Y. MATSUSHIMA

Pseudo-groupes de Lie transitifs

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 118, p. 183-196

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__183_0>

PSEUDO-GROUPES DE LIE TRANSITIFS

par Y. MATSUSHIMA

L'objet de cet exposé est de poser les fondements de la théorie des groupes infinis de transformations de E. CARTAN d'après les idées développées par EHRESMANN dans sa théorie des jets.

1. Notations et terminologies.

Les variétés considérées seront supposées différentiables de classe C^{∞} et vérifiant le second axiome de dénombrabilité. Pour les groupes de Lie G, ceci signifie que le nombre des composantes connexes de G est dénombrable.

Soit $X = j_x^r f$ un r-jet d'une variété V_n de dimension n dans une variété W_m de dimension m. Le point x de V_n est la source de X, et le point $f(x)$ de W_m est le but de X. La variété $J^r(V_n, W_m)$ de tous les r-jets de V_n dans W_m a trois projections canoniques α, β, et γ, où $\alpha(X)$ est la source de X, $\beta(X)$ est le but de X, et $\gamma(X)$ est le couple $(\alpha(X), \beta(X))$. Le r-jet $X = j_x^r f$ détermine aussi un p-jet $\theta_p^r(X) = j_x^p f$, où $0 \leq p \leq r$. Soit $X = j_x^r f$ un r-jet de V_n dans W_m, et soit $Y = j_y^r g$ un r-jet de W_m dans U_p. Si $\beta(X) = \alpha(Y)$, on peut définir un jet $j_x^r g.f$ de V_n dans U_p qui est indépendant du choix de f et de g telles que $X = j_x^r f$ et $Y = j_y^r g$. On désigne ce jet par $Y.X$. Un r-jet $X = j_x^r f$ de V_n dans W_n de même dimension est inversible si l'application f est de rang maximum au point x. L'inverse d'un r-jet inversible $X = j_x^r f$ est un r-jet $X^{-1} = j_y^r f^{-1}$, où $y = f(x)$. L'ensemble $\Pi^r(V_n)$ de tous les r-jets inversibles de V_n dans V_n est une sous-variété ouverte de $J^r(V_n, V_n)$. L'ensemble $L_n^r(V_n, x)$ de tous les jets $X \in \Pi^r(V_n)$ de source et de but x est un groupe de Lie connexe. Ce groupe est isomorphe à $L_n^r(R_n, 0)$ (que l'on désigne par L_n^r), où R_n est l'espace numérique de dimension n, et 0 est l'origine de R_n; La sous-variété $\Pi^r(V_n)$ est un espace fibré de base $V_n \times V_n$, de projection γ, de fibre $L_n^r \times L_n^r$ et de groupe L_n^r. Un r-jet inversible X de R_n dans V_n de source 0 et de but x est appelé un r-repère d'origine x de V_n. L'ensemble $H^r(V_n)$ de tous les r-repères de V_n est un espace fibré principal de base V_n, de groupe structural L_n^r. Une section locale (différentiable) de $H^r(V_n)$ définie dans un ouvert de V_n est appelé un champ des r-repères.

2. Les G-structures d'ordre r .

Soit G un sous-groupe de Lie de L^r_n . On dit qu'une variété V_n est munie d'une G-structure S d'ordre r , si les conditions suivantes sont vérifiées : il existe un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de V_n et des champs de r-repères X^α définis dans U_α tels que $X^\beta(x) = X^\alpha(x).s^{\alpha\beta}(x)$, pour $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, où $s^{\alpha\beta}$ est une application différentiable de $U_\alpha \cap U_\beta$ dans G . L'ensemble des couples $\{(U_\alpha , X^\alpha)\}$ sera appelé un atlas de la structure S . Deux atlas $\{(U_\alpha , X^\alpha)\}$ et $\{(V_\alpha , Y^\alpha)\}$ définissent la même structure si

$$Y^\beta(x) = X^\alpha(x)\, t^{\alpha\beta}(x) \quad \text{pour} \quad x \in U_\alpha \cap V_\beta ,$$

où $t^{\alpha\beta}$ est une application différentiable de $U_\alpha \cap V_\beta$ dans G .

Un sous-ensemble Π de $\Pi^r(V_n)$ est un <u>sous-groupoïde de</u> $\Pi^r(V_n)$ s'il satisfait les conditions suivantes :

1° si $X , Y \in \Pi$ et si le produit $X.Y$ est défini, alors $X.Y \in \Pi$;
2° si $X \in \Pi$, alors $X^{-1} \in \Pi$.

Soit Ψ une application de $\Pi \times \Pi$ dans $V_n \times V_n$ telle que

$$\Psi(X , Y) = (\alpha(X) , \beta(Y)) ,$$

et posons $P(\Pi) = \Psi^{-1}(D)$, où D est la diagonale de $V_n \times V_n$. Le produit X.Y de deux éléments X et Y de Π est défini si et seulement si $(X , Y) \in P(\Pi)$.

Un <u>sous-groupoïde de Lie de</u> $\Pi^r(V_n)$ est un sous-ensemble Π de $\Pi^r(V_n)$ vérifiant les conditions suivantes :

a. Π est un sous-groupoïde de $\Pi^r(V_n)$.
b. Π est une sous-variété de $\Pi^r(V_n)$ et la projection canonique γ de Π dans $V_n \times V_n$ est sur, et de rang maximal.
c. L'application $(X , Y) \to X.Y$ de $P(\Pi)$ dans Π est différentiable. (Par la condition b., $P(\Pi)$ est une sous-variété fermée de $\Pi \times \Pi$).
d. L'application $X \to X^{-1}$ de Π sur Π est différentiable.

Nous désignons par $G(\Pi, x)$ l'ensemble de tous les éléments X de source et de but x d'un sous-groupoïde de Lie Π de $\Pi^r(V_n)$. $G(\Pi, x)$ est un groupe que nous appellerons <u>le groupe d'isotropie de</u> Π au point x . Les groupes d'isotropie de Π aux différents points sont isomorphes.

PROPOSITION 2.1. - Le groupe $G(\Pi, x)$ est un sous-groupe de Lie de $L^r_n(V_n , x)$.

PROPOSITION 2.2. – Un sous-groupoïde de Lie Π de $\Pi^r(V_n)$ est un espace fibré de base $V_n \times V_n$, de projection γ, de fibre $G(\Pi, x_o)$ et de groupe structural $G(\Pi, x_o) \times G(\Pi, x_o)$, où x_o est un point de V_n, et le groupe $G(\Pi, x_o) \times G(\Pi, x_o)$ opère sur $G(\Pi, x_o)$ de la manière suivante : $(\sigma, \tau).\xi = \tau.\xi.\sigma^{-1}$.

En effet, par la condition b., il existe un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de V_n et des applications différentiables $\varphi_{\alpha,\beta}$ de $U_\alpha \times U_\beta$ dans Π telles que $\gamma(\varphi_{\alpha,\beta}(x, y)) = (x, y)$ pour tout $(x, y) \in U_\alpha \times U_\beta$. Supposons que $x_o \in U_{\alpha_o}$ et posons $\varphi_\alpha(x) = \varphi_{\alpha_o,\alpha}(x_o, x)$ pour tout $x \in U_\alpha$. Soit $\Psi_{\alpha,\beta}$ une application de $U_\alpha \times U_\beta \times G(\Pi, x_o)$ dans Π définie de la façon suivante :

$$\Psi_{\alpha,\beta}(x, y, \sigma) = \varphi_\beta(y).\sigma.\varphi_\alpha(x)^{-1} .$$

On vérifie facilement que les applications $\Psi_{\alpha,\beta}$ définissent la structure fibrée exigée.

PROPOSITION 2.3. – Les notations étant celles de la proposition 2.2., soit Π_{x_o} l'ensemble de tous les éléments X de Π de source x_o. Π_{x_o} est une sous-variété fermée de Π et un espace fibré principal de base V_n, de groupe structural $G(\Pi, x_o)$ et de projection β ($\beta(X)$ étant le but de X).

Soit maintenant S une G-structure d'ordre r, définie dans une variété V_n, et soit (U_α, X^α) un atlas de S. Un r-repère X d'origine x est dit un repère distingué de S s'il existe un $\sigma \in G$ tel que $X = X^\alpha(x).\sigma$, où $x \in U_\alpha$. Cette définition est indépendante du choix de U_α, tel que $x \in U_\alpha$, et du choix d'un atlas. L'ensemble $H(S)$ des repères distingués de S est un espace fibré principal de base V_n et de groupe G.

Nous désignons par $\Pi(S)$ l'ensemble de tous les éléments Y de $\Pi^r(V)_n$ ayant la propriété suivante : si X est un repère distingué de S d'origine x (x étant la source de Y), $Y.X$ est aussi un repère distingué de S.

PROPOSITION 2.4. – $\Pi(S)$ est un sous-groupoïde de Lie de $\Pi^r(V_n)$.

Soit maintenant Π un sous-groupoïde de Lie de $\Pi^r(V_n)$ et soit X_o un repère d'origine x_o de V_n. L'application k de $L^r_n(V_n, x_o)$ sur L^r_n définie par $k(Y) = X_o^{-1}.Y.X_o$ est un isomorphisme différentiable de $L^r_n(V_n, x_o)$ sur L^r_n. Le sous-groupe de Lie $G(\Pi, x_o)$ de $L^r_n(V_n, x_o)$ est appliqué par k sur un sous-groupe de Lie G de L^r_n.

PROPOSITION 2.5. - Il existe une G-structure S telle que $\Pi = \Pi(S)$ et que X_o soit un repère distingué de S.

Les notations étant celles de la démonstration de la proposition 2.2., posons $X^{\alpha}(x) = \varphi_{\alpha}(x).X_o$ pour $x \in U_{\alpha}$. X^{α} est alors un champ des r-repères dans U_{α} et l'atlas $\{(U_{\alpha}, X^{\alpha})\}$ définit une G-structure S telle que $\Pi(S) = \Pi$. De plus on peut supposer que $\varphi_{\alpha_o}(x_o)$ = l'élément neutre de $G(\Pi, x_o)$. Alors $X_o = X^{\alpha_o}(x_o)$ est un repère distingué de S.

3. Les pseudo-groupes de Lie transitifs.

Soient V_n une variété et f une application biunivoque d'un ouvert U de V_n sur un ouvert V de V_n. f est un automorphisme local de V_n de source U et de but V si f et f^{-1} sont différentiables.

Un ensemble Γ d'automorphismes locaux de V_n est un pseudo-groupe si les conditions suivantes sont vérifiées :

1° L'application identique de V_n appartient à Γ.

2° Si $f \in \Gamma$, l'application inverse f^{-1} appartient à Γ. Si f et $g \in \Gamma$, l'application composée $f.g$ appartient à Γ.

3° Soit f un automorphisme local de V_n de source $U = \bigcup U_i$ tel que les restrictions de f à U_i, pour chaque indice i, appartiennent à Γ. Alors $f \in \Gamma$.

Γ est transitif sur V_n, si pour tout point (x, y) de $V_n \times V_n$ il existe un $f \in \Gamma$ tel que $f(x) = y$.

Nous désignons par $\Pi^r(\Gamma)$ l'ensemble des r-jets $j^r_x f$, où $f \in \Gamma$ et x parcourt la source de f. $\Pi^r(\Gamma)$ est un sous-groupoïde de $\Pi^r(V_n)$. L'ensemble des éléments de $\Pi^r(\Gamma)$ de source x sera noté par $\Pi^r_x(\Gamma)$. Les éléments de $\Pi^r(\Gamma)$ de source et de but x forment un groupe $G^r(\Gamma, x)$ que nous appellerons le groupe d'isotropie d'ordre r de Γ au point x. Un pseudo-groupe Γ est dit complet d'ordre r si la condition suivante est vérifiée : si f est un automorphisme local de V_n de source U tel que $j^r_x f \in \Pi^r(\Gamma)$ pour tout $x \in U$, alors $f \in \Gamma$.

Un pseudogroupe de Lie transitif d'ordre r est un pseudo-groupe Γ opérant sur V_n vérifiant les conditions suivantes :

1° Γ est complet d'ordre r.

2° $\Pi^r(\Gamma)$ est un sous-groupoïde de Lie de $\Pi^r(V_n)$.

Puisque la projection canonique γ est une application de $\Pi^r(\Gamma)$ sur $V_n \times V_n$, Γ est transitif. Le groupe d'isotropie de $\Pi^r(\Gamma)$ au point x coïncide avec le groupe d'isotropie d'ordre r de Γ au point x. $G^r(\Gamma, x)$ est un sous-groupe de Lie de $L^r_n(V_n, x)$.

Soit maintenant S une G-structure d'ordre r et soit $\Gamma(S)$ l'ensemble de tous les automorphismes locaux f de V_n qui appliquent les repères distingués de S en des repères distingués de S, c'est-à-dire pour tout point x de la source de f et pour tout repère distingué X d'origine x, $f^{(r)}(X) = j^r_x f.X$ est un repère distingué. $\Gamma(S)$ est un pseudo-groupe complet d'ordre r que nous appellerons le pseudo-groupe des automorphismes locaux de S. Les éléments de $\Gamma(S)$ dont les sources sont V_n forment un groupe $G(S)$, le groupe des automorphismes de S. Un automorphisme local f de V_n appartient à $\Gamma(S)$ si et seulement si $j^r_x f \in \Pi(S)$ pour tout x dans la source de f.

PROPOSITION 3.1. – Tout pseudo-groupe de Lie transitif d'ordre r est le pseudo-groupe des automorphismes locaux d'une G-structure d'ordre r.

Une G-structure S est dite une structure définie par un pseudo-groupe de Lie transitif Γ d'ordre r si $\Pi(S) = \Pi^r(\Gamma)$. Une G-structure S est localement homogène et isotrope si, pour tout couple (X, Y) des repères distingués de S, il existe un $f \in \Gamma(S)$ tel que $f^{(r)}(X) = Y$.

PROPOSITION 3.2. – S est localement homogène et isotrope si et seulement si elle est définie par un pseudo-groupe de Lie transitif. Si S est localement homogène et isotrope, $\Gamma(S)$ est un pseudo-groupe de Lie transitif.

EXEMPLE 1. – Soit G un groupe de Lie et soit $V_n = G/H$ un espace homogène de G. Soit Γ_G l'ensemble de tous les automorphismes locaux f de V_n jouissant de la propriété suivante : la restriction à un voisinage suffisamment petit de tout point de la source de f est une restriction d'une transformation de G. Supposons que la condition (p) suivante soit vérifiée : si un élément σ de G laisse invariant tout point d'un ouvert non vide de V_n, alors $\sigma = 1$. (Si G est connexe et si G opère effectivement sur V_n, cette condition est vérifiée). Γ_G est alors un pseudo-groupe de Lie d'un certain ordre.

EXEMPLE 2. – Soit V_{2n} une variété analytique réelle munie d'une structure presque complexe S. S est localement homogène et isotrope si et seulement si elle est une structure complexe.

Deux G-structures d'ordre r sont dites associées $(S \sim T)$, si $\Pi(S) = \Pi(T)$.

PROPOSITION 3.3. - Si $S \sim T$, alors $\Gamma(S) = \Gamma(T)$. Si, réciproquement, $\Gamma(S) = \Gamma(T)$, et si S est localement homogène et isotrope, alors $S \sim T$. Si S est localement homogène et isotrope et $S \sim T$, alors T est aussi localement homogène et isotrope.

Soit maintenant S une G-structure d'ordre r définie par un atlas $\{(U_\alpha , X^\alpha)\}$, et soit σ un élément dans le normalisateur $N(G)$ de G dans L^r_n . Alors l'atlas $\{(U_\alpha , X^\alpha \sigma)\}$ définit une G-structure $S\sigma$ (cf. [1]). $S\sigma = S\tau$ si et seulement si $\sigma\tau^{-1} \in G$.

PROPOSITION 3.4. - $S \sim T$ si et seulement s'il existe un $\sigma \in N(G)$ tel que $T = S\sigma$.

Une structure S_r d'ordre r détermine canoniquement une structure S_p d'ordre p , $p < r$, telle que $\Pi(S_p) = \theta^r_p(\Pi(S_r))$. En particulier, si Γ est un pseudo-groupe de Lie d'ordre r , $\Pi^p(\Gamma) = \theta^r_p(\Pi^r(\Gamma))$ est un sous-groupoïde de Lie de $\Pi^p(V_n)$.

4. Prolongement d'une structure d'ordre 1 (cf. [3] et [5]).

Une G-structure d'ordre 1 sera définie par un atlas

$$\{(U_\alpha ; \theta^1_\alpha , \dots , \theta^n_\alpha)\} ,$$

où θ^i_α sont des formes de Pfaff linéairement indépendantes dans U_α telles que

$$\theta^i_\alpha(x) = a^i_j(S^{\alpha\beta}(x)).\, \theta^j_\beta(X) ,$$

$\sigma \to (a^i_j(\sigma))$ étant une représentation matricielle de L_n . Des cartes locales $(U_\alpha , \varphi_\alpha)$ de $H(S)$ (l'espace fibré principal associé à S) sont définies de la façon suivante : φ_α est une application de $U_\alpha \times G$ sur $p^{-1}(U_\alpha)$ (p étant la projection de $H(S)$), telle que $\varphi_\alpha(x , \sigma) = (X_1 , \dots , X_n)$, où $X_i = a^j_i(\sigma).X^\alpha_j(x)$, $(X^\alpha_1 , \dots , X^\alpha_n)$ étant le champ des repères dans U_α dual à (θ^i_α) . Soient η^i_α des formes de Pfaff dans $U_\alpha \times G$ telles que $\eta^i_\alpha(x , \sigma) = a^i_j(\sigma^{-1})\ \theta^j_\alpha(x)$ et posons $\omega^i_\alpha = \varphi^{*-1}_\alpha (\eta^i_\alpha)$. On voit que $\omega^i_\alpha = \omega^i_\beta$ dans $U_\alpha \cap U_\beta$ et on peut donc définir des formes de Pfaff ω^i sur $H(S)$ définies globalement par les conditions $\omega^i(x) = \omega^i_\alpha(x)$ pour $x \in U_\alpha$. ω^i sont linéairement indépendantes.

Choisissons une base $A_\rho = (a^i_{j\rho})$ ($\rho = 1 , \dots , r$; $r = \dim G$) de l'algèbre de Lie $L(G)$ de G , une fois pour toute. Dans $p^{-1}(U_\alpha)$ on a

$$d\omega^i = a^i_{j\rho}\ \omega^j \wedge \pi'^\rho_\alpha + \frac{1}{2} c'^i_{jk}\ \omega^j \wedge \omega^k ,$$

où π'^{ρ}_{α} et c'^{i}_{jk} ($c'^{i}_{jk} = - c'^{i}_{kj}$) sont respectivement des formes de Pfaff et des fonctions dans $p^{-1}(U_\alpha)$. Soient maintenant ξ^{ρ}_{i} ($\rho = 1, \dots, r$; $i = 1, \dots, n$) $r.n$ variables indépendantes, et soient

$$A^{i}_{jk}(\xi) = \sum_{\rho} (a^{i}_{j\rho} \xi^{\rho}_{k} - a^{i}_{k\rho} \xi^{\rho}_{j})$$

des formes linéaires en ξ. Désignons par A l'ensemble des indices $[^{i}_{jk}]$ ($i, j, k = 1, \dots, n$; $j < k$). Soit B un sous-ensemble de A ayant la propriété suivante : les $A^{i}_{jk}(\xi)$ telles que $[^{i}_{jk}] \in B$ sont linéairement indépendantes et $A^{i}_{jk}(\xi)$, $[^{i}_{jk}] \in A - B$, est une combinaison linéaire des formes $A^{s}_{tu}(\xi)$, $[^{s}_{tu}] \in B$. On peut trouver des fonctions b^{ρ}_{i} dans $p^{-1}(U_\alpha)$ telles que $A^{i}_{jk}(b(q)) = - c'^{i}_{jk}(q)$ pour tout $q \in p^{-1}(U_\alpha)$ et pour tout $[^{i}_{jk}] \in B$.
Posons $\pi = \pi'^{\rho}_{\alpha} + b^{\rho}_{k}\, \omega^{k}$. On a alors

$$d\,\omega^{i} = a^{i}_{j\rho}\, \omega^{j} \wedge \pi^{\rho}_{\alpha} + \frac{1}{2} c^{i}_{jk}\, \omega^{j} \wedge \omega^{k} ,$$

où

$$c^{i}_{jk} = c'^{i}_{jk} + A^{i}_{jk}(b) .$$

En particulier, $c^{i}_{jk} = 0$ pour $[^{i}_{jk}] \in B$.

Supposons maintenant qu'une telle transformation ait été associée à tout α. On vérifie alors que les fonctions c^{i}_{jk} sont des fonctions sur $H(S)$ définies globalement. Ces fonctions c^{i}_{jk} sont appelées par CHERN [5] <u>les invariants de la structure</u> S. La structure S est dite <u>intégrable</u> si l'on peut choisir un sous-ensemble B de A de manière que les invariants c^{i}_{jk} soient des constantes. La condition d'intégrabilité ne dépend que de la structure S.

PROPOSITION 4.1. - Une G-structure d'ordre 1 qui est localement homogène et isotrope est intégrable.

Désignons maintenant par $G^{(1)}$ le groupe de toutes les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}, \quad B = (b^{\rho}_{i}), \quad (\rho = 1, \dots, r ; \quad i = 1, \dots, n)$$

où

$$A^{i}_{jk}(b) = \sum_{\rho} (a^{i}_{j\rho}\, b^{\rho}_{k} - a^{i}_{k\rho}\, b^{\rho}_{j}) = 0 .$$

Alors l'atlas $\{(p^{-1}(U_\alpha) ; \omega^{i}, \pi^{\rho}_{\alpha})\}$ définit dans $H(S)$ une $G^{(1)}$-structure $\tilde{S}$. $\tilde{S}$ dépend du choix de B. Mais on peut montrer la proposition suivante.

PROPOSITION 4.2. – Supposons que S soit intégrable, et soit T une $G^{(1)}$-structure dans $H(S)$ définie par un atlas

$$(W_\beta\ ,\ \bar{\omega}^1\ ,\ \dots\ ,\ \bar{\omega}^n\ ,\ \bar{\pi}^1_\beta\ ,\ \dots\ ,\ \bar{\pi}^r_\beta)\quad ,$$

où $\bar{\omega}^i = s^i_j\ \omega^j$, s^i_j étant des constantes. Supposons que, dans W_β ,

$$d\omega^i = a^i_{j\rho}\ \bar{\omega}^j \wedge \bar{\pi}^\rho_\beta + \frac{1}{2}\ \bar{c}^i_{jk}\ \bar{\omega}^j \wedge \bar{\omega}^k\ ,$$

où $\bar{c}^i_{jk} = -\ \bar{c}^i_{kj}$ sont des constantes. Alors deux structures T et $\tilde{S}$ sont associées.

On dit qu'une $G^{(1)}$-structure T vérifiant les conditions ci-dessus est un prolongement de S par rapport à une base $A_\rho = (a^i_{j\rho})$ de $L(G)$ et que les constantes $a^i_{j\rho}$ et $\bar{c}^i_{jk}$ associées à T forment un système de constantes de structure de la structure intégrable S . Un prolongement de S est un prolongement de S par rapport à une base de $L(G)$. Deux prolongements par rapport à la même base sont associés.

Soient maintenant S et $S' = S\tau$ deux G-structures intégrables associées, où $\tau \in N(G)$. Soit $(X'_1\ ,\ \dots\ ,\ X'_n)$ un repère distingué de S' et soit $X_i = a^j_i(\tau)\ X'_j$. Alors $(X_1\ ,\ \dots\ ,\ X_n)$ est un repère distingué de S et l'application $\alpha((X'_i)) = (X_i)$ est un isomorphisme de la variété $H(S')$ sur la variété $H(S)$. Soit T un prolongement de S et soit $\alpha^*(T)$ l'image réciproque de T . On voit que $\alpha^*(T)$ est un prolongement de S' et que le système des constantes de structure de S' défini par $\alpha^*(T)$ est égal à celui de S défini par T . Il en résulte que, si S et S' sont deux G-structures intégrables associées, les familles des systèmes de constantes de structure de S et de S' que l'on peut définir par les prolongements de S et de S' sont les mêmes.

Soit maintenant Γ un pseudo-groupe de Lie transitif d'ordre 1 opérant sur une variété V_n , et soit S une G-structure d'ordre 1 définie par Γ . S est localement homogène et isotrope et donc intégrable. La famille des systèmes des constantes de structure de Γ est, par définition, celle de la structure S . Puisque deux G-structures définies par Γ sont associées, la définition est indépendante du choix de S .

Soit $a^i_{\rho j}$, $c^i_{jk}(i\ ,\ j\ ,\ k = 1\ ,\ \dots\ ,\ n\ ;\ \rho = 1\ ,\ \dots\ ,\ r)$ un système de constantes de structure de Γ . On voit que les équations suivantes considérées comme équations linéaires par rapport aux inconnues $\gamma^\rho_{\sigma\tau}$, $u^\rho_{i\sigma}$, v^ρ_{ij} $(\gamma^\rho_{\sigma\tau} = -\ \gamma^\rho_{\tau\sigma}$, $v^\rho_{ij} = -\ v^\rho_{ji})$ sont compatibles :

$$(1)\ a^i_{j\tau}\, a^j_{k\sigma} - a^i_{j\sigma}\, a^j_{k\tau} = \gamma^\rho_{\tau\sigma}\, a^i_{k\rho}\ ,$$

$$(2)\ a^i_{kt}\, a^k_{s\rho} - c^i_{ks}\, a^k_{t\rho} + a^i_{k\rho}\, c^k_{ts} - a^i_{t\sigma}\, u^\sigma_{s\rho} + a^i_{s\sigma}\, u^\sigma_{t\rho} = 0\ ,$$

$$(3)\ c^i_{ku}\, c^k_{st} + c^i_{ks}\, c^k_{tu} + c^i_{kt}\, c^k_{us} - a^i_{u\rho}\, v^\rho_{st} - a^i_{s\rho}\, v^\rho_{tu} - a^i_{t\rho}\, v^\rho_{us} = 0\ .$$

Les équations (1) sont équivalentes aux équations

$$[A_\tau\, , A_\sigma] = \gamma^\rho_{\tau\sigma}\, A_\rho\ .$$

Il en résulte que les $\gamma^\rho_{\tau\sigma}$ sont les constantes de structure du groupe d'isotropie d'ordre 1 de Γ .

Soit maintenant S^r une G-structure d'ordre r . Tout $f \in \Gamma(S^r)$ peut être prolongé à un automorphisme local $f^{(r)}$ de $H(S^r)$ de source $p^{-1}(U)$ et de but $p^{-1}(V)$, où U et V sont respectivement la source et le but de f , et p est la projection de $H(S^r)$. Soit Δ un sous-pseudo-groupe de $\Gamma(S^r)$. Nous désignons par $\Delta^{(r)}$ l'ensemble de tous les automorphismes locaux $\tilde{f}$ de $H(S^r)$ jouissant de la propriété suivante : la restriction à un voisinage suffisamment petit de tout point de la source de $\tilde{f}$ est une restriction d'un $f^{(r)}$, où $f \in \Delta$. $\Delta^{(r)}$ est un pseudo-groupe que nous appellerons <u>le prolongement de</u> Δ à $H(S^r)$. On peut montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 4.3. - Soit S une G-structure intégrable, et soit T un prolongement de S . Alors $\Gamma(T) = \Gamma(S)^{(1)}$. Un automorphisme local de H(S) appartient à $\Gamma(S)^{(1)}$ si et seulement s'il laisse invariantes les formes de Pfaff

$$\omega^1\, , \dots\, , \omega^n\ .$$

5. <u>Réduction d'un pseudo-groupe de Lie d'ordre</u> $r > 1$ <u>en un pseudo-groupe de Lie d'ordre</u> 1 .

Soit Γ un pseudo-groupe de Lie transitif d'ordre $r > 1$ opérant sur une variété V_n . On verra que Γ détermine canoniquement un pseudo-groupe de Lie transitif d'ordre 1 opérant sur la variété $\Pi^{r-1}(\Gamma)$.

Soient S^r une G-structure d'ordre r définie par Γ et z un point de V_n choisi une fois pour toutes, et soit Z un repère distingué de S^r d'origine z . L'application $\sigma \to Z\, \sigma\, Z^{-1}$ de G dans $L^r_n(V_n\, , z)$ est un isomorphisme de G sur $G^r(\Gamma, z)$, le groupe d'isotropie d'ordre r de Γ au point z . Soit $\{(U_\alpha\, , X^\alpha)\}$ un atlas de S^r , et posons $X'^\alpha(x) = X^\alpha(x).Z^{-1}$. Alors $X'^\alpha(x) \in \Pi^r_z(\Gamma)$ et $X'^\beta(x) = X'^\alpha(x).s'^{\alpha\beta}(x)$, pour tout $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, où $s'^{\alpha\beta}$ est une application différentiable de $U_\alpha \cap U_\beta$ dans $G^r(\Gamma, z)$.

L'atlas $\{(U_\alpha , X'^\alpha)\}$ définit donc une " $G^r(\Gamma , z)$-structure S'^r " et l'espace fibré principal des repères distingués de S'^r est $\Pi^r_z(\Gamma)$. On voit de plus que $\Pi(S'^r) = \Pi(S^r)$ et que $\Gamma(S') = \Gamma(S) = \Gamma$.

Nous identifierons dans la suite la structure S^r à S'^r .

La structure S^r détermine une $G^p(\Gamma , z)$-structure S^p pour tout $p \leqslant r$ telle que $\Pi(S^p) = \Pi^p(\Gamma)$ et que $H(S^p) = \Pi^p_z(\Gamma)$. Posons $\Gamma_p = \Gamma(S^p)$. Alors $\Pi^p(\Gamma_p) = \Pi^p(\Gamma)$ est un sous-groupoïde de Lie de $\Pi^p(V_n)$ et donc Γ_p est un pseudo-groupe de Lie transitif d'ordre p contenant Γ . On voit que $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \dots \supset \Gamma_r = \Gamma$. On peut donc définir le prolongement $\Gamma_\tau^{(p)}$ de Γ_τ $(r \geqslant q \geqslant p)$ à $H(S^p) = \Pi^p_z(\Gamma)$. $\Gamma_\tau^{(p)}$ est transitif. On dit que $\Gamma^{(p)} = \Gamma_r^{(p)}$ est le <u>prolongement normal d'ordre</u> p <u>de</u> Γ. Nous allons montrer que $\Gamma^{(r-1)}$ est un pseudo-groupe de Lie transitif d'ordre 1. Supposons maintenant que $p < r$ et posons $Z_p = j^p_z I$, où I est l'application identique de V_n . Soient f et g des éléments de Γ_{p+1} définis au point z . Utilisant des coordonnées locales de la variété des jets, on vérifie que $j^1_{Z_p} f^{(p)} = j^1_{Z_p} g^{(p)}$ si et seulement si $j^{p+1}_z f = j^{p+1}_z g$ (f et g étant les prolongements de f et de g à $H(S^p) = \Pi^p_z(\Gamma)$) . On peut donc définir une application F_{p+1} de $\Pi^{p+1}_z(\Gamma_{p+1})$ $(= \Pi^{p+1}_z(\Gamma))$ dans la variété $\Pi^1_{Z_p}(\Pi^p_z(\Gamma))$ par $F_{p+1}(j^{p+1}_z f) = j^1_{Z_p} f^{(p)}$. F_{p+1} est différentiable et de rang maximal, et $F_{p+1}(\Pi^{p+1}_z(\Gamma)) = \Pi^1_{Z_p}(\Gamma^{(p)})$. Soit $N^{p+1}(\Gamma, z)$ le noyau de l'homomorphisme canonique de $G^{p+1}(\Gamma , z)$ sur $G^p(\Gamma, z)$. Alors $\Pi^{p+1}_z(\Gamma)$ est un espace fibré principal de base $\Pi^p_z(\Gamma)$, de projection θ^{p+1}_p et de groupe $N^{p+1}(\Gamma, z)$ et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Pi^{p+1}_z(\Gamma) & \xrightarrow{F_{p+1}} & \Pi^1_{Z_p}(\Gamma^{(p)}) \\ \downarrow \theta^{p+1}_p & & \downarrow \beta \\ \Pi^p_z(\Gamma) & \xrightarrow{\text{identité}} & \Pi^p_z(\Gamma) \end{array} .$$

Utilisant ces faits on peut montrer que $\Pi^1(\Gamma^{(p)})$ est un sous-groupoïde de Lie de $\Pi^1(\Pi^p_z(\Gamma))$. Le groupe d'isotropie de $\Pi^1(\Gamma^{(p)})$ au point Z_p est $G^1(\Gamma^{(p)} , Z_p)$ et $\Pi^1(\Gamma^{(p)})$ définit donc une $G^1(\Gamma^{(p)} , Z_p)$-structure T_p d'ordre 1 dans la variété $\Pi^p_z(\Gamma)$ qui est localement homogène et isotrope et $H(T_p) = \Pi^1_z(\Gamma^{(p)})$.

On peut montrer les propositions suivantes :

1° $\Gamma(T_p) = \Gamma^{(p)}_{p+1}$ pour $p < r$.

2° $F_{p+1}\ \Gamma(T_p)^{(1)}.F^{-1}_{p+1} = \Gamma^{(p+1)}_{p+1}$ pour $p < r$,

où $\Gamma(T_p)^{(1)}$ est le prolongement de $\Gamma(T_p)$ à $H(T_p) = \Pi^1_{Z_p}(\Gamma^{(p)})$ et $F_{p+1}.\Gamma(T_p)^{(1)}.F^{-1}_{p+1}$ est le pseudo-groupe de tous les automorphismes locaux h de $\Pi^{p+1}_z(\Gamma)$ de la forme $h = F_{p+1}.f.F^{-1}_{p+1}$, où $\tilde{f} \in \Gamma(T_p)^{(1)}$. Pour $p = r - 1$, on a $\Gamma_{p+1} = \Gamma$ et on obtient donc le théorème suivant.

THÉORÈME 5.1. – Soit Γ un pseudo-groupe de Lie transitif d'ordre r opérant sur une variété V_n. Le prolongement normal $\Gamma^{(r-1)}$ d'ordre $r-1$ de Γ est un pseudo-groupe de Lie transitif d'ordre 1 opérant sur la variété $\Pi^{r-1}_z(\Gamma)$, z étant un point de V_n, qui laisse invariante une G-structure T_{r-1} d'ordre 1. Le prolongement de $\Gamma^{(r-1)}$ à $H(T_{r-1})$ peut être identifié à $\Gamma^{(r)}$.

La famille des systèmes de constantes de structure de Γ est, par définition, celle du pseudo-groupe de Lie $\Gamma^{(r-1)}$ d'ordre 1.

Il résulte du théorème 5.1. et de la proposition 4.3. le théorème suivant.

THÉORÈME 5.2. – Les notations étant celles du théorème 5.1., le prolongement normal $\Gamma^{(r)}$ d'ordre r de Γ est un pseudo-groupe des automorphismes locaux d'une G-structure T_r d'ordre 1 dans la variété $\Pi^r_z(\Gamma)$. T_r est définie par un atlas $\{(V_\alpha, \omega^1, \ldots, \omega^m, \pi^1_\alpha, \ldots, \pi^r_\alpha)\}$, où

$$m = \dim \Pi^{r-1}_z(\Gamma)$$

$$r = \dim G^1(\Gamma^{(r-1)}, Z_{r-1})$$

et

$$d\omega^i = a^i_{j\rho}\ \omega^j \wedge \pi^\rho_\alpha + \tfrac{1}{2} c^i_{jk}\ \omega^j \wedge \omega^k,$$

$a^i_{j\rho}$, c^i_{jk} étant des constantes de structure de Γ. Un automorphisme local de $\Pi^r_z(\Gamma)$ appartient à Γ si et seulement s'il laisse invariantes les formes ω^i.

REMARQUE. – On ne sait pas en général si $\Gamma^{(r)}$ est un pseudo-groupe de Lie transitif d'ordre 1. Il l'est si Γ est aussi un pseudo-groupe de Lie d'ordre $r+1$ ou si Γ est de type fini ou involutif (voir paragraphes 6 et 7).

6. Les pseudo-groupes de Lie de type fini.

Un pseudo-groupe Γ est un pseudo-groupe de Lie transitif de type fini s'il existe un entier $r \geq 1$ jouissant des propriétés suivantes :

1° Γ est un pseudo-groupe de Lie transitif d'ordre r.

2° Il existe un entier $s \leq r$ tel que $\dim G^s(\Gamma, x) = \dim G^{s-1}(\Gamma, x)$. (Nous posons $G^0(\Gamma, x) = (1)$.)

Si Γ est de type fini, l'homomorphisme canonique de $G^s(\Gamma, x)$ sur $G^{s-1}(\Gamma, x)$ est localement isomorphe. Il en résulte que l'application canonique de $\Pi^s(\Gamma)$ sur $\Pi^{s-1}(\Gamma)$ est localement biunivoque. Utilisant des coordonnées locales de la variété des jets on peut montrer le lemme suivant.

LEMME. - Si $\Pi^s(\Gamma) \to \Pi^{s-1}(\Gamma)$ est localement biunivoque, alors $\Pi^p(\Gamma) \to \Pi^{p-1}(\Gamma)$ est biunivoque pour $p > s$.

Soit maintenant Γ un pseudo-groupe opérant sur V_n. On dit que Γ est simplement transitif, s'il est transitif et si un élément f de Γ laisse invariant un point x, alors la restriction de f à un voisinage U de x est l'application identique de U.

Soit Γ un pseudo-groupe de Lie de type fini et d'ordre r. Il résulte du lemme que $\dim \Pi^r_z(\Gamma) = \dim \Pi^{r-1}_z(\Gamma)$ et donc que

$$\dim \Pi^1(\Gamma^{(r-1)}, Z_{r-1}) \dim \Pi^r_z(\Gamma) - \dim \Pi^{r-1}_z(\Gamma) = 0 .$$

La structure T_r dans le théorème 5.2. est donc définie par un atlas

$$\{(U_\alpha, \omega^1, \dots, \omega^m)\}$$

et $d\omega^i = \frac{1}{2} c^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k$. Il en résulte le théorème suivant.

THÉORÈME 6.1. - Soit Γ un pseudo-groupe de Lie de type fini et d'ordre r. Le prolongement normal $\Gamma^{(r)}$ d'ordre r de Γ est alors un pseudo-groupe de Lie d'ordre 1 simplement transitif. Un automorphisme local de la variété $\Pi^r_z(\Gamma)$ appartient à $\Gamma^{(r)}$ si et seulement s'il laisse invariantes des formes de Pfaff linéairement indépendantes $\omega^1, \dots, \omega^m$ telles que

$$d\omega^i = \frac{1}{2} c^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k ,$$

où $m = \dim \Pi^r_z(\Gamma)$ et c^i_{jk} sont des constantes de structure de Γ.

EXEMPLE 3. - Soit Γ_G le pseudo-groupe dans l'exemple 1. Γ_G est alors un pseudo-groupe de Lie de type fini et d'un certain ordre r. Le nombre r est déterminé de la façon suivante : Soit 0 le point de $V_n = G/H$ représenté par H. L'application $\sigma \to j^p_0 \sigma$, $(\sigma \in H)$, est un homomorphisme de H sur $G^p(\Gamma_G, 0)$. Par la condition (P) (voir l'exemple 1) il existe un entier p tel que $\dim H = \dim G^p(\Gamma_G, 0)$. Alors le nombre $r-1$ est le plus petit entier p jouissant de cette propriété. Il existe un isomorphisme θ de la variété G

sur la variété $\Pi_o^r(\Gamma_{G_i})$ tel que $\theta^*(\omega^i)$ soient des formes de Pfaff invariantes à gauche de G , où ω^i sont les formes dans le théorème 5.1.

7. Les pseudo-groupes de Lie involutifs.

Pour la définition d'une algèbre de Lie linéaire involutive, voir [5] et [9]. Un groupe de Lie linéaire est involutif si son algèbre de Lie est involutive et une G-structure d'ordre 1 est involutive si G est involutif. Un pseudo-groupe de Lie d'ordre 1 est involutif si son groupe d'isotropie d'ordre 1 est involutif.

On démontre, en utilisant le théorème d'existence des solutions des systèmes en involution, la

PROPOSITION 7.1. - Soit S une G-structure involutive dans une variété analytique. Si S est intégrable, elle est localement homogène et isotrope et ses prolongements sont aussi intégrables et involutifs.

Un pseudo-groupe de Lie transitif d'ordre r est involutif si son prolongement normal d'ordre r - 1 est involutif. Il résulte du théorème 5.2. et de la proposition 7.1. le

THÉORÈME 7.1. - Si Γ est un pseudo-groupe de Lie transitif d'ordre r et involutif, le prolongement d'ordre r de Γ est un pseudo-groupe transitif d'ordre 1 et involutif.

Soit maintenant $\{a^i_{j\rho}, c^i_{jk}\}$ (i , j , k = 1 , ... , ; ρ = 1 , ... , r ; $c^i_{jk} = -c^i_{kj}$) un système de constantes tel que les équations linéaires (1), (2) et (3) de paragraphe 4 soient compatibles. Supposons de plus que l'algèbre de Lie L engendrée par les matrices $A_\rho = (a^i_{j\rho})$ soit involutive et soit G le groupe de Lie linéaire engendré par L .

THÉORÈME 7.2. - Soit $\{a^i_{j\rho}, c^i_{jk}\}$ un système de constantes vérifiant les conditions ci-dessus. Il existe alors une G-structure intégrable définie dans un domaine D de l'espace numérique R_n telle que $\{a^i_{j\rho}, c^i_{jk}\}$ soit un système de constantes de structure de cette structure. Autrement dit, il existe un pseudo-groupe de Lie transitif d'ordre 1 opérant dans D tel que $\{a^i_{j\rho}, c^i_{jk}\}$ soit un système de constantes de structure de ce pseudo-groupe (voir [2]).

PROBLÈMES :

1° On voit facilement qu'un pseudo-groupe de Lie Γ d'ordre r est complet d'ordre p pour tout $p > r$. Γ est-il un pseudo-groupe de Lie d'ordre p pour tout $p > r$?

2° Tout pseudo-groupe de Lie transitif et analytique est-il involutif ou de type fini ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNARD (Daniel). – Sur la structure des pseudo-groupes de Lie, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 239, 1954, p. 1263-1265.

[2] CARTAN (Elie). – Sur la structure des groupes infinis de transformations, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 21, 1904, p. 153-206 ; et t. 22, 1905, p. 219-308.

[3] CARTAN (Elie). – Les sous-groupes des groupes continus, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 25, 1908, p. 57-194.

[4] CARTAN (Elie). – Les groupes de transformations continus, infinis, simples, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 26, 1909, p. 93-161.

[5] CHERN (S. S.). – Pseudo-groupes continus infinis, Colloque de Géométrie différentielle [Strasbourg 1953]. – Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1953 (Coll. int. du C.N.R.S., 52) ; p. 119-135.

[6] EHRESMANN (Charles). – Structures locales et structures infinitésimales, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 234, 1952, p. 587-589.

[7] EHRESMANN (Charles). – Introduction à la théorie... , Colloque de Géométrie différentielle [Strasbourg 1953]. – Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1953 (Coll. int. du C.N.R.S., 52) ; p. 97-110.

[8] LIBERMANN (Mlle Paulette). – Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales. – Bologna, Cesare Zuffi, 1953 (Thèse Sc. math. Strasbourg. 1953).

[9] MATSUSHIMA (Yosô). – Sur les algèbres de Lie linéaires semi-involutives (17p.), Colloque de topologie de Strasbourg 3. 1954-1955. – Université de Strasbourg.