FRANÇOIS BRUHAT

Prolongement des sous-variétés analytiques

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. nº 122, p. 239-250
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__239_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1955)

PROLONGEMENT DES SOUS-VARIÉTÉS ANALYTIQUES.

par François BRUHAT

(d'après W. ROTHSTEIN [3])

1. Préliminaires. Rappelons qu'un sous-ensemble M de l'espace C^n est "analytique" si pour tout point z de M, il existe un voisinage U de z tel que $M \cap U$ soit l'ensemble des zéros communs à un nombre fini de fonctions holomorphes dans U. M est "analytique dans l'ouvert D", si de plus M est fermé dans D. M sera appelé une " k-variété" si toute composante irréductible de M est de dimension k.

Soit T un domaine borné de l'espace C^k et soit P un polynome unitaire en la variable u, à coefficients holomorphes dans T et irréductible. Considérons l'espace analytique $\tilde{\Omega}$ dont les points sont les paires formées d'un point a de la variété des zéros Ω de P dans $C \times T$ et d'une composante irréductible de Ω en a (cf. [2]) : un tel espace sera appelé "espace algébroïde au-dessus de T". Nous noterons π la projection évidente de $\tilde{\Omega}$ sur T. Rappelons qu'une application analytique g de $\tilde{\Omega}$ dans C^n est une application continue de $\tilde{\Omega}$ dans C^n, analytique aux points réguliers de $\tilde{\Omega}$. Une telle application sera aussi appelée une paramétrisation de l'ensemble $g(\tilde{\Omega})$ sur $\tilde{\Omega}$".

DÉFINITION 1. - g sera dite "propre" si pour tout compact K de $g(\tilde{\Omega})$, $g^{-1}(K)$ est compact.

PROPOSITION 1. - L'image $M = g(\tilde{\Omega})$ de $\tilde{\Omega}$ par une application analytique propre est une k-variété irréductible.

La proposition 1 est une conséquence facile du lemme suivant (cf. [1], n° 14, th. 5,6).

LEMME 1. - Soit Ω un espace analytique de dimension k, ω un point de Ω, g une application analytique de Ω dans C^n. Si ω est un point isolé de $g^{-1}(g(\omega))$, il existe un voisinage de ω dont l'image est une k-variété irréductible.

Soit Γ un polycylindre ouvert de l'espace C^n : nous désignerons par p_1 (resp. p_2) la projection canonique de $\Gamma \times T$ sur Γ (resp. T).

PROPOSITION 2. - Soit M une k-variété irréductible dans $\Gamma \times T$. Si $p_1(M)$ est relativement compact dans Γ, il existe un espace algébroide $\tilde{\Omega}$ au-dessus de T et une application analytique g de $\tilde{\Omega}$ dans Γ tels que (g, π) soit une paramétrisation propre de M.

En effet, l'intersection de M avec un plan $t = Cte$ $(t \in T)$ est un sous-ensemble analytique compact de $\Gamma \times \{t\}$, donc se compose d'un nombre fini de points, et pour tout compact K de T, $M \cap (\Gamma \times K)$ est compact : ceci joint au lemme 1 montre que la projection dans T de tout sous-ensemble analytique de $\Gamma \times T$ contenu dans M et de dimension $k' \leq k$, est un sous-ensemble analytique de T de dimension k'. En particulier $p_2(M)$ est T tout entier et la projection S de la variété des points de M où p_2 n'est pas un homéomorphisme local est un sous-ensemble analytique de T de dimension $\leq k - 1$. Si $m \in M$ et $p_2(m) \notin S$, les coordonnées z_i d'un point de M au voisinage de m sont des fonctions holomorphes g_i de t au voisinage de $p_2(m)$. Comme M ne s'approche pas du bord de $\Gamma \times C^k$, les g_i sont analytiquement prolongeables dans $T - S$, prennent en tout point un nombre fini de valeurs et sont continues donc algébroïdes dans T lui-même. On peut alors construire un espace algébroïde $\tilde{\Omega}$ tel que $g = (g_1, \ldots, g_n)$ soit analytique sur $\tilde{\Omega}$ (considérer un facteur irréductible du polynome annulé par une combinaison linéaire "générique" des g_i) : il est trivial que $\tilde{\Omega}$ et (g, π) satisfont aux conditions demandées, π elle-même étant déjà propre.

2. Fibrations analytiques.

Soient T un domaine borné de C^k, Z un domaine contenu dans un polycylindre Γ de C^n et $f_1, \ldots, f_k$ k fonctions holomorphes dans $\Gamma \times T$:

DÉFINITION 2. - Nous dirons que les fonctions f_i définissent une "fibration analytique" $\mathcal{F}$ de Z dans Γ de base T si on a :

(F I) Pour tout $t \in T$, le sous-ensemble analytique $F(t)$ (appelé "fibre au-dessus de t") défini dans Γ par les équations $f_1(t, z) = \ldots = f_k(t, z) = 0$, est contenu dans Z.

(F II) Tout point de Z appartient à une fibre et une seule (d'où $Z = \bigcup_{t \in T} F(t)$).

(F II) entraîne que $F(t)$ est une $(n - k)$-variété et que l'application p qui à $z \in Z$ fait correspondre le paramètre t de la fibre passant par z est analytique. En particulier, si T' est un ouvert de T, $Z' = p^{-1}(T') = \bigcup_{t \in T'} F(t)$ est un ouvert de Z.

PROPOSITION 3. - Soit M une k-variété irréductible dans Z et soit $\mathcal{F}$ une fibration analytique de Z dans Γ, de base T. Si M est relativement compacte dans Γ, il existe une espace algébroide $\tilde{\Omega}$ au-dessus de T et une paramétrisation propre g de M sur $\tilde{\Omega}$.

DÉMONSTRATION. - Considérons le sous-ensemble analytique

$$N = \{f_1(z, t) = \dots = f_k(z, t) = 0 ; z \in M\}$$

de $Z \times T$: N est fermé dans $\Gamma \times T$, car si $(z, t) \in \bar{N}$, $z \in F(t)$ donc $z \in Z$ donc $z \in M$ et $(z, t) \in N$. Par suite N est analytique dans $\Gamma \times T$ et sa projection M dans Γ étant relativement compacte, on peut appliquer la proposition 2 à toute composante irréductible N_λ de N, d'où un espace algébroïde $\tilde{\Omega}$ et une application propre g de $\tilde{\Omega}$ dans Γ : on a $g(\tilde{\Omega}) \subset M$ et comme M est irréductible, on a nécessairement $g(\tilde{\Omega}) = M$, d'où la proposition.

Soit T^* l'enveloppe d'holomorphie de T : les coefficients du polynome définissant $\tilde{\Omega}$ se prolongent en fonctions holomorphes dans T^* d'où un espace algébroïde Ω^* au-dessus de T^*, contenant $\tilde{\Omega}$. On montre que toute application analytique g de $\tilde{\Omega}$ dans C^n se prolonge en une application analytique g^* de $\tilde{\Omega}^*$ dans C^n, mais g^* peut ne pas être propre, même si g l'est. L'utilisation des fibrations permet de pallier à cette difficulté :

PROPOSITION 4. - Soient Z^* un domaine contenu dans Γ, $\mathcal{F}$ une fibration de Z^* dans Γ, de base T^* et M une k-variété irréductible dans le domaine $Z = \bigcup_{t \in T} F(t)$. Si M est relativement compacte dans Γ, il existe dans Z^* une k-variété irréductible et une seule M^* telle que $M^* \cap Z = M$.

En effet, il existe d'après la proposition 3 une paramétrisation propre g de M sur un espace algébroïde $\tilde{\Omega}$ au-dessus de T. g se prolonge en une application analytique g^* de $\tilde{\Omega}^*$ dans C^n. On a $g^*(\omega) \in \Gamma$ pour tout $\omega \in \tilde{\Omega}^*$; sinon, il existerait un indice i et un nombre complexe a extérieur à la i-ième projection de Γ tels que l'inverse du produit des différentes déterminations de $g_i - a$ soit holomorphe dans T et non dans T^*. Par suite, on a par prolongement analytique $f_j(g^*(\omega), \Pi(\omega)) = 0$, $g^*(\omega)$ appartient à la fibre $F(\Pi(\omega))$, ce qui entraîne que g^* est propre. Posons $M^* = g^*(\tilde{\Omega}^*)$: on a $M^* \subset Z^*$ et $M^* \cap Z = M$. Il ne reste plus qu'à démontrer que M^* est analytique dans Z^*, ou encore (cf. proposition 1) fermé dans Z^* : or soit $z \in Z^*$ et soit T' un voisinage ouvert de $p(z)$ relativement compact dans T^*. $Z' = \bigcup_{t \in T'} F(t)$ est un voisinage de z, d'adhérence $\bigcup_{t \in T'(t)} F(t)$ (dans Z^*), ce qui montre que $M^* \cap Z'$, est fermé dans Z', donc que M^* est fermé dans Z^*.

3. Le prolongement local.

Soit D un domaine de $C^n (n \geq 3)$ contenant l'origine. Dans tout ce qui suit, les indices grecs μ, ν iront de 1 à n et les indices latins i, j de 1 à $n-1$. On posera

$$\frac{\partial f}{\partial z_\mu} = f_\mu \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \, \partial \bar{z}_j} = f_{i\bar{j}} \ , \text{ etc.}$$

Soit φ une fonction réelle deux fois différentiable dans D, telle que 0 soit un point ordinaire de l'hypersurface Φ définie par $\varphi = 0$. Nous considérerons la forme hermitienne $\sum \varphi_{\mu\bar{\nu}}(0)\, u_\mu \bar{u}_\nu$ ou plus exactement la restriction H de cette forme à l'hyperplan complexe $\sum \varphi_\mu (0)\, u_\mu = 0$. Soit q l'indice d'inertie de H, supposé ≥ 1 (i.e. le nombre de carrés positifs de la forme normale de H). On posera $D^+ = \{ z \in D \ ; \varphi(z) > 0 \}$ et $D^- = \{ z \in D \ ; \ \varphi(z) \leq 0 \}$. Le résultat fondamental de Rothstein s'énonce alors ainsi :

THÉORÈME 1. - Soit M une k-variété dans D^+ avec $k + q \geq n + 1$ (donc $k \geq 2$). Il existe un voisinage U de 0 et une k-variété M^* dans U telle que $M^* = M$ dans $U \cap D^+$. Ce prolongement est unique en ce sens que si U' est un autre voisinage de 0 et M' une k-variété dans U' telle que $M = M'$ dans $U' \cap D^+$, il existe un voisinage de 0 dans lequel $M^* = M'$.

La démonstration se fera comme suit : on va construire un polycylindre Γ contenant 0, tel que $M \cap \Gamma$ soit relativement compact dans Γ, et une fibration de U dans Γ ayant pour base l'enveloppe d'holomorphie T^* d'un domaine T et telle que $F(t) \subset D^+$ pour $t \in T$: le théorème résultera alors de la proposition 4.

Les fibres $F(t)$ devront être pour $t \in T$ des variétés contenues dans D^+ : on est donc amené à chercher pour tout point ζ de D^+ voisin de 0 un sous-ensemble analytique de dimension n-k passant par ζ et ne rencontrant pas D.

Pour cela, nous allons supposer que φ_n par exemple est $\neq 0$ dans D (ce qui est loisible, quitte à diminuer D, puisque 0 est point ordinaire de Φ) et considérer la variété $V(\zeta, b)$ définie (en posant $h_\mu = z_\mu - \zeta_\mu$) par :

$$h_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(\zeta)\, h_i + \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}\, h_i\, h_j \tag{1}$$

les b_{ij} étant des constantes pour l'instant arbitraires et les fonctions $a_i(\zeta)$ étant définis par :

$$a_i(\zeta) = -\varphi_i(\zeta) / \varphi_n(\zeta) \tag{2}$$

Sur $V(\zeta, b)$, φ devient une fonction χ de $z_1, \ldots, z_{n-1}$ et (2) montre que

$\chi_i(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) = \chi_{\bar{i}}(\zeta) = 0$. D'où d'après le théorème de la moyenne :

(3) $\varphi(z) - \varphi(\zeta) = \frac{1}{2}[\sum \chi^*_{ij} h_i h_j + \sum \chi^*_{i\bar{j}} h_i \bar{h}_j + \sum \chi^*_{\bar{i}\bar{j}} \bar{h}_i \bar{h}_j] =$
$= Q(\zeta^*, \zeta, b ; h)$

pour $z \in V(\zeta \quad b)$, avec par exemple

$$\chi^*_{ij} = \chi_{ij}(\zeta^*_1, \dots, \zeta^*_{n-1}) \quad \text{et} \quad |\zeta^*_i - \zeta_i| \leq |z_i - \zeta_i| .$$

Il suffit par suite de déterminer les b_{ij} et une sous-variété W de $V(\zeta, b)$ de telle sorte que la forme quadratique réelle $Q(\zeta^*, \zeta, b)$ soit <u>définie positive</u> sur W .

Pour cela, on choisit (ce qui est possible) des constantes b^o_{ij} telles que $Q(0, 0, b^o)$ se réduise à la forme hermitienne $\sum \chi_{i\bar{j}}(0) h_i \bar{h}_j$, qui n'est autre grâce à (2) que H . D'autre part, il existe une substitution inversible $h_i = \sum_{i,j=1}^{n-1} c^o_{ij} h'_j$ qui met H sous la forme normale

$$\sum_{i=1}^{q} |h'_i|^2 - \sum_{j=q+1}^{n-1} \varepsilon_j |h'_j|^2 \quad (\text{avec } \varepsilon_j = 0 \text{ ou } 1).$$

Soit (d^o_{ij}) la matrice inverse de (c^o_{ij}) . Considérons la q-variété $W(\zeta, b, d)$ définie par :

$$(4) \quad \begin{cases} h'_n = h_n - \sum a_i(\zeta) h_i - \sum b_{ij} h_i h_j = 0 \\ h'_j = \sum d_{ji} h_i = 0 \quad \text{pour } j = q+1, \dots, n-1 \end{cases}$$

Sur $W(\zeta, b, d)$, $\varphi(z) - \varphi(\zeta)$ est une forme hermitienne $Q'(\zeta^*, \zeta, b, d ; h)$ et on a :

(5) $\quad Q'(0, 0, b^o, d^o ; h) = \sum_{i=1}^{q} |h'_i|^2$

Comme Q' dépend continûment de ζ^*, ζ, b, d , Q' est encore définie positive (par rapport aux h'_i pour $1 \leq i \leq q$) pourvu que $|z|$, $|\zeta|$, $|b_{ij} - b^o_{ij}|$ et $|d_{ij} - d^o_{ij}|$ soient assez petits. Finalement, nous avons démontré la 1re partie du lemme suivant (la 2e partie se démontrant de manière analogue) :

LEMME 2. - <u>Il existe un voisinage polycylindrique</u> $U_1 = \{|z_\mu| < \delta\}$ <u>de</u> 0 <u>dans</u> D <u>tel que, pour toutes valeurs des constantes</u> b_{ij} et d_{ij} <u>suffisamment voisines de</u> b^o_{ij} <u>et</u> d^o_{ij} :

1) $\quad W(\zeta, b, d) \cap U_1 \cap D = \begin{cases} \{\zeta\} & \underline{\text{pour}} \ \zeta \in U_1 \cap \Phi \\ \emptyset & \underline{\text{pour}} \ \zeta \in U_1 \cap D^+ \end{cases}$

2) <u>Posons</u> $z'_n = z_n - \sum a_i(0)\, z_i - \sum b_{ij}\, z_i\, z_j$ <u>et</u> $z'_j = \sum d_{ji}\, z_i$: <u>il existe un nombre complexe</u> $e \neq 0$ <u>tel que, si</u> $E(\tau, b, d)$ <u>désigne la</u> q-<u>variété</u> $\left\{ z'_n = e\tau^2 \; ; \; z'_i = 0 \text{ pour } q+1 \leqslant i \leqslant n-1 \right\}$, <u>l'on ait</u> :

$$E(\tau, b, d) \cap U_1 \cap D^- = \begin{cases} \emptyset & \underline{\text{pour}} \; 0 < \tau \\ \{0\} & \underline{\text{pour}} \; \tau = 0 \end{cases}$$

On montre alors qu'on peut choisir les constantes b_{ij} et d_{ij} (voisines de b^o_{ij} et d^o_{ij}) de telle sorte que la $(n-k)$-variété $F(0)$ définie par $z'_n = \dots = z'_r = 0$ (avec $r = n - k + 1 \leqslant q$) coupe M en des <u>points isolés</u>. On peut alors déterminer un α $(0 < \alpha < \delta)$ tel que, si $R(\alpha)$ désigne le bord du polycylindre $\Gamma(\alpha) = \left\{ |z_i| < \alpha \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant r-1 \right\}$, $R(\alpha) \cap F(0)$ ne contienne pas de points de M.

Posons $S(\beta) = \left\{ z'_n = \dots = z'_{r+1} = 0 \; ; \; |z'_i| = \beta \right\}$: comme la variété $z'_n = \dots = z'_{r+1} = 0$ (donc aussi $F(0)$) est contenue dans $W(0, b, d) = E(0, b, d)$ donc ne rencontre D^- qu'à l'origine, on a pour tout $\beta > 0$ suffisamment petit

$$S(\beta) \cap \Gamma(\alpha) \subset D^+ \quad \text{et} \quad S(\beta) \cap R(\alpha) \cap M = \emptyset .$$

Par suite, il existe un γ $(0 < \gamma < \beta)$ tel que le domaine

$$Z_1 = \Gamma(\alpha + \gamma) \cap \left\{ |z'_n|^2 + \dots + |z'_{n+1}|^2 < \gamma \; ; \; \beta - \gamma < |z'_r| < \beta + \gamma \right\}$$

soit contenu dans D^+ et que

$$M \cap Z_1 \cap (\Gamma(\alpha + \gamma) - \Gamma(\alpha - \gamma)) = \emptyset .$$

Soit enfin τ un nombre réel avec $0 < \tau < \delta$ et $|e\tau^2|^2 < \gamma$ et soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que le domaine

$$|z'_n - e\tau^2|^2 + |z'_{n-1}|^2 + \dots + |z'_{r+1}|^2 < \varepsilon$$

soit contenu dans

$$|z'^2_n| + \dots + |z'_{r+1}|^2 < \gamma$$

et que le domaine

$$Z_2 = \left\{ |z'_n - e\tau^2|^2 + |z'_{n-1}|^2 + \dots + |z'_{r+1}|^2 < \varepsilon ; \; |z'_r| < \beta + \gamma \right\} \cap \Gamma(\alpha + \gamma)$$

soit contenu dans D^+ (ce qui est possible puisque $E(\tau, b, d)$ ne rencontre pas D^-).

Posons alors

$$Z^* = \Gamma(\alpha) \cap \left\{ |z'_n|^2 + \dots + |z'_{r+1}|^2 < \gamma \; ; \; |z'_r| < \gamma + \beta \right\}$$

et considérons le domaine

$$T^* = \left\{ |t_1|^2 + \dots + |t_{k-1}|^2 < \gamma \; ; \; |t_k| < \gamma + \beta \right\}$$

de l'espace C^k : les fonctions $f_i(z\ ,\ t) = z'_{n-i+1} - t_i$ (pour $1 \leq i \leq k$) holomorphes dans $\Gamma(\alpha) \times T^*$ définissent une fibration $\mathcal{F}$ de Z^* dans $\Gamma(\alpha)$, de base T^*. Or T^* est (théorème de Hartogs) l'enveloppe d'holomorphie de

$$T=\left\{|t_1|^2+\ldots+|t_{k-1}|^2<\gamma\ ;\beta-\gamma<|t_k|<\beta+\gamma\right\}\cup\left\{|t_1-e\tau^2|^2+|t_2|^2+\ldots+|t_{k-1}|^2<\varepsilon;|t_k|<\beta+\gamma\right\}.$$

On a $Z = \bigcup_{t\in T} F(t) = \Gamma(\alpha) \cap (Z_1 \cup Z_2) \subset D^+$:

$M \cap Z$ est donc analytique dans Z et comme $M \cap Z \cap (\Gamma(\alpha+\gamma) - \Gamma(\alpha-\gamma)) = \emptyset$ et que Z est borné, $M \cap Z$ est relativement compact dans $\Gamma(\alpha)$.

Nous pouvons donc appliquer la proposition 4 à chaque composante irréductible de $M \cap Z$, ce qui nous donne finalement une k-variété M^* dans le voisinage Z^* de 0, avec $M^* \cap Z = M \cap Z$.

Il nous reste encore à démontrer :

a) il y a voisinage U de 0 tel que $M = M^*$ dans $U \cap D^+$: il est clair qu'il suffit de démontrer que toute composante irréductible N de M (resp. M^*) dans $U \cap D^+$ pénètre dans Z. Posons

$$U_2 = U_1 \cap \Gamma(\alpha) \cap \left\{|h'_r| < \beta\right\},$$

et considérons la $(n - k + 1)$-variété $V(\zeta)$ définie dans U_2 par $h'_n = \ldots = h'_{r+1} = 0$ (pour $\zeta \in U_1\ \ D^*$). D'après le Lemme 2, $V(\zeta) \subset D^+$ et pour tout ζ appartenant à un voisinage U assez petit de 0, le bord de $V(\zeta)$ est la réunion d'un ensemble voisin de $R(\alpha) \cap F(0)$ et d'un ensemble voisin de $S(\beta) \cap \Gamma(\alpha)$. Or si $\zeta \in N$, $N \cap V(\zeta)$ est sous-ensemble analytique non vide de dimension ≥ 1 de $V(\zeta)$ et le principe du maximum entraîne que N s'approche autant qu'on le veut du bord de $V(\zeta)$. Comme $R(\alpha) \cap F(0) \cap M = \emptyset$ et que $S(\beta) \cap \Gamma(\alpha) \subset Z$, on a nécessairement $N \cap Z \neq \emptyset$, C. Q. F. D.

b) unicité du prolongement : elle résulte trivialement du résultat suivant :

PROPOSITION 5. - Tout sous-ensemble analytique M de dimension $\geq n - q$ à l'origine pénètre dans D^+.

En effet l'intersection N de M avec la $(q + 1)$-variété $z'_{q+1} = \ldots = z'_{n-1} = 0$ est de dimension ≥ 1 et contient 0. Par suite la fonction z'_n sur N ou bien est identiquement nulle, auquel cas $N \subset E(0\ ,\ b\ ,\ d)$ et comme $E(0\ ,\ b\ ,\ d) \cap D^- = \{0\}$, $N \cap D^+ \neq \emptyset$;, ou bien prend des valeurs arbitraires suffisamment petites, auquel cas $N \cap E(\tau\ ,\ b\ ,\ d) \neq \emptyset$ pour un $\tau \neq 0$ au moins et comme $E(\tau\ ,\ b\ ,\ d) \subset D^+$, $N \cap D^+ \neq 0$. C. Q. F. D.

Considérons maintenant pour $1 \leqslant \sigma \leqslant s \leqslant n-2$, une hypersurface $\Phi_\sigma = \{\varphi^\sigma = 0\}$ dans D, d'indice $n-1$ à l'origine, supposée point ordinaire de Φ_σ. Soit $D^+_\sigma = \{\varphi^\sigma > 0\}$ et $D^+ = \bigcap_{\sigma=1}^{s} D^+_\sigma$:

THÉORÈME 1 bis. - Soit M une k-variété dans D^+ : si $k \geqslant s+1$, le prolongement de M au voisinage de 0 est possible et unique.

En effet on peut supposer $\varphi^\sigma_\sigma \neq 0$ dans D : la démonstration du théorème 1 est alors valable sans changement, en posant

$$a^\sigma_\mu(\zeta) = -\varphi^\sigma_\mu(\zeta)/\varphi^\sigma_\sigma(\zeta) \quad \text{pour } \mu \neq \sigma$$

et en remplaçant les h_μ par les h'_μ définis par :

$$\tilde{h}'_{n-\sigma+1} = h_{n-\sigma+1} - \sum_{\mu \neq n-\sigma+1} a^\sigma_\mu(\zeta)\, h_\mu - \sum_{\mu,\nu \neq n-\sigma+1} b^\sigma_{\mu\nu}\, h_\mu\, h_\nu \quad \text{pour } 1 \leqslant \sigma \leqslant s$$

et

$$\tilde{h}'_j = \sum d_{ji}\, h_i \quad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant n-s,$$

et les z'_μ par des z'_μ analogues.

On a de même :

PROPOSITION 5bis. - Tout sous-ensemble analytique de dimension $\geqslant s$ à l'origine pénètre dans D^+.

REMARQUE. - Des raisonnements analogues sont classiques dans le cas des fonctions holomorphes (cas qui correspond formellement aux "n-variétés") : on sait depuis E.E. LEVI que si l'indice d'inertie de Φ en 0 est $\geqslant 1$, il existe une 1-variété contenue dans $D^+ \cup \{0\}$ et le théorème de Hartogs entraîne que toute fonction holomorphe dans D^+ se prolonge au voisinage de 0.

4. - Le prolongement global.

Soit φ^λ ($\lambda = 1, \ldots, \ell$) une fonction réelle deux fois différentiable dans un domaine D de C^n, telle que l'hypersurface $\Phi_\lambda = \{\varphi^\lambda = 0\}$ n'ait que des points ordinaires. On appellera "indice de φ^λ" et on notera q_λ le minimum pour $z \in \Phi_\lambda$ de l'indice d'inertie de la forme $\sum \varphi^\lambda_{\mu\bar{\nu}}(z)\, u_\mu \bar{u}_\nu$ sur l'hyperplan $\sum \varphi^\lambda_\mu(z)\, u_\mu = 0$.

THÉORÈME 2. - Supposons que les équations $\varphi^\lambda < 0$ ($\lambda = 1, \ldots, \ell$) définissent dans D un domaine D' relativement compact dans D et étoilé par rapport à l'origine. Soit M une k-variété dans D - D', avec $k \geqslant \sup_{\lambda,\mu} 2n - q_\lambda - q_\mu$ (donc $k \geqslant 2$ et $k + q_\lambda \geqslant n+1$). Il existe une et une seule k-variété M^* dans

D qui coïncide avec M dans D - D' .

En effet, soit H_r l'homothétie de centre 0 et de rapport r $(0 < r < 1)$ et soit ρ le plus petit r tel qu'un prolongement M_r existe et soit unique dans $D - D_r$ avec $D_r = H_r D'$: nous allons montrer que $\rho = 0$. Supposons au contraire $\rho > 0$: la frontière R de $D\rho$ est la réunion des hypersurfaces $H_\rho \Phi_\lambda$. Soit $z \in R$ et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les indices tels que $z \in H_\rho \Phi_{\lambda_i}$. Le théorème 1 donne pour chaque λ_i un prolongement local M_{λ_i} de M. Ces prolongements coïncident dans un voisinage de z : il suffit évidemment de montrer que toute composante irréductible N de M_{λ_i} en z pénètre dans $H_\rho D^+_{\lambda_i} \cap H_\rho D^+_{\lambda_j}$. Or d'après le lemme 2, il existe une q_{λ_i}-variété V passant par z et contenue dans $H_\rho D^+_{\lambda_i} \cup \{z\}$. Comme $\dim(V \cap N) \geqslant q_{\lambda_i} + k - n \geqslant n - q_{\lambda_j}$, $V \cap N$ pénètre dans $H_\rho D^+_{\lambda_j}$ (proposition 5), donc dans $H_\rho D^+_{\lambda_i} \cap H_\rho D^+_{\lambda_j}$. On en déduit l'existence et l'unicité d'un prolongement de M_ρ au voisinage de R, ce qui contredit la définition de ρ.

Par suite M se prolonge d'une seule manière à $D - \{0\}$, donc dans D tout entier d'après le théorème de Remmert et Stein (cf. [4], Exposés 13 et 14).

COROLLAIRE. - Soit M une k-variété $(k \geqslant 2)$ dans le domaine $\{|z_i| < 1 + \varepsilon\} - \{|z_i| < 1\}$ Il existe un prolongement et un seul de M dans $\{|z_i| < 1 + \varepsilon\}$. (approximer par l'extérieur $\{|z_i| < 1\}$ par des domaines de la forme précédente avec $\varphi^\lambda = |z_\lambda|^2 + \alpha \sum |z_i|^2 - \beta$, d'indice $q_\lambda = n - 1$).

On tire de même du théorème 1 bis le :

THÉORÈME 2 bis. - Soient $\varphi^{\lambda,\sigma} = 0$ $(1 \leqslant \lambda \leqslant \ell,\ 1 \leqslant \sigma \leqslant s)$ $\ell.s$ hypersurfaces d'indice n-1 dans D, telles que le domaine $D' = \bigcap_{\lambda=1}^{\ell} (\bigcup_{\sigma=1}^{s} \{\varphi^{\lambda,\sigma} < 0\})$ soit relativement compact dans D et étoilé par rapport à l'origine. Soit M une k-variété dans D - D' : si $k \geqslant 2s$, le prolongement de M dans D est possible et unique.

(ROTHSTEIN annonce que $k \geqslant s + 1$ est suffisant).

COROLLAIRE. - Soit

$$\Pi(\alpha, \beta) = (\{|w_{\lambda,\sigma}| < \alpha\}) \cap (\{|z_i| < \alpha\}) \cap (\bigcap_{\lambda=1}^{\ell} \bigcup_{\sigma=1}^{s} \{|w_{\lambda,\sigma}| < \beta\})$$

dans l'espace $C^{n+\ell s}$ des variables $(z_i, w_{\lambda,\sigma})$. Soit M une k-variété dans

$$\Pi(\alpha, \beta) - \Pi(\alpha', \beta') \quad (0 < \beta' < \alpha' < \beta < \alpha).$$

Si $k \geq 2s$ (et $k \geq 2$ si $s = 0$), le prolongement de M dans $\Pi(\alpha, \beta)$ est possible et unique.

5. La q-convexité.

DÉFINITION 3. - Soit D un domaine de C^n. Un domaine P dans D est une "q-polyèdre analytique" (par rapport à D, avec $0 \leq q \leq n-1$) s'il existe ℓ $(n-q)$ fonctions $f_{\lambda,\sigma}$ holomorphes dans D $(1 \leq \lambda \leq \ell$ et $1 \leq \sigma \leq s = n - q)$ telles que P soit une composante connexe relativement compacte (dans D) du domaine

$$Q = \bigcap_{\lambda=1}^{\ell} \left(\bigcup_{\sigma=1}^{s} \left\{ |f_{\lambda,\sigma}| < 1 \right\} \right).$$

DÉFINITION 4. - Un domaine D sera dit "q-convexe" si on peut approximer D par l'intérieur par des q-polyèdres analytiques (relatifs à D).

EXEMPLES. - Pour $q = n - 1$, on retrouve la définition habituelle des polyèdres analytiques et un domaine $(n-1)$-convexe n'est autre qu'un domaine holomorphie. Tout q-polyèdre est un q'-polyèdre pour $q' \leq q$. Tout domaine d'holomorphie est q-convexe, la réciproque étant inexacte. Le domaine $\Pi(\alpha, \beta)$ défini au corollaire du théorème 2 bis est un q-polyèdre dans l'espace $C^{n+\ell s}$

Soit D un domaine borné de C^n. Soit D_1 un q-polyèdre de D, défini par des $f_{\lambda,\sigma}$ et soit D_2 une composante connexe contenue dans D_1 de

$$\bigcap_{\lambda} \bigcup_{\sigma} \left\{ |f_{\lambda,\sigma}| < 1 - \varepsilon \right\} \; (0 < \varepsilon < 1) :$$

THÉORÈME 3. - Soit M une k-variété irréductible dans $D_1 - D_2$. Si $k \geq 2s$ $(s = n - q)$ il existe une k-variété et une seule dans D_1 qui coïncide avec M dans un voisinage de la frontière de D_1.

La démonstration se fait en utilisant un procédé dû à OKA : l'application $f : z \to (z_i, f_{\lambda,\sigma}(z))$ associe à D_1 un sous-ensemble W de $C^{n+\ell s}$. Pour α suffisamment grand, et ε suffisamment petit,

$$H = f(M) \cap (\Pi(\alpha, 1) - \Pi(\alpha - \varepsilon, 1 - \varepsilon))$$

est une k-variété, qui d'après le corollaire au théorème 2 bis se prolonge en une k-variété H^* dans $\Pi(\alpha, 1)$. Le lemme 1 montre que la projection M^* de H^* dans C^n est analytique dans D_1 et on a $M = M^*$ dans la projection de $\Pi(\alpha, 1) - \Pi(\alpha - \varepsilon, 1 - \varepsilon)$ donc dans un voisinage de la frontière de D_1, mais peut-être pas dans tout $D_1 - D_2$, car il peut y avoir des $z \in D_1 - D_2$ tels que $f(z) \in \Pi(\alpha - \varepsilon, 1 - \varepsilon)$.

COROLLAIRE 1. - Soit D un domaine borné q-convexe, D' un domaine relativement *compact dans* D , M *une k-variété irréductible dans* $D - D'$. *Si* $k \geqslant 2(n-q)$, *il existe une k-variété irréductible et une seule dans* D *qui coïncide avec* M *au voisinage de la frontière de* D .

Il suffit d'intercaler entre D et D' des q-polyèdres D_1 et D_2 satisfaisant aux hypothèses du théorème 3 .

COROLLAIRE 2. - *Soit* D *un domaine borné q-convexe et* M *une k-variété irréductible dans* D . *Si* $k \geqslant 2(n-q)$, D *est approximable par des domaines* $D' \subset D$ *tels que* $M \cap (D - D')$ *soit irréductible. En particulier, la frontière de* D *est connexe*.

6. *Le théorème de Hartogs pour les sous-variétés.*

Soit $\Gamma_n(r)$ le polycylindre $\bigcap_{i=1}^{n} \{|z_i| < r\}$ de l'espace C^n :

THÉORÈME 4. - *Soit* M *une k-variété irréductible dans le domaine*

$$(\Gamma_p(\varepsilon) \times \Gamma_q(1)) \cup (\Gamma_p(1) \times (\Gamma_q(1) - \Gamma_q(\eta)))$$

de l'espace

$$(C^{p+q}(0 < \varepsilon < 1 \ , \ 0 < \eta < 1).$$

Si $k \geqslant p + 1$ (*donc* $k \geqslant 2$) , *il existe une k-variété irréductible dans* $\Gamma_{p+q}(1) = \Gamma_p(1) \times \Gamma_q(1)$ *et une seule qui coïncide avec* M *dans* $\Gamma_p(1) \times (\Gamma_q(1) - \Gamma_q(\eta))$.

La démonstration ressemble à celle du théorème 2 et de son corollaire, mais en plus compliqué. Remarquons qu'on peut déduire le prolongement local du théorème 4, ce qui éviterait le recours aux paramétrisations si on savait démontrer directement ce théorème. On pourrait aussi déduire du théorème 4 des conditions de possibilité du prolongement local sans hypothèses de différentiabilité sur la frontière ("convexité par rapport aux q-variétés") comme dans le cas classique du prolongement des fonctions.

D'autre part, le théorème 4 reste valable si on remplace $\Gamma_q(1)$ et $\Gamma_q(\eta)$ par des q'-polyèdres semblables de C^q , pourvu que leur frontière se compose de morceaux d'hypersurfaces $|w_i| = Cte$ et que $k \geqslant p + q - q'$. On peut aussi remplacer $\Gamma_q(\eta)$ par un domaine relativement compact arbitraire de $\Gamma_q(1)$, mais on a alors seulement coïncidence dans un voisinage de la frontière de $\Gamma_q(1)$.