PIERRE CARTIER

Développements de fonctions arbitraires suivant les fonctions propres d'un opérateur différentiel

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 102, p. 13-22

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__13_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1954)

DÉVELOPPEMENTS DE FONCTIONS ARBITRAIRES SUIVANT LES FONCTIONS PROPRES D'UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL

par Pierre CARTIER

1. Sommes mesurables d'espaces de Hilbert.

Nous renvoyons à BOURBAKI pour la théorie de la mesure employée ici. Nous allons rappeler, en les modifiant un peu, les définitions de von NEUMANN sur les sommes mesurables d'espaces de Hilbert. Une telle somme se compose tout d'abord d'un espace mesuré (E , μ) , d'une famille d'espaces de Hilbert $H(\zeta)$ paramétrée par les éléments de l'espace E et d'une famille Λ de "champs de vecteurs sur E" (i.e. de fonctions f dont la valeur $f(\zeta)$ en ζ est dans $H(\zeta)$) . Ces données sont assujetties aux axiomes suivants :

(Λ_1) La famille Λ est un sous-espace vectoriel de l'espace de tous les champs de vecteurs.

(Λ_2) Pour tout $f \in \Lambda$, la fonction scalaire $\|\vec{f}(\zeta)\|$ est de carré sommable.

(Λ_3) Pour tout $f \in \Lambda$ et toute fonction scalaire g mesurable et bornée, le champ de vecteurs $\zeta \to g(\zeta)\vec{f}(\zeta)$ est dans Λ .

(Λ_4) Si $\vec{f}(\zeta) = \vec{f'}(\zeta)$ presque partout et si $f \in \Lambda$, alors $f' \in \Lambda$.

(Λ_5) Muni de la semi-norme $\|f\|_2 = \left[\int \|f(\zeta)\|^2 d\mu(\zeta)\right]^{1/2}$, l'espace Λ est complet.

Si les deux premiers axiomes seulement sont vérifiés, Λ s'appelle une famille fondamentale ; dans ce cas, il existe une manière canonique de prolonger Λ en une famille $\mathcal{L}^2_\Lambda(\mu)$ satisfaisant tous les axiomes précédents, qui est parfaitement analogue à la manière de construire les espaces L^p ordinaires. Si l'on identifie deux champs de vecteurs égaux presque partout et que l'on munisse Λ du produit scalaire $\langle f , g\rangle = \int \langle f(\zeta) , g(\zeta)\rangle \, d\mu(\zeta)$, on obtient un espace de Hilbert noté $L^2_\Lambda(\mu)$. On suppose, à partir de maintenant, toutes les hypothèses de séparabilité nécessaires remplies, à savoir que les $H(\zeta)$ et L^2_Λ sont des espaces de Hilbert séparables et que E est réunion dénombrable d'ensembles mesurables de mesure finie (bien que ces hypothèses ne soient pas absolument indispensables). Un champ de vecteurs $\vec{h}(\zeta)$ sera alors dit mesurable si pour tout $f \in \Lambda$, la fonction scalaire $\|\vec{h}(\zeta) - \vec{f}(\zeta)\|$ est mesurable, ou, ce qui revient au même ici, si $\langle\vec{h}(\zeta) , \vec{f}(\zeta)\rangle$ est mesurable pour tout $f \in \Lambda$.

Nous allons maintenant considérer des opérateurs dans l'espace $H = L^2_\Lambda$ et des algèbres de tels opérateurs. En particulier si pour un opérateur A, il existe une fonction numérique $\Phi(\zeta)$ telle que le domaine de définition de A se compose des $f \in \Lambda$ tels que $\Phi(\zeta).\vec{f}(\zeta)$ soit dans Λ et que $(Af)(\zeta) = \Phi(\zeta).\vec{f}(\zeta)$, on dit que A est diagonal. Les opérateurs diagonaux continus forment un anneau d'opérateurs au sens de von Neumann, i.e. une algèbre autoadjointe identique à son bicommutant (il est clair que cet anneau est commutatif). Un des résultats fondamentaux de von NEUMANN est que si l'on se donne à l'avance un espace de Hilbert séparable et un anneau d'opérateurs commutatif A, on peut construire une somme mesurable et une isométrie T de H sur L^2_Λ qui fait correspondre à A l'algèbre des opérateurs diagonaux.

On peut présenter la démonstration de ce fait comme suit : on part d'une algèbre A que l'on suppose seulement autoadjointe, commutative et uniformément fermée. En tant que $*$-algèbre normée et espace vectoriel ordonné, A est alors isomorphe à l'algèbre $\mathcal{C}_\infty$ de toutes les fonctions continues "nulles à l'infini" sur un espace localement compact Ω, le spectre de A. Pour $g \in \mathcal{C}_\infty$, soit T_g l'opérateur de H qui lui correspond dans cet isomorphisme ; pour a, $b \in H$ on considère la forme linéaire $\mu_{a,b}(g) = \langle T_g a , b \rangle$ sur $\mathcal{C}_\infty$, c'est donc par définition même une mesure de Radon bornée sur Ω. Pour h borélienne et bornée sur Ω, considérons alors la forme bilinéaire $\int h(x)\, d\mu_{a,b}(x)$ sur H. Elle est continue donc de la forme $\langle T_h a , b \rangle$ où T_h est un opérateur borné de H. On a donc prolongé la correspondance $g \rightleftarrows T_g$ de $\mathcal{C}_\infty$ avec A en une correspondance entre l'algèbre $\mathfrak{M}$ des fonctions boréliennes et bornées sur Ω avec une algèbre d'opérateurs que l'on démontre facilement être le bicommutant A'' de A, correspondance qui possède toutes les propriétés algébriques et de continuité souhaitées. En particulier, si h est la fonction caractéristique φ_ω d'un ensemble borélien, $E(\omega) = T_{\varphi_\omega}$ s'appelle un projecteur spectral. De plus, si un opérateur self-adjoint non borné P commute (au sens strict, i.e. avec conservation du domaine de définition) à tous les opérateurs unitaires qui commutent à A, il existe une fonction $p(x)$ borélienne mais non bornée nécessairement sur Ω telle que $P = T_p$ en un sens convenable qui concerne aussi le domaine de définition de P.

H étant séparable, on peut trouver une suite $\{x_n\}$ de vecteurs de H qui jouit de la propriété suivante : H_n désignant le sous-espace fermé engendré par Ax_n, les H_n forment une partition orthogonale de H. Le sous-espace formé des sommes finies $\sum_i a_i x_{n_i}$ $(a_i \in A)$ se notera H_0. On peut alors choisir des scalaires $k_n > 0$ tels que la somme $\sum_n k_n \|x_n\|^2$ soit finie, ce qui implique que la série $\sum k_n \mu_{x_n,x_n}$

converge et représente une mesure μ positive et bornée. Pour que $\mu(\omega) = 0$ pour un ensemble ω, il faut et il suffit que $\mu_{x_n, x_n}(\omega) = 0$ pour tout n, ce qui équivaut à $\langle E(\omega)x_n , x_n\rangle = 0$ ou encore à $E(\omega)x_n = 0$, ou finalement puisqué $E(\omega)$ commute à A, ceci équivaut à $E(\omega) = 0$. Si μ n'est pas uniquement déterminée, ses ensembles de mesure nulle par contre le sont donc ; $\mu(\omega) = 0$ implique $\mu_{a,b}(\omega) = \langle E(\omega)a , b\rangle = 0$, donc les mesures $\mu_{a,b}$ sont toutes <u>absolument continues</u> par rapport à μ et il existe d'après LEBESGUE-NIKODYM des éléments $\theta_{a,b} \in L^1(\mu)$ qui sont des densités pour $\mu_{a,b}$. On va, <u>ce qui est fondamental pour la suite</u>, choisir <u>simultanément</u> des représentants mesurables pour les $\theta_{a,b}$, pour a et b dans H_o : en effet on choisit ces représentants θ_{mn} lorsque a et b sont pris dans la suite $\{x_n\}$ ce qui est possible puisque cette suite est dénombrable, puis si $a = \sum T_{g_n} x_n$ et $b = \sum T_{h_n} x_n$ (sommes finies) on pose

$$\theta_{a,b}(x) = \sum_{m,n} g_n(x) h_m(x) \ \theta_{mn}(x)$$

ce qui a un sens puisque les décompositions de a et b sont uniques et que les fonctions g_n et h_m sont continues (et sont donc déterminées partout sur Ω et non seulement à un ensemble de mesure nulle près).

Pour x fixe dans Ω, l'expression $\theta_{a,b}(x)$ est une forme hermitienne positive sur H_o, d'où un espace de Hilbert $H(x)$ et une application linéaire $a \to \hat{a}(x)$ de H_o dans $H(x)$ définis à une équivalence près et tels que $\theta_{a,b}(x) = \langle \hat{a}(x) , \hat{b}(x)\rangle$ donc

$$\langle a , b\rangle = \langle T_1 a , b\rangle = \int d\mu_{a,b}(x) = \int \theta_{a,b}(x) \ d\mu(x) = \int \langle \hat{a}(x) , \hat{b}(x)\rangle \ d\mu(x)$$

Autrement dit si l'on prend pour Λ la famille des $\hat{a}$ $(a \in H_o)$ on obtient une <u>famille fondamentale</u> et l'application $a \to \hat{a}$ se prolonge en une isométrie T de H sur $L^2_\Lambda(\mu)$, les opérateurs diagonaux de cette somme mesurable correspondant exactement aux T_g $(g \in \mathfrak{M})$ i.e. aux éléments de l'anneau d'opérateurs engendré par A.

Enfin on peut trivialiser toute somme mesurable au sens suivant : on forme une partition convenable de E (ici $= \Omega$) en une suite d'ensembles compacts $E_k (= \Omega_k)$ et un ensemble N de mesure nulle et l'on peut identifier les $H(x)$ pour $x \in E_k$ à un même espace de Hilbert $\mathcal{H}_k$, une famille fondamentale Λ' donnant la même somme mesurable que Λ étant formée des champs de vecteurs constants dans chaque E_k et nuls dans N.

2. <u>Développements suivants les fonctions propres.</u>

Pour pouvoir dire quelque chose de plus précis sur la diagonalisation d'une famille d'opérateurs, on supposera, ce qui est le cas le plus fréquent dans la pratique, que l'espace de Hilbert H est de la forme $L^2(\nu)$ où (F, ν) est une variété différentiable munie d'une mesure ν. L'espace H est donc pour ainsi dire, représenté comme somme mesurable d'espaces de Hilbert à une dimension et le problème qui se pose est en gros, d'étudier les relations entre deux décompositions en somme mesurable d'un même espace de Hilbert.

On considère n opérateurs self-adjoints D_i (non bornés), définis en tous cas sur l'espace $\mathcal{D}(F)$ des fonctions C^∞ à support compact sur F et qui commutent au sens suivant :

(1) Il existe une algèbre autoadjointe commutative et uniformément fermée A telle que les opérateurs unitaires qui commutent aux D_i soient exactement ceux qui commutent à A.

Dans ces conditions, D_i est de la forme T_{g_i} où g_i est une fonction mesurable non nécessairement bornée sur le spectre Ω de A. L'application $g : x \to (g_i(x))$ permet dans les constructions de la somme mesurable de remplacer Ω par un sous-ensemble de R^n i.e. on peut supposer qu'il existe une isométrie T de H sur une somme mesurable $L^2_\Lambda(\mu)$ par rapport à une mesure μ sur R^n dans laquelle les $T D_i T^*$ sont diagonaux. On suppose aussi que cette somme mesurable est triviale au sens de la fin du paragraphe 1 et l'on appelle H_k le sous-espace des f telles que Tf soit nul en dehors de Ω_k. On pose enfin $\hat{f}(x) = (Tf)(x)$ ($x \in R^n$ et $f \in \mathcal{D}(F)$). Par construction de la somme mesurable on a en tous cas la formule de Plancherel :

$$\int |f(y)|^2 \, d\nu(y) = \int \|\hat{f}(x)\|^2 \, d\mu(x)$$

et le problème qui se pose est de donner une forme assez concrète à la transformation $f \to \hat{f}$. Considérons $\varphi \in \mathcal{E}(R^n)$ $\Psi \in \mathcal{D}(F)$ et $a \in \mathcal{H}_k'$ (dual de $\mathcal{H}_k$) et la forme trilinéaire $B_k(\varphi, \Psi, a) = \int_{\Omega_k} \varphi(x) < \hat{\Psi}(x), a > d\mu(x)$; elle est continue sur $\mathcal{E}(R^n) \times \mathcal{D}(F) \times \mathcal{H}_k'$ car si l'on note $\|\varphi\|_\infty$ la borne supérieure de $|\varphi|$ sur le compact Ω_k on a :

$$\begin{aligned} |B_k(\varphi, \Psi, a)|^2 &\leq \int_{\Omega_k} |\varphi(x)|^2 \, d\mu(x) \int_{\Omega_k} |<\hat{\Psi}(x), a>|^2 \, d\mu(x) \\ &\leq \mu(\Omega_k) \, \|\varphi\|_\infty^2 \, \|a\|^2 \int_{\Omega_k} \|\hat{\Psi}(x)\|^2 \, d\mu(x) \\ &\leq \mu(\Omega_k) \, \|\varphi\|_\infty^2 \, \|a\|^2 \, \|\hat{\Psi}\|_2^2 = \mu(\Omega_k) \, \|\varphi\|_\infty^2 \, \|a\|^2 \, \|\Psi\|_2^2 \end{aligned}$$

d'où $\mu(\Omega_k)^{-1/2} B_k(\varphi , \Psi , a) \leqslant \|\varphi\|_\infty \|\Psi\|_2 \|a\|$. Par suite B_k définit une forme linéaire continue sur le produit tensoriel $\mathcal{E}(R^n) \hat{\otimes} \mathcal{D}(F) \hat{\otimes} \mathcal{H}'_k$ et aussi une application linéaire continue de $\mathcal{D}(F)$ dans $\mathcal{D}'(R^n) \hat{\otimes} \mathcal{H}_k$ qui est composée de T et de la restriction de $T\Psi$ au compact Ω_k , mais aussi une application linéaire continue de $\mathcal{D}(F) \hat{\otimes} \mathcal{E}(R^n)$ dans $\mathcal{H}_k$ i.e ; une distribution vectorielle $\vec{S}_k(x , y)$ définie sur $R^n \times F$ nulle en dehors de $\Omega_k \times F$; mais aussi une application de $\mathcal{E}(R^n) \hat{\otimes} \mathcal{H}'_k$ dans $\mathcal{D}'(F)$ i.e. une application qui a toute fonction différentiable $\vec{\varphi}(x)$ à valeur dans $\mathcal{H}'_k$ définie dans un voisinage de Ω_k fait correspondre une distribution sur F . Interprétons :

$$B_k(\varphi , \Psi , a) = \iint \varphi(x)\Psi(y) \quad \langle \overrightarrow{dS}_k(x , y), a\rangle$$

d'où

$$\hat{\Psi}(x)\ d\mu(x) = \int \overrightarrow{dS}_k(x , y)\Psi(y) \quad \text{sur } \Omega_k ,$$

mais le second membre est nul en dehors de Ω_k et l'on obtient $\hat{\Psi}(x)\ d\mu(x)$ en sommant par rapport à k soit $\hat{\Psi}(x)\ d\mu(x) = \sum_k \int \overrightarrow{dS}_k(x , y)\Psi(y)$. Ceci est la transformation de Fourier directe. Définissons la transformation inverse par $\hat{g}(y) = (T^{*}g)(y)$ pour un champ de vecteur g qui est dans $L^2_\Lambda(\mu)$. Soit $g(x)$ une fonction différentiable à valeur dans $\mathcal{H}'_k$ définie dans un voisinage de Ω_k et g_k sa restriction Ω_k . On pose $d\rho_k(y) = \int \overline{\langle \overrightarrow{dS}_k(x , y) , g_k(x)\rangle}$ d'où en retournant aux définitions :

$$\begin{aligned}\rho_k(\Psi) &= \int \overline{\langle \overrightarrow{dS}_k(x , y) , \vec{g}_k(x)\rangle}\ \Psi(y)\\ &= \int \langle \hat{\Psi}(x) , \vec{g}_k(x)\rangle\ d\mu(x)\\ &= \langle T\Psi , g_k\rangle = \langle \Psi , T^{*}g_k\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{donc} \quad \rho_k &= T^{*}\Psi\, d\nu\\ &= \hat{\Psi}\, d\nu\end{aligned}$$

Enfin puisque T diagonalise les D_i et que $D_i = T_{g_i}$ on a $g_i(x) = x_i$ et $\widehat{(D_i f)}(x) = x_i \hat{f}(x)$ soit

$$\int (D_i f)(y)\ \overrightarrow{dS}_k(x , y) = x_i \int f(y)\ \overrightarrow{dS}_k(x , y)$$

ce que l'on peut écrire symboliquement

$$({}^tD_i)_y\ \vec{S}_k(x , y) = x_i\ \vec{S}_k(x , y)$$

(y est la variable et x le paramètre) autrement dit "<u>pour</u> x <u>fixe les</u> $\vec{S}_k$ <u>sont</u>

des distributions propres des D_i pour les valeurs propres x_i."

THÉORÈME. - Si l'on définit deux transformations $T : f \to \hat{f}$ et $T^* : g \to \hat{g}$ par les formules

$$\hat{f}(x)\, d\mu(x) = \sum_k \int f(y)\, d\vec{S}_k(x, y)$$

$$\hat{g}(y)\, d\nu(y) = \sum_k \int \langle \vec{g}(x), d\vec{S}_k(x, y) \rangle \qquad f \in \mathcal{D}(F)$$

où g est sur chacun des Ω_k la restriction d'une fonction différentiable à valeur dans $\mathcal{H}'_k$ on a les formules de Plancherel :

$$\int |f(y)|^2\, d\nu(y) = \int \|\hat{f}(x)\|^2\, d\mu(x)$$

$$\int \|g(x)\|^2\, d\mu(x) = \int |\hat{g}(y)|^2\, d\nu(y)$$

Les opérateurs T et T^* se prolongent en des isométries de même nom de $L^2(\nu)$ sur $L^2_\Lambda(\mu)$ et de $L^2_\Lambda(\mu)$ sur $L^2(\nu)$ respectivement qui sont inverses l'une de l'autre. De plus les noyaux distributions S_k sur $F \times R^n$ jouissent de la propriété d'être des "distributions propres" :

$$({}^t D_i)_y\, \vec{S}_k(x, y) = x_i\, \vec{S}_k(x, y)$$

Voilà donc ce que l'on peut dire en général en s'appuyant sur le théorème des noyaux de Schwartz (utilisé implicitement sous la forme des produits tensoriels). Le problème fin va maintenant consister en l'étude de la structure des distributions ainsi introduites : sont-elles des mesures et, si oui, ont-elles des densités par rapport à la mesure produit $d\mu(x)\, d\nu(y)$. On va par une méthode un peu différente montrer qu'il en est bien ainsi dans le cas important suivant : il existe dans l'algèbre A un opérateur de Carleman $B = T_g$ où g est une fonction mesurable et bornée sur Ω, qui est μ-presque partout > 0. L'idée d'introduire des opérateurs de Carleman revient essentiellement à MAUTNER.

3. Opérateurs de Carleman.

Nous allons introduire les opérateurs de Carleman par une méthode un peu détournée et inhabituelle mais qui a le mérite de bien montrer la propriété essentielle de ces opérateurs et de nous éviter tout calcul fastidieux.

Soient H un espace de Hilbert séparable de la forme $L^2(\nu)$ sur un espace mesuré (F, ν) et V un espace de Banach séparable et dont le dual est séparable. On considère un opérateur linéaire B qui à tout $v \in V$ fait correspondre une fonction mesurable Bv dont la classe est dans L^2 et qui jouit des deux propriétés de continuité suivantes :

1) $v \to \dot{\widehat{Bv}}$ <u>est une application continue de</u> V <u>dans</u> $L^2(\nu)$

2) <u>pour tout</u> $y \in F$, <u>si</u> v <u>tend vers</u> 0 <u>dans</u> V , $(Bv)(y)$ <u>tend vers</u> 0 .
Un tel opérateur s'appelle un opérateur de Carleman. Pour tout $y \in F$ il existe donc une forme linéaire continue $b_y \in V'$ telle que $(Bv)(y)$ soit égal à $< v , b_y >$ L'application $y \to b_y$ de F dans V' est scalairement mesurable, donc mesurable puisque V est <u>séparable</u>. De plus on peut trouver [1] une fonction sommable s qui est > 0 presque partout telle què $\int s(y) \|b_y\|^2 \, d\nu(y) < +\infty$. Alors la fonction $q : y \to s^{1/2}(y) b_y$ est de carré sommable à valeurs dans V' . On va interpréter ceci dans deux cas :

1) $V = H = L^2(\nu)$, donc le dual V' de V est anti-isomorphe à V . Il est facile de voir qu'il existe une isométrie canonique de $L^2(\nu , L^2(\nu))$ sur $L^2(\nu \otimes \nu)$ d'où une fonction $q(y , y')$ de carré sommable sur $F \times F$ telle que

$$q(y)(y') = q(y , y')$$

Posant $b(y , y') = s^{-1/2}(y) q(y , y')$ on voit facilement que :

$$(Bv)(y) = \int b(y , y') v(y') d\nu(y')$$

La fonction $b(y , y')$ est mesurable en l'ensemble des deux variables et pour presque tout y fixé, elle est de carré sommable en y' . La fonction b est le noyau de Carleman de B et on reconnaît sous cette forme la définition usuelle.

2) $V = L^2_\Lambda(\mu)$ est ici aussi antiisomorphe à V' . Dans ce cas $L^2(\nu , V)$ s'identifie canoniquement à la somme mesurable construite sur $F \times \Omega$ en prenant pour $H(y , x)$ l'espace $H(x)$. La démonstration s'achève comme en 1) et l'on trouve un "noyau de Carleman" $\vec{b}(y , x)$ qui est un champ de vecteurs mesurable tel que :

(A) $\qquad (Bv)(y) = \int < v(x) , \vec{b}(y , x) > d\mu(x)$

(B) Inversement si $\int \|b_y\| \, g(y) \, d\nu(y) < +\infty$, on a

$$(B^* g)(x) = \int \vec{b}(y , x) \, g(y) \, d\nu(y)$$

en appliquant le théorème de Lebesgue-Fubini.

Appliquons ces résultats à la situation suivante : dans $H = L^2(\nu)$ est donnée une algèbre A d'opérateurs remplissant les conditions imposées au paragraphe 1 ; les opérateurs de A sont diagonalisés par une isométrie T de H avec une somme mesurable $L^2_\Lambda(\mu)$. On suppose que dans A existe un <u>opérateur de Carleman</u>

---

[1] On prend $t(x) \in \mathcal{L}^1(\nu)$ qui est > 0 presque partout et

$$s(x) = \inf(1 , \|b_x\|^{-2}) . t(x)$$

$B : H \to H$ tel que l'opérateur TBT^* soit l'opérateur diagonal Φ associé à une fonction $\varphi(x)$ qui est $\neq 0$ presque partout [2]. L'opérateur B est de Carleman donc aussi $C = BT^*$, et C est donné par un noyau $\vec{c}(y , x)$. Mais puisque $\Phi = TBT^*$, $C = T^*\Phi$ et il est alors clair que $T^* = C\Phi^{-1}$ est donné par le noyau $\vec{E}(y , x) = \varphi(x)^{-1} \vec{c}(y , x)$. On raisonne de même pour $T = \Phi^{*-1}C^*$. Donc dans le cas indiqué les formules de transformation de Fourier s'écrivent sous la forme plus sympathique suivante :

$$\hat{v}(x) = \int \vec{E}(y , x) \, v(y) \, d\nu(y) \qquad \hat{v}(y) = \int \langle \vec{g}(x) , \vec{E}(y , x) \rangle \, d\mu(x)$$

On a encore dans ce cas les formules de Plancherel.

4. Opérateurs différentiels elliptiques.

Revenons au cas où F est une variété différentiable de dimension n et supposons que la mesure ν soit définie par une forme différentielle ω de degré n , suffisamment différentiable. Alors $\langle f , g \rangle = \int fg\omega$; soit D un opérateur défini sur un sous-espace $\mathcal{H} \supset \mathcal{D}(F)$ de $H = L^2(\omega)$ à valeurs dans $L^2(\omega)$. Supposons aussi que D ait un adjoint $D^\sim$ défini aussi sur $\mathcal{H}$ et tel que $\langle Df , g \rangle = \langle f , D^\sim g \rangle$ pour $f , g \in \mathcal{H}$, en particulier pour $f \in \mathcal{D}(F)$. Ceci donne successivement :

$$\int Df . \bar{g}\, \omega = \int f \, \overline{D^\sim g} \, . \, \omega \quad \text{d'où} \quad D^\sim g \, . \, \omega = \overline{{}^tD(\bar{g} . \omega)}$$

${}^tD$ est l'adjoint de D au sens des distributions, donc envoie dans $\mathcal{D}'$ le dual $L'^2(\omega)$ de $L^2(\omega)$ (que l'on n'identifie pas à $L^2(\omega)$). Si donc D est un prolongement self-adjoint d'un opérateur différentiel défini sur $\mathcal{D}$ on a $D = D^\sim$, donc D est encore un opérateur différentiel au sens des distributions.

Soit donc un opérateur différentiel D qui dans une carte locale ait l'expression :

$$(Df)(y) = \sum_{|p| \leq m} L_p(y) \, D^p f(y) \qquad y = (y_i) \qquad p = (p_i) \qquad |p| = \sum_i p_i$$

$$D^p = \prod_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{p_i}$$

Si pour ξ dans R^n la forme homogène d'ordre m en ξ définie par

$$L^0(\xi) = \sum_{|p|=m} L_p(x) \, \xi^p$$

est définie positive, on dit que D est elliptique en x . Cette propriété ne dépend pas de la carte locale choisie et l'on dira que D est elliptique s'il l'est en tout point.

On suppose désormais D elliptique réel (i.e. $\overline{Df} = D\bar{f}$ ou encore les $L_p(x)$ sont réels) et symétrique sur $\mathcal{D}(F)$ (i.e. $D = D^\sim$) . D possède alors un prolongement

(2) ce qui signifie que B et B^* sont biunivoques.

selfadjoint que l'on note encore D . Posons $M_q = (D + i . 1)^q$ et $B = M_q^{-1}$ i.e. $BM_q f = B^* M^*_q f = f$ pour les f tels que $D^r f$ soit défini pour $r \leqslant q$. Mais $M = M_q$ est elliptique, donc possède une paramétrix $C(y , y')$. Rappelons qu'on appelle ainsi une fonction définie pour $y \neq y'$, m fois différentiable, nulle en dehors d'un voisinage symétrique V de la diagonale tel que pour tout compact $K \subset F$ l'ensemble des $y' \in F$ avec $(y , y') \in V$ pour tout $y \in K$ soit un compact. $C(y , y')\omega(y')$ étant pour y fixé une distribution C_y sur F , on suppose de plus que

(1) $M_y . C_y = \delta_y + T_y \qquad T_y(y') = T(y , y')\omega(y')$

où T est une fonction m fois différentiable nulle dans un voisinage de la diagonale, et δ_y la masse unité en y .

On définit pour $f \in \mathcal{D}$, Cf et Tf par $(Cf)(y) = C_y(f)$ et $(Tf)(y) = T_y(f)$, donc $Cf \in \mathcal{D}^m$ et $Tf \in \mathcal{D}^m$. La formule (1) signifie que :

(2) $MCf = f + Tf$ d'où ${}^tC\,{}^tMg = g + {}^tTg \quad g \in \mathcal{D}^m$

(C envoie $\mathcal{D} \to \mathcal{D}^m$ donc ${}^tC$ envoie $\mathcal{D}'^m \to \mathcal{D}'$) . De plus si $f \in L^2(\omega)$, Bf est dans le domaine de définition $\mathcal{H}$ de M et $MBf = f$ et l'on a vu que M doit être pris au sens des distributions ; ${}^tB$ envoie $L'^2(\omega)$ dans $\mathcal{D}'$ et ${}^tM\,{}^tB f' = f'$ si $f' \in L'^2(\omega)$. On conclut :

(3) ${}^tCf' = {}^tC\,{}^tM\,{}^tBf' = {}^tBf' + {}^tT\,{}^tBf'$

${}^tBf'$ est dans $L'^2(\omega) \subset \mathcal{D}'^0$ donc ${}^tT\,{}^tBf' \in \mathcal{E}^0 . \omega$; comme pour q assez grand $C(y , y')$ est de carré sommable en y pour y' fixé, ${}^tCf'$ est aussi dans $\mathcal{E}^0 . \omega$, donc en vertu de (3) il en est de même de ${}^tBf' = (\overline{B^* f}) . \omega$ si $f' = \overline{f . \omega}$. En résumé B^* i.e. l'inverse de $M^* = (D - i . I)^q$ envoie $L^2(\omega)$ dans $L^2(\omega) \cap \mathcal{E}^0$ et une application convenable du théorème du graphe fermé montre que cette application est continue lorsque l'on munit $L^2(\omega) \cap \mathcal{E}^0$ de la borne supérieure des topologies induites par $L^2(\omega)$ et $\mathcal{E}^0$. Ceci implique <u>que</u> B^* <u>est de Carleman</u> ; si l'on diagonalise D et qu'on plonge son spectre dans R , B^* est un opérateur diagonal correspondant à la fonction $(\lambda - i)^{-q}$ partout $\neq 0$. On peut appliquer les résultats des paragraphes 2 et 3 et l'on obtient ainsi les formules d'inversion de Fourier :

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_k \int \vec{E}_k(y , \lambda) f(y)\, d\nu(y) \qquad f(y) = \sum_k \int \langle \hat{f}(\lambda) , \vec{E}_k(y , \lambda) \rangle\, d\mu(\lambda)$$

ainsi que le théorème de Plancherel :

$$\int |f(y)|^2\, d\nu(y) = \int \|\hat{f}(\lambda)\|^2\, d\mu(\lambda)$$

Enfin par application du théorème de Schwartz sur les équations elliptiques, on montre facilement qu'en changeant au besoin $E_k(y, \lambda)$ pour un ensemble de scalaires λ de mesure nulle, on peut supposer que pour λ fixé, et un champ de vecteurs $\vec{f}$ de carré sommable, la fonction $\langle \vec{E}(y, \lambda), \vec{f}(\lambda) \rangle$ en y est différentiable et que c'est une fonction propre de D pour la valeur propre λ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BROWDER (F.E.). - The eigenfunction expansion theorem for the general singular self-adjoint elliptic system of differential operators, Bull. Amer. math. Soc., t. 60, 1954, p. 64.

[2] GÅRDING (Lars). - Eigenfunction expansions connected with elliptic differential operators, Compte-rendu du 12e Congrès des Mathématiciens scandinaves tenu à Lund en 1953. - Lund, Håkan Ohlssons Boktryckeri, 1954, p. 44-55.

[3] JOHN (Fritz). - General properties of solutions of linear elliptic partial differential equations, Proceedings of the Symposium on spectral theory and differential problems. - Stillwater, Oklahoma agricultural and mechanical College, 1951, p. 119-175.

[4] MAUTNER (F.I.). - On eigenfunction expansions, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 39, 1953, p. 49-53.

[5] von NEUMANN (John). - On rings of operators, Reduction theory, Ann. of Math., t. 50, 1949, p. 401-485.

et naturellement pour les préliminaires, voir les deux "Bibles" :

BOURBAKI (Nicolas). - Les structures fondamentales de l'analyse, Livre 6 : Intégration, chapîtres 1 à 4. - Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind. n° 1175 ; Eléments de Mathématique, 13).

SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, I [2e éd.] et II. - Paris, Hermann, 1957 et 1951 (Act. scient. et ind. n° 1091 = 1245 et 1122).

à compléter par la thèse de GROTHENDIECK :

GROTHENDIECK (Alexandre). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Memoirs of the American mathematical Society n° 16) (Thèse Sc. math. Paris. 1953).

[Juillet 1957]