SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JACQUES-LOUIS LIONS

Espaces de Beppo-Levi et quelques applications

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. nº 117, p. 169-181
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__169_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1955)

ESPACES DE BEPPO-LEVI ET QUELQUES APPLICATIONS

par Jacques-Louis LIONS

Introduction. - Le point de départ de l'étude des espaces de Beppo-Levi (en abrégé BL) est le principe de Dirichlet (cf. COURANT [7]) dont voici un énoncé imprécis :

Soit Ω ouvert de R^n, connexe, de frontière Ω^* ; on donne une fonction φ sur Ω^* ; désignons par E l'espace des fonctions f définies sur Ω, une fois continûment différentiables dans Ω, f continue dans $\bar{\Omega}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$; parmi les $f \in E$, égales à φ sur Ω^*, il existe (avec les hypothèses "convenables" sur Ω^* et φ) une fonction h et une seule, rendant minimum $\int_\Omega |\text{grad } f|^2 \, dx$. Cette fonction est harmonique dans Ω.

Il est naturel de chercher à remplacer, dans l'énoncé précédent, l'espace E par l'espace des distributions sur Ω, dont le gradient est de carré sommable sur Ω (d'où la notion de $BL(\Omega)$ (cf. n° 1)). Le problème principal est alors de donner un sens précis au principe de Dirichlet.

Les résultats que l'on va donner peuvent (au moins en partie) être généralisés dans deux directions :

a. en opérant sur une variété convenable, au lieu d'un ouvert de R^n ;

b. en s'intéressant au cas Δ^m, $m > 1$, au lieu de Δ. On va seulement ici considérer le cas $\Omega \subset R^n$ et Δ.

1. Espaces $BL(\Omega)$. Premières propriétés.

Soit donc Ω ouvert connexe de R^n ; on désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact sur Ω, à valeurs complexes, muni de la topologie habituelle [17]. Son dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω. On désigne par $L^2(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur Ω.

DÉFINITION 1.1. - On appelle espace de Beppo-Levi sur Ω, et on désigne par $BL(\Omega)$, l'espace des distributions $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telles que

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \qquad \text{pour tout } i = 1, \dots, n .$$

L'espace $BL(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(S\ ,\ T)_1 = \sum_i \left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\ ,\ \frac{\partial T}{\partial x_i}\right)_{L^2(\Omega)} \quad , \qquad S\ ,\ T \in BL(\Omega)\ .$$

On pose :

$$||S||_1 = \sqrt{(S,S)_1}\ .$$

Comme Ω est connexe, $||S||_1 = 0$ équivaut à S = constante. L'espace <u>séparé</u> associé à $BL(\Omega)$ est donc

$$BL^o(\Omega) = BL(\Omega)/C\ , \qquad C = \text{corps des constantes complexes.}$$

Du théorème de de Rham résulte aussitôt :

THÉORÈME 1.1. - <u>L'espace</u> $BL^o(\Omega)$ <u>est un espace de Hilbert.</u>

<u>Propriétés locales des distributions de</u> $BL(\Omega)$.

Pour l'étude locale des $T \in BL(\Omega)$ on utilise le procédé de la paramétrix de SCHWARTZ ([17], tome II, p. 39). Soit P une paramétrix de

$$\Delta P = \zeta + \delta\ , \qquad \zeta \in \mathcal{D}(R^n)\ , \qquad \delta = \text{masse de Dirac,}$$
$$P = A/|x|^{n-2} \quad (n \geqslant 3) \qquad \text{avec } A \in \mathcal{D}(R^n) = \text{constante}$$

convenable au voisinage de 0 . L'étude locale de T se ramène à l'étude locale de produits de compositions du type :

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} * f\ , \qquad f \in L^2(R^n) \qquad \text{à support compact.}$$

(Si $n = 2$, $\log|x|$ au lieu de $|x|^{2-n}$). Un résultat de SOBOLEV [19] donne alors

THÉORÈME 1.2. - <u>Si</u> $T \in BL(\Omega)$, <u>alors</u> T <u>est presque partout égale à une fonction localement de puissance</u> q-<u>ième sommable sur</u> Ω , <u>avec</u> $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ <u>si</u> $n \geqslant 3$; <u>si</u> $n = 2$, <u>fonction localement</u> L^r , <u>pour tout</u> r <u>fini.</u>

REMARQUE 1.1. - Le produit de composition $\frac{\partial P}{\partial x_i} * f$ a les mêmes propriétés locales que $\frac{1}{r^{n-1}} * f$. Or, au voisinage de 0 , $\frac{1}{r^{n-1}}$ est dans L^λ , pour tout λ tel que $\lambda < \frac{n}{n-1}$, donc $\frac{1}{r^{n-1}} * f$ est localement dans L^{q_1} avec $\frac{1}{q_1} > \frac{1}{q}$ $(n \geqslant 3)$.

Le point qui n'est pas trivial du tout est que l'on peut prendre $q_1 = q$.

Voici le raccord avec la définition initiale de Beppo-Levi :

THÉORÈME 1.3. (NIKODYM pour l'essentiel). - Pour que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ soit dans $BL(\Omega)$, il faut et il suffit que ce soit une fonction presque partout égale à une fonction absolument continue sur presque toutes les parallèles à chacun des axes de coordonnées et que ses dérivées (usuelles) soient dans $L^2(\Omega)$.

On peut maintenant revenir au principe de Dirichlet. On donne φ sur Ω^* supposons qu'il existe $\Phi \in BL(\Omega)$, "égale" dans un sens à préciser à φ sur Ω^*. Une généralisation du principe de Dirichlet pourrait être : Parmi les $f \in BL(\Omega)$ telles que $f - \Phi$ soit "nul" sur Ω^*, il existe une fonction h unique rendant $\|f\|_1$ minimum ; cette fonction est harmonique.

Pour donner un sens à " $f - \Phi$ nul sur Ω^* ", on est conduit à ceci : on considère $\mathcal{D}(\Omega)$, et sur $\mathcal{D}(\Omega)$ la structure $(\varphi, \psi)_1$ induite par $BL(\Omega)$, on munit ainsi $\mathcal{D}(\Omega)$ d'une structure pré-hilbertienne séparée ; il est naturel d'introduire le complété :

DÉFINITION 1.2. - On désigne par $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ l'espace de Hilbert complété de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la structure $(\varphi, \psi)_1$.

On va étudier cet espace.

2. Espace $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$.

Il y a deux cas assez différents, selon que $n \geqslant 3$ ou $n = 2$.

Si $n \geqslant 3$, on désigne par $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ l'espace des $u \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, tels que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, espace muni de sa topologie naturelle d'espace de Banach. Alors :

THÉORÈME 2.1. - Si $n \geqslant 3$, $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ coïncide avec l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}^1_{q,2}(\Omega)$ (en particulier, $\hat{\mathcal{D}}^1(R^n) = \mathcal{E}^1_{q,2}(R^n)$).

En effet, grâce au résultat cité de SOBOLEV, il existe une constante S telle que

$$\|\varphi\|_{L^q} \leq S \|\varphi\|_1 , \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) ,$$

d'où le théorème.

Si $n = 2$, la situation est moins simple car $\hat{\mathcal{D}}^1(R^2)$ ne peut être identifié à un sous-espace de $\mathcal{D}'(R^2)$. Il s'agit alors de voir pour quels ouverts Ω,

on peut identifier $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Pour cela, il faut utiliser la notion d'ensemble polaire (ou de capacité extérieure nulle).

Voici une définition des ensembles polaires, valable avec n quelconque. On désigne par $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ l'espace des $u \in L^2(\Omega)$ tels que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, muni de sa topologie naturelle d'espace de Hilbert ; par $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$; par $\mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega)$ le dual de $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$:

$$T \in \mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega) \Leftrightarrow T = f_o + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i , \qquad f_o , f_i \in L^2(\Omega) .$$

Ceci posé, un ensemble fermé F de R^n est polaire si la seule distribution $T \in \mathcal{D}'^1_{L^2}(R^n)$, de support $\subset F$, est $T = 0$. On voit assez facilement que cette notion coïncide avec la notion usuelle. Ceci posé, on peut montrer le

THÉORÈME 2.2. - Si $n = 2$, la condition nécessaire et suffisante pour que $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ puisse être identifié à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$ est que $\complement\Omega$ soit non polaire.

(Ω = ouvert greenien dans la terminologie de BRELOT-CHOQUET [5] ; la démonstration du théorème précédent peut être faite sans utilisation de la fonction de Green).

3. Principe et problème de Dirichlet.

On désigne par $\hat{\mathcal{D}}^{1\prime}(\Omega)$ le dual de $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ (lorsque $n = 2$ et que l'on parle de $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$, on suppose toujours que $\complement\Omega$ est non polaire) ;

$$T \in \hat{\mathcal{D}}^{1\prime}(\Omega) \Leftrightarrow T = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i , \qquad f_i \in L^2(\Omega) .$$

Le résultat suivant est immédiat :

THÉORÈME 3.1. - L'opérateur Δ définit un isomorphisme de $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ sur $\hat{\mathcal{D}}^{1\prime}(\Omega)$.

On désigne par $G(\Omega) = G$ l'opérateur inverse de $-\Delta$:

$G \in \mathcal{L}(\hat{\mathcal{D}}^{1\prime}(\Omega) ; \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega))$;

G est l'opérateur de Green de l'ouvert Ω. Grâce au théorème des noyaux de Schwartz, cet opérateur est défini par une distribution $G(x , y)$ sur $\Omega_x \times \Omega_y$; c'est le noyau de Green. Comme toute distribution T est indéfiniment différentiable là où ΔT est indéfiniment différentiable, $G(x , y)$ est indéfiniment différentiable pour $x \neq y$; elle est symétrique. L'opérateur G peut être

prolongé par continuité en un opérateur, encore noté G , avec

$$G \in \mathcal{L}(\hat{\mathcal{D}}^1{}'(\Omega) + \mathcal{E}'(\Omega) \; ; \; \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega) + \mathcal{E}'(\Omega)) \; .$$

($\mathcal{E}(\Omega)$ = fonctions indéfiniment différentiables sur Ω à support quelconque, topologie habituelle ; $\mathcal{E}'(\Omega)$ = dual de $\mathcal{E}(\Omega)$ = distributions à support compact sur Ω ; $\hat{\mathcal{D}}^1{}'(\Omega) + \mathcal{E}'(\Omega)$ = dual de $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega) \cap \mathcal{E}(\Omega)$ muni de la topologie borne supérieure, etc.). On a :

$$G(x \, , \, y) = G(\delta_x(y)) \; , \qquad \delta_x(y) = \text{masse 1 au point } y \; ;$$

$$- \Delta_x G(x \, , \, y) = \delta_x(y) \; .$$

On voit donc que <u>tout ouvert</u> Ω <u>de</u> R^n , $n \geqslant 3$, possède une fonction de Green. Si $n = 2$, les ouverts de complémentaire non polaire ont seuls une fonction de Green.

Ceci posé, considérons l'opérateur (évidemment dépendant de Ω)

$$(1) \qquad P = G \circ (- \Delta)$$

sur l'espace $BL(\Omega)$; comme $\Delta \in \mathcal{L}(BL(\Omega) \; ; \; \hat{\mathcal{D}}^1{}'(\Omega))$, on a :

$$P \in \mathcal{L}(BL(\Omega) \; ; \; \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega))$$

et P est un <u>projecteur</u> de $BL(\Omega)$ sur $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$:

Tout élément Φ de $BL(\Omega)$ peut s'écrire :

$$\Phi = P\Phi + (1 - P)\Phi \; .$$

La fonction $P\Phi = u$ est dans $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$; si $(1 - P)\Phi = h$, on a $Ph = 0$, i.e. $G(- \Delta h) = 0$, donc $\Delta h = 0$; <u>Désignons par</u> $\mathcal{H}(\Omega)$ <u>l'espace des</u> $T \in BL(\Omega)$ <u>qui sont harmoniques</u>. On a obtenu :

$$(2) \qquad \Phi = u + h \; , \qquad u \in \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega) \; , \qquad h \in \mathcal{H}(\Omega) \; .$$

Comme $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega) = \{0\}$, la décomposition (2) est unique et donc

THÉORÈME 3.2. - <u>Toute distribution</u> $\Phi \in BL(\Omega)$ <u>admet une décomposition unique de la forme</u> (2). <u>On a</u> $(u \, , \, h)_1 = 0$.

<u>Principe de Dirichlet</u>. - C'est ceci : Parmi les $f \in BL(\Omega)$ telles que $f - \Phi \in \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$, il existe une fonction h unique rendant $\|h\|_1$ minimum. Cette fonction est harmonique. La fonction h vaut $(1 - P)\Phi$.

Il nous reste maintenant à interpréter la condition " $f - \Phi \in \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ " ce que l'on fera par trois méthodes. Les deux premières utilisent des résultats de théorie du potentiel newtonien. La troisième utilise des propriétés de croissance globale des $f \in BL(\Omega)$.

REMARQUE 3.1. - Le problème de Dirichlet (variante de [12], [18]) est par définition le suivant : trouver U dans $BL(\Omega)$, solution de

$$(3) \qquad -\Delta U = T , \qquad T \text{ donné dans } \hat{\mathcal{D}}^{1\prime}(\Omega) ,$$

avec

$$(4) \qquad h - U \in \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega) , \quad h \text{ donné dans } BL(\Omega) \pmod{\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)}$$

(comme toujours, $\complement\Omega$ est non polaire si $n = 2$). Ce problème admet une solution unique.

$$U = (1 - P)h + GT$$

(Plus généralement, on peut chercher U dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ avec (3) et (4) h donné dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $\Delta h \in \hat{\mathcal{D}}^{1\prime}(\Omega)$; il y a encore une solution unique).

REMARQUE 3.2. - On peut évidemment remplacer $(u , v)_1$ par tout autre produit scalaire équivalent, d'où aussitôt la résolution du problème de Dirichlet pour d'autres opérateurs différentiels elliptiques que $-\Delta$.

REMARQUE 3.3. - On a une décomposition voisine, plus élémentaire, et valable même si $\complement\Omega$ est polaire, $n = 2$, en remplaçant $-\Delta$ par $-\Delta + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, cf. SPENCER [20].

4. Méthode de prolongement de Deny.

Une fonction $f \in BL(\Omega)$ est dite BLD (D = DENY) (ou BL précisée) si

a. f est définie quasi-partout dans Ω (i.e. partout sauf sur un ensemble-polaire) ;

b. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe ω ouvert de capacité $< \varepsilon$ tel que la restriction de f à $\Omega - \omega$ soit continue (si $n = 2$, ceci est à vérifier sur tout $\Omega_1 \subset \Omega$, avec diamètre $\Omega_1 \leq 1$).

On rappelle que si K est un compact de R^n , sa capacité est $\sup K = \sup \mu(1)$, μ mesure ≥ 0 de support dans K , avec $(\frac{1}{r^{n-2}} * \mu)(x) \leq 1$, $n \geq 3$.

THÉORÈME 4.1. - Toute $f \in BL(\Omega)$ est presque partout égale à une fonction f^* BLD dans Ω (cf. [8] et [11]).

Par le théorème 3.2 :

$f = u + h$, $u \in \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$, $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. Donc h est dans $\mathcal{E}(\Omega)$. Il suffit donc de montrer le théorème pour $u \in \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$; mais $u = \lim \varphi_k$, $\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$, dans $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ et on peut extraire de φ_k une suite convergeant quasi partout vers f^* du type BLD ; ce point résulte du lemme fondamental que voici :

LEMME 4.1. - Si $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$, on a :

$$\text{cap } E\left\{x \,|\, |\varphi(x)| \geq \alpha\right\} \leq c \frac{\|\varphi\|_1^2}{\alpha^2}, \qquad c = \text{Cte}.$$

Comme $u^* = u$ presque partout, on en déduit le théorème.

REMARQUE 4.1. - On peut montrer [9] et [11] que l'intégrale

$$\int \overrightarrow{\text{grad}}\, G(x, y) . \overrightarrow{\text{grad}}\, u(y)\, dy$$

converge quasi partout dans Ω, définit une fonction $u^{**} \in \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ presque partout égale à u (formellement : $u = G(-\Delta u)$,

$$u(x) = \int_\Omega G(x, y)(-\Delta u(y))\, dy = \int_\Omega \overrightarrow{\text{grad}}\, G(x, y) . \overrightarrow{\text{grad}}\, u(y)\, dy).$$

Topologie fine sur R^n (CARTAN [6]). - C'est la topologie la moins fine qui rende continues les fonctions sous harmoniques.

Un ensemble e est effilé en x_0 ($x_0 \in e$ ou non) s'il existe un voisinage fin V de x_0 tel que $V \cap e = \{x_0\}$ ou ϕ.

Un ensemble effilé en x_0 est très rare au point de vue métrique au voisinage de x_0 (cf. DENY, [10]). Une fonction F définie quasi partout au voisinage de x_0 admet en x_0 la pseudo limite $\ell < \infty$ s'il existe e effilé en x_0 tel que $\lim F(x) = \ell$, $x \to x_0$, $x \notin e$ (la fonction F est alors finement continue en x_0).

On peut alors montrer ceci :

THÉORÈME 4.2. - Soit $F \in BLD(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$ (de complémentaire non polaire si $n = 2$). Pour que F soit dans $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$, il faut et il suffit qu'elle admette la pseudo-limite 0 quasi partout à la frontière (et à l'infini si $n \geq 3$).

CONSÉQUENCE. - " $f - \Phi \in \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ " équivaut à : " $f^* - \Phi^*$ quasi partout pseudo-nulle à la frontière, f^* BLD presque partout égale à f, Φ^* idem ".

5. Méthode des radiales de BRELOT.

Soit toujours Ω, de complémentaire non polaire si $n = 2$. Soit $x_0 \in \Omega$ fixé, $G(x, x_0)$ la fonction de Green de pôle x_0. On appelle ([5], [2]) lignes de Green les intégrales de $d\vec{x} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\, G = 0$ $(G = G(x, x_0))$. On montre qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que : par tout $y \in V$ passe une ligne de Green unique ; dans le sens des G croissants, cette ligne admet x_0 pour point limite, et une demi-tangente en x_0 ; réciproquement si ξ est un vecteur unitaire en x_0, il existe une ligne de Green unique admettant ξ comme demi-tangente en x_0. Donc : si $\mathcal{L}$ = ensemble des lignes de Green, il y a correspondance biunivoque entre $\xi \in S_{n-1}$ $(|\xi| = 1$ dans $\mathbb{R}^n)$ et $\ell(\xi)$ = ligne de Green de demi-tangente ξ en x_0. On munit $\mathcal{L}$ de la topologie telle que $\xi \to \ell(\xi)$ soit un homéomorphisme de S_{n-1} sur $\mathcal{L}$; on désigne par dg la mesure image de la mesure superficielle sur S_{n-1}, dg est la mesure de Green sur l'espace de Green $\mathcal{L}$. Désignons par Σ_λ la surface $G(x, x_0) = \lambda$; soit $\mathcal{L}_\lambda \subset \mathcal{L}$ l'ensemble des $\ell \in \mathcal{L}$ tels que ℓ rencontre Σ_λ ; on montre que $\mathcal{L}_\lambda$ est ouvert dans $\mathcal{L}$, de complémentaire de dg, mesure nulle.

Soit $u \in \mathcal{E}(\Omega) \cap BL(\Omega)$; on définit $R_\lambda(u)$, dg-presque partout sur $\mathcal{L}$, par $R_\lambda(u)(\ell) = u(\ell \cap \Sigma_\lambda)$, $\ell \in \mathcal{L}_\lambda$. La fonction $R_\lambda(u)$ est dans $L^1(\mathcal{L}; dg) = L^1(\mathcal{L})$. Si $\lambda' > \lambda$, $R_{\lambda'}(u) \in L^1(\mathcal{L})$ et l'on a :

$$(1) \qquad \|R_\lambda(u) - R_{\lambda'}(u)\|_{L^1(\mathcal{L})} \leq c_1 \, \|u\|_1 \, \|G\|_{1,\lambda'}$$

où

$$\|f\|^2_{1,\lambda'} = \int_{G(x,x_0)<\lambda'} |\overrightarrow{\text{grad}}\, f|^2 \, dx$$

(La majoration (1) est le point fondamental ; on considère l'ensemble $E \subset \mathcal{L}$ des ℓ avec $R_\lambda(u) - R_{\lambda'}(u) > 0$. Si e_λ = ensemble des points de Σ_λ qui sont sur les lignes de Green qui appartiennent à E (définition analogue pour $e_{\lambda'}$), on a :

$$\int_E (R_\lambda(u) - R_{\lambda'}(u)\, dg = \int_{e_\lambda} u \frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma - \int_{e_{\lambda'}} u \frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma \quad ;$$

on transforme ensuite les intégrales superficielles en intégrales de volume). Il résulte de (1) que lorsque $\lambda \to 0$, $R_\lambda(u) \to R(u)$ dans $L^1(\mathcal{L})$.

DÉFINITION 5.1. - La fonction $R(u)$ est la radiale de $u \in \mathcal{E}(\Omega) \cap BL(\Omega)$. Si $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $R(u) = 0$. On ne change donc pas $E(u)$, $u \in \mathcal{E}(\Omega) \cap BL(\Omega)$, en remplaçant u par 0 au voisinage de x_0 ; de cette remarque et de (1) résulte :

$$(2) \quad \begin{cases} \|R(u)\|_{L^1(\mathcal{L})} \leq c_2 \|u\|_1 + c_3 \|u\|_{L^2(K)} , & u \in \mathcal{E}(\Omega) \cap BL(\Omega) , \\ c_2 , c_3 = \text{constantes}, \quad K = \text{compact fixe} \subset \Omega . \end{cases}$$

Mais de façon générale, si S , $T \in BL(\Omega)$, posons

$$(3) \qquad ((S , T)) = (S , T)_1 + (S , T)_{L^2(K)} .$$

Pour cette structure, $BL(\Omega)$ est un espace de Hilbert et l'espace $\mathcal{E}(\Omega) \cap BL(\Omega)$ est dense. Donc

THÉORÈME 5.1. - L'application $u \to R(u)$ de $\mathcal{E}(\Omega) \cap BL(\Omega) \to L^1(\mathcal{L})$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée $u \to R(u)$, de $BL(\Omega)$ muni de la structure (3) dans $L^1(\mathcal{L})$.

La fonction $R(u)$ s'appelle la radiale de u . On montre

THÉORÈME 5.2. - Le noyau de R est $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$.

CONSÉQUENCE. - " $f - \Phi \in \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ " $\Leftrightarrow$ " $R(f) = R(\Phi)$ "

REMARQUE 5.1. - On a : $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(\Omega) ; L^1(\mathcal{L}))$, $\mathcal{H}(\Omega)$ muni de (3), donc espace de Hilbert. L'application R est biunivoque, elle ne peut donc être sur. Il serait intéressant de caractériser $R(\mathcal{H}(\Omega)) = R(BL(\Omega))$.

6. Prolongement en moyenne.

La troisième méthode de prolongement utilise des résultats sur la croisssance globale des fonctions $BL(\Omega)$. On ne considère ici que l'aspect le plus simple de cette question (on laisse tomber les ouverts de SOBOLEV, cf. [11]).

Les distributions $T \in BL(\Omega)$ sont, rappelons-le, localement L^2 , quel que soit n . Supposons pour simplifier Ω borné.

DÉFINITION 6.1. - L'ouvert Ω connexe borné est dit <u>ouvert de Nikodym</u> si toute distribution $T \in BL(\Omega)$ est dans $L^2(\Omega)$. On montre que tout ouvert limite par un nombre fini de surfaces à courbure bornée est un ouvert de Nikodym.

Si Ω est un ouvert de Nikodym, tout $T \in BL(\Omega)$ est dans $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$; le prolongement sur Ω^* des $T \in BL(\Omega)$ revient donc à celui des fonctions de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$. Pour le prolongement des $f \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, on a :

THÉORÈME 6.1. - <u>Soit Ω ouvert borné de frontière Ω^* variété une fois continûment différentiable de dimension $n-1$. Il existe une application linéaire continue et une seule, $f \to \omega^*(f)$, de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega^*)$</u> (espace des fonctions de carré sommable sur Ω^* pour la mesure superficielle), <u>telle que $\omega^*(f)$ coïncide</u> (presque partout) <u>avec la restriction de f à Ω^* si f est continue dans $\overline{\Omega}$</u>.

On se ramène, par carte locale, à la propriété analogue pour une face d'un cube ; cela résulte alors de majorations élémentaires.

On montre en outre que, sous les conditions du théorème 6.1, si $f \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ avec $\omega^*(f) = 0$, alors $f \in \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega) = \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ (Ω borné).

REMARQUE 6.1. - L'application ω^* n'applique pas $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ sur $L^2(\Omega^*)$. On ne connait pas, semble-t-il, de caractérisation convenable de l'image de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ (cf. toutefois NIKOL'SKIJ [15] et [16], LIONS [13]).

A l'aide du théorème 6.1, on définit, dans Ω non borné, de frontière une fois continûment différentiable de dimension $n-1$, le prolongement $\omega^*(T)$ ($T \in BL(\Omega)$), $\omega^*(T)$ étant localement de carré sommable sur Ω^*. La condition " $\Phi - f \in \hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ " s'interprète : " $\omega^*(\Phi) = \omega^*(f)$ ".

Donnons pour terminer deux remarques liées à la notion d'ouvert de Nikodym (cf. pour détails DENY-LIONS [11]).

a. <u>Ouvert de Nikodym et inégalité de Poincaré</u>. - Soit Ω un ouvert connexe borné. Pour $f \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, posons

$$|||f|||^2 = ||f||^2_{L^2} + ||f||^2_1 \quad ;$$

comme Ω est borné, $C \subset \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$; posons

$$\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)^o = \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)/C$$

et munissons $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)^o$ de la norme quotient :

$$\begin{cases} |||f^o|||^2 = \inf\limits_{c \in C} |||f + c|||^2 = ||f||_1^2 + \int_\Omega |f|^2\, dx - \frac{1}{m(\Omega)} \left| \int_\Omega f\, dx \right|^2 \\ f^o \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)^o\ ,\quad f \in f^o\ ,\quad m(\Omega) = \text{mesure de } \Omega\ . \end{cases}$$

Considérons l'application identique

(1) $$f^o \to f^o$$

de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)^o \to BL^o(\Omega)$; elle est évidemment biunivoque et continue. Alors " Ω ouvert de Nikodym" $\Leftrightarrow$ " application (1) sur

$$\text{"}\Leftrightarrow\text{"}\quad ||f^o||_1^2 \geqslant c_1 |||f^o|||^2\ ,\quad f \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)\ \text{"}\ ,\quad \text{i.e.}$$

(2) $$\int_\Omega |f|^2\, dx - \frac{1}{m(\Omega)} \left| \int_\Omega f\, dx \right|^2 \leq P(\Omega)\, ||f||_1^2\ .$$

Donc

THÉORÈME 6.2. - <u>La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ouvert connexe borné soit un ouvert de Nikodym est qu'il existe une constante</u> $P(\Omega)$ <u>telle que</u> (2) <u>ait lieu pour tout</u> $f \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$.

L'inégalité (2) est <u>l'inégalité de Poincaré</u>.

b. <u>Ouvert de Nikodym et problème de Neumann.</u> - Soit encore Ω ouvert connexe borné ; par N l'espace des $u \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ tels que $\Delta u \in L^2$ et que

(3) $$(-\Delta u\ ,\ \gamma)_{L^2} = (u\ ,\ \gamma)_1 \quad \text{pour tout} \quad \gamma \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)\ ;$$

évidemment $\mathcal{D}(\Omega) \subset N$; l'espace N est un espace de Hilbert pour la norme dont le carré est $|||u|||_1^2 + ||\Delta u||^2_{L^2(\Omega)}$. Ce sera par définition l'espace des u de dérivée normale nulle sur Ω^* . Pour tout $u \in N$, on a

(4) $$\int_\Omega \Delta u\, dx = 0 \qquad (\text{faire } \gamma = 1 \text{ dans } (3)).$$

Désignons par $L^2_0(\Omega)$ le sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega)$ formé des f telles que

$$\int_\Omega f\,dx = 0 \,. \tag{5}$$

On montre :

THÉORÈME 6.3. - La condition nécessaire et suffisante pour que Δ applique N sur $L^2_0(\Omega)$ est que Ω soit un ouvert de Nikodym.

L'espace N est introduit en vue de la résolution du problème de Neumann (cf. dans cette direction [14]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARONSZAJN (N.) and SMITH (K.T.). - Functional spaces and functional completion. - Lawrence, University of Kansas, 1954 (Technical Report 10).

[2] BRELOT (Marcel). - Etude et extensions du principe de Dirichlet, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 5, 1953-54, p. 371-419.

[3] BRELOT (Marcel). - Contributions to potential theory. - Lawrence, University of Kansas, 1955 (Technical Note 2).

[4] BRELOT (Marcel). - Sur l'allure des fonctions harmoniques et sous-harmoniques à la frontière, Math. Nachr., t. 4, 1951, p. 298-307.

[5] BRELOT (M.) et CHOQUET (G.). - Espaces et lignes de Green, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 3, 1951, p. 199-263.

[6] CARTAN (Henri). - Théorie du potentiel newtonien : énergie, capacité, suites de potentiels, Bull. Soc. math. France, t. 73, 1945, p. 74-106.

[7] COURANT (R.). - Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces. - New York, Interscience, 1950 (Pure and applied Mathematics, vol. 3).

[8] DENY (Jacques). - Les potentiels d'énergie finie, Acta Math., t. 82, 1950, p. 107-183.

[9] DENY (Jacques). - Sur la convergence de certaines intégrales de la théorie du potentiel, Ark. der Math., t. 5, 1954, p. 367-370.

[10] DENY (Jacques). - Un théorème sur les ensembles effilés, Ann. Grenoble, t. 23, 1947-1948, p. 139-142.

[11] DENY (J.) et LIONS (J.-L.). - Les espaces de Beppo Levi, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 5, 1953-54, p. 304-370.

[12] GÅRDING (Lars). - Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, Math. scand., t. 1, 1953, p. 55-72.

[13] LIONS (Jacques-Louis). - Sur les problèmes de dérivée oblique, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 236, 1953, p. 2470-2472.

[14] LIONS (Jacques-Louis). - Sur certains problèmes aux limites, Bull. Soc. math. France, t. 83, 1955, p. 225-250.

[15] NIKOL'SKIJ (C.M.). - Svojstva nekotorykh klassov funkcij mnogikh peremennykh na differenciruemykh mnogoobrazijakh, Referativnyj Žurnal Matematika, 1954, n° 8, p. 23.

[16] NIKOL'SKIJ (C.M.). - Svojstva nekotorykh klassov funkcij mnogikh peremennykh na differenciruemykh mnogoobrazijakh i priloženie ikh k variacionnykh žadačam, Referativnyj Žurnal Matematika, 1954, n° 8, p. 45.

[17] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, T. 1 et 2. - Hermann, Paris, 1950-1951 (Act. scient. et ind. 1091-1122, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 9-10).

[18] SCHWARTZ (Laurent). - Les travaux de Gårding sur les équations aux dérivées partielles elliptiques, Séminaire Bourbaki, t. 4, 1951/52.

[19] SOBOLEV (S.). - Ob olnoj teoreme punkcionel'nogo analiza, Recueil mathématique, nouvelle série (Mat. Sbornik), t. 4 (46), 1938, p. 471-497.

[20] SPENCER (D.C.). - Dirichlet's principle on manifolds, Studies in mathematics and mechanics, presented to Richard von Mises. - New York, Academic Press, 1954 ; p. 127-134.

ADDITIF

Complément au n° 2 :

Munissons $\mathcal{D}(\Omega)$ de la norme $\|\varphi\| = (\sum_{p=m} \int_\Omega |D^p\varphi|^2 \, dx)^{1/2}$, et soit $\hat{\mathcal{D}}^m(\Omega)$ le complété de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour cette norme. On a donné dans :

HÖRMANDER (L.) et LIONS (J.-L.). - Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet, Math. scand., t. 4, 1956, p. 259-270.

la condition nécessaire et suffisante pour que $\hat{\mathcal{D}}^m(\Omega)$ soit un sous-espace de l'espace des distributions sur Ω.

Complément au n° 4 : Voir :

ARONSZAJN (N.) and SMITH (K.T.). - Functional spaces and functional completion, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-56, p. 125-185.

Complément au n° 6 :

L'espace image de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ par l'application $f \to \omega^*(f)$ du théorème 6.1 a été étudié par :

ARONSZAJN (N.). - Boundary values of functions with finite Dirichlet integral, Conference on partial differential equations, - Lawrence, University of Kansas, 1954.

Signalons dans cet ordre d 'idées l'intéressant travail de

GAGLIARDO (E.). - Caratterizzazioni delletracce sulla frontiera relative ad alcuni classi di funzioni in n variabili, Rend. Sem. Padova, t. 27, 1957, p. 284-305.

[Février 1958]