - (D \otimes 1)h$, d'où le résultat.

c. On a en particulier, d'après b., $(D \otimes 1)(\mathcal{D}' \hat{\otimes} \mathcal{E}) = \mathcal{D}' \hat{\otimes} \mathcal{E}$. Or, le noyau identique I appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) = \mathcal{D}' \hat{\otimes} \mathcal{E}$. Donc il existe $E_1 \in \mathcal{D}' \hat{\otimes} \mathcal{E}$ tel que $(D \otimes 1)E_1 = I$. On va déterminer un noyau E' tel que

(1) $\qquad (D \otimes 1)E' = 0$

(2) $\qquad (1 \otimes D')E' = I - (1 \otimes D')E_1$.

Alors, $E_1 + E' = E$ sera le noyau élémentaire bilatère cherché.

Or, le 2e membre de (2) vérifie $(D \otimes 1)(I - (1 \otimes D')E_1) = (D \otimes 1)I - (1 \otimes D')I = 0$ D'après les propriétés des espaces nucléaires, $I - (1 \otimes D')E_1 \in H_D \hat{\otimes} \mathcal{D}'$. Comme H_D est un espace de Fréchet, le résultat de (b) montre qu'il existe $E' \in H_D \hat{\otimes} \mathcal{D}'$ vérifiant $(1 \otimes D')E' = I - (1 \otimes D')E_1$ d'où le résultat.

COMPLÉMENT au théorème 3 : <u>tout</u> noyau élémentaire bilatère E de D est dans $\mathcal{E} \hat{\otimes} \mathcal{D}'$ et dans $\mathcal{D}' \hat{\otimes} \mathcal{E}$ (ce qu'on traduit en disant que E est <u>régulier</u>), et, en tant que distribution sur $R^n \times R^n$, est <u>analytique en dehors de la diagonale</u>.

En effet, pour $\varphi \in \mathcal{D}$, on a $D(E\varphi) = \varphi$, donc $E\varphi \in \mathcal{E}$. Donc $E(\mathcal{D}) \subset \mathcal{E}$, et le théorème du graphe fermé montre que $E \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) = \mathcal{E} \hat{\otimes} \mathcal{D}'$. D'autre part, le transposé de E est un noyau élémentaire bilatère de D', donc appartient à $\mathcal{E} \hat{\otimes} \mathcal{D}'$, donc $E \in \mathcal{D}' \hat{\otimes} \mathcal{E}$. Enfin, on a $(D \otimes 1 + 1 \otimes D')E = 2I$, et $D \otimes 1 + 1 \otimes D'$ est un opérateur différentiel de Petrowski à coefficients analytiques sur $R^n \times R^n$; comme I a pour support la diagonale de $R^n \times R^n$, la dernière assertion en résulte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIEUDONNÉ (J.) et SCHWARTZ (L.). - La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{L}\mathcal{F})$, Ann. Inst. Fourier, t. 1, 1949, p. 61-101.

[2] GÅRDING (Lars). - Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, Math. Scand., t. 1, 1953, p. 55-72.

[3] GROTHENDIECK (Alexandre). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Mem. Amer. math. Soc., n° 16).

[4] JOHN (Fritz). - General properties of solutions of linear elliptic partial differential equations, Proceedings of the Symposium on spectral theory and differential problems [1950. Stillwater, Oklahoma]. - Stillwater, Oklahoma Agricultural and Mechanical College, 1951, p. 113-175.

[5] MALGRANGE (Bernard). - Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier, t. 6, 1955/56, p. 271-355.

[6] PETROWSKI (I.G.). - Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différenrielles, Mat. Sbornik, t. 5 (47), 1939, p. 3-68.