SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JACQUES TITS

Groupes semi-simples complexes et géométrie projective

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 112, p. 115-125

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__115_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Février 1955)

GROUPES SEMI-SIMPLES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

par Jacques TITS

1. Introduction (1).

L'objet de cet exposé est l'étude géométrique d'une classe d'espaces homogènes de groupes analytiques complexes semi-simples et, en particulier (n° 4), l'extension à ces espaces de concepts fondamentaux de la géométrie projective. Un cas particulier important est celui des groupes exceptionnels dont les résultats obtenus permettent de donner, par un procédé systématique, des interprétations géométriques. (cf. notamment [10], [11], [12]).

Les espaces considérés, qu'on appellera R-espaces, sont les espaces $V = G/U$ où G est un groupe analytique complexe semi-simple connexe et U un sous-groupe connexe contenant un sous-groupe résoluble maximal de G ; on peut d'ailleurs supposer sans nuire à la généralité (cf. n° 2, lemme 2) que le centre de G est trivial, c'est-à-dire, que G est isomorphe à son groupe adjoint. Dans les questions étudiées, c'est non seulement V, considéré comme variété, qui importe, mais encore le groupe G opérant sur V ; il convient donc d'établir une distinction entre le R-espace $V = G/U$ et la variété (analytique complexe) sous-jacente. Il arrive qu'une même variété analytique complexe puisse être munie de deux structures de R-espaces non isomorphes (au point de vue, par exemple, des L-sous-variétés : cf. n° 4) ; c'est le cas des espaces projectifs de dimension impaire, et des deux composantes irréductibles (isomorphes entre elles) de la variété des sous-variétés linéaires de dimension (projective) r d'une hyperquadrique de dimension $2r$.

Les variétés analytiques complexes sous-jacentes des R-espaces, qui sont des variétés algébriques rationnelles (GOTO [4]), ont fait l'objet de nombreux travaux (cf. la bibliographie, qui n'est d'ailleurs pas exhaustive). Elles peuvent être caractérisées (WANG [14]) comme étant les seules variétés complexes homogènes simplement connexes dont la caractéristique d'Euler n'est pas nulle, ou encore (LICHNEROWICZ [6], BOREL [1]) comme les seules variétés complexes compactes simplement connexes possédant une structure kählérienne homogène. Enfin, on les obtient aussi en considérant les espaces homogènes $\hat{G}/C(T)$, quotients d'un groupe compact connexe $\hat{G}$ par le centralisateur d'un tore $T \subset G$; un tel espace possède une unique structure complexe invariante pour $\hat{G}$.

(1) Remaniée en mars 1958.

La plupart des résultats exposés, et notamment le n° 4 tout entier, se généralisant à un corps de base K quelconque ; les groupes envisagés sont alors les groupes définis par C. CHEVALLEY dans [3] ("analogues sur K " des groupes adjoints des algèbres simples complexes) et les produits directs de tels groupes (cf. [13]).

2. Lemmes préliminaires. Les R-espaces.

Sauf mention explicite du contraire, les groupes envisagés seront des groupes analytiques complexes et les algèbres seront des algèbres de Lie complexes.

Soient G un groupe connexe semi-simple, $\mathfrak{G}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{C}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{G}$, et $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ un système de racines simples de $\mathfrak{G}$ (relativement à $\mathfrak{C}$) (cf. [8]) ; la forme bilinéaire de Killing de $\mathfrak{G}$ sera notée (x, y). S' étant une partie quelconque de S, on désignera par $\mathfrak{G}(S')$ la sous-algèbre de $\mathfrak{G}$ engendrée linéairement par $\mathfrak{C}$, par les vecteurs propres e_a correspondant aux racines a positives (c'est-à-dire combinaisons linéaires à coefficients non négatifs des a_i) et les e_{-a} correspondant aux racines négatives $-a$ qui sont combinaisons linéaires de racines simples a_i n'appartenant pas à S' ; c'est la plus petite sous-algèbre de $\mathfrak{G}$ contenant les e_{a_i} $(a_i \in S)$, les e_{-a_j} $(a_j \in S - S')$ et $\mathfrak{C}$.

LEMME 1. - _Les_ $\mathfrak{G}(S')$, $S' \subseteq S$, _sont les seules sous-algèbres de_ $\mathfrak{G}$ _contenant_ $\mathfrak{G}(S)$ (KARPELEVITCH [5])

DÉMONSTRATION. - Soient $\mathfrak{H}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$ contenant $\mathfrak{G}(S)$ et $h = c + h^+ + h^-$ un élément quelconque de $\mathfrak{H}$ où $c \in \mathfrak{C}$, et où h^+ (resp. h^-) est une combinaison linéaire de vecteurs propres correspondant à des racines positives (resp. négatives). On a $c + h^+ \in \mathfrak{G}(S)$, donc $h^- \in \mathfrak{H}$. Pour démontrer le lemme, il suffit de prouver que si e_{-b} est un vecteur propre quelconque intervenant effectivement (c'est-à-dire avec un coefficient non nul) dans la décomposition de h^- et si a est une racine simple quelconque intervenant effectivement dans la décomposition de b en somme de racines simples, alors $e_{-a} \in \mathfrak{H}$.

Soient b_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ les racines positives de $\mathfrak{G}$, avec $b = b_s$, c_i un élément de $\mathfrak{C}$ tel que $(b_i, c_i) = 0 \neq (b, c_i)$, et $\{d_j\}$, $\{d'_j\}$ $(j = 1, \ldots, t)$ deux suites de racines positives telles que $b = d_1 + d'_1$, $d_i = d_{i+1} + d'_{i+1}$ et $d_t = a$ (l'existence de ces suites résulte de la définition des racines simples. Posons alors $h_1 = h^-$ et $h_i = [h_{i-1}, c_{i-1}]$ $(i = 2, \ldots, s)$; on voit de proche en proche que h_i est une combinaison linéaire de $e_{-b_i}, e_{-b_{i+1}}, \ldots, e_{-b_s}$ dans laquelle le coefficient de e_{-b_s}

n'est pas nul ; en particulier, h_s est un multiple de e_{-b_s}. Posons ensuite $f_1 = [h_s, e_{d'_1}]$ et $f_j = [f_{j-1}, e_{d'_j}]$ $(j = 2, \ldots, t)$; f_j est un multiple non nul de e_{-d_j} ; en particulier, f_t est un multiple non nul de e_{-a}. Comme d'autre part les c_i et les $e_{d'_j}$ appartiennent à $\mathfrak{G}(S)$, don à $\mathfrak{H}$, e_{-a} appartient aussi à $\mathfrak{H}$,

C. Q. F. D.

Soient $\langle S' \rangle$ (resp. $\langle S - S' \rangle$) la sous-variété linéaire de $\mathfrak{C}$ engendrée par les racines simples a_i appartenant (resp. n'appartenant pas) à S', et $\langle S - S' \rangle^*$ la sous-variété linéaire de $\mathfrak{C}$ orthogonale (par rapport à la forme bilinéaire de Killing à $\langle S - S' \rangle$. Le radical $\mathfrak{G}^r(S')$ de $\mathfrak{G}(S')$ est engendré linéairement par $\langle S - S' \rangle^*$ et par les e_a correspondant aux racines positives $a \in \langle S' \rangle$. De plus, si on désigne par $\mathfrak{G}^s(S')$ l'algèbre semi-simple engendrée linéairement par $\langle S - S' \rangle$ et par les e_a correspondant à toutes les racines $a \in \langle S - S' \rangle$, on a la <u>décomposition de Lévy</u> :

$$\mathfrak{G}(S') = \mathfrak{G}^r(S') + \mathfrak{G}^s(S') .$$

On appellera $G(S')$, $G^r(S')$ et $G^s(S')$ les sous-groupes connexes de G engendrés respectivement par $\mathfrak{G}(S')$, $\mathfrak{G}^r(S')$ et $\mathfrak{G}^s(S')$, qui sont manifestement des sous-groupes fermés de G, et $G[S']$ l'espace homogène $G/G(S')$. On sait (cf. [9]) que $G(S')$ est le normalisateur de $\mathfrak{G}(S')$ dans G ; cette même proposition peut encore être énoncée sous d'autres formes, dont nous retiendrons les suivantes :

LEMME 2. – <u>L'espace homogène</u> $G[S']$ <u>ne dépend</u> <u>(à un isomorphisme canonique près)</u> <u>que de</u> $\mathfrak{G}$ <u>et de</u> S' <u>(et non de</u> G).

Cela nous permettra d'écrire dans certains cas $\mathfrak{G}[S']$ au lieu de $G[S']$.

LEMME 2'. – <u>Soient</u> p <u>et</u> p' <u>deux points distincts quelconques de l'espace</u> $G[S']$. <u>L'ensemble des transformés</u> pg <u>de</u> p <u>par les éléments</u> g <u>de</u> G <u>qui laissent invariant</u> p' $(p'g = p')$ <u>est une variété</u> (connexe) <u>de dimension non nulle</u>.

Nous appellerons <u>R-espace</u> tout espace homogène de la forme $G[S']$.

EXEMPLES. – Soit $\mathfrak{G} = A_n$. On supposera les a_i numérotés comme suit dans le schéma de Dynkin de $\mathfrak{G}$.

$$\overset{a_1}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{a_2}{\bullet}\cdots\cdots\overset{a_{n-1}}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{a_n}{\bullet} .$$

Alors, $A_n[a_1]$ est un espace projectif complexe P_n à n dimensions, $A_n[a_i]$ est (canoniquement isomorphe à) la grassmannienne des $(i-1)$-plans de P_n et, plus généralement, $A_n[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_s}]$ avec $i_1 < i_2 < \dots < i_s$ est l'espace des systèmes $\{L_1, L_2, \dots, L_s\}$, où L_m est une sous-variété linéaire de dimension $i_m - 1$ de P_n, et $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_s$.

3. Plongements.

Considérons une représentation projective de G, c'est-à-dire un homomorphisme (analytique) $f : G \longrightarrow A(P)$ de G dans le groupe $A(P)$ des projectivités d'un espace projectif complexe donné P. Nous supposerons f irréductible ; elle est alors déterminée (à une équivalence près) par son poids dominant b, ou ce qui revient au même, par les nombres $b(a_i) = 2(b, a_i)/(a_i, a_i)$ qui sont des entiers non négatifs. Réciproquement, tout système d'entiers $b(a_i) \geqslant 0$ définit une représentation irréductible de G. Désignons par S_f l'ensemble des racines simples a_i telles que $b(a_i) \neq 0$; on a alors le

THÉORÈME 1. – *Il existe une application biunivoque* (*analytique*) $h : G[S_f] \rightarrow P$ *telle que la variété* $V = h(G[S_f])$ *soit invariante pour* $f(G)$ *et qu'on ait pour tout* $g \in G$ *et tout* $p \in G[S_f]$, $h(pg) = h(p)\, f(g)$ (2).

Cf. [9]. On appellera *entiers caractéristiques* du plongement h les entiers $b(a_i)$.

LEMME 3. – *Les seuls sous-groupes résolubles connexes maximaux de* G *sont* $G(S)$ *et ses conjugués* (MOROZOV [7]).

DÉMONSTRATION. – Soit H un sous-groupe résoluble connexe maximal de G. Appliquons le théorème 1 en choisissant f tel que $S_f = S$. En vertu d'un théorème classique de Lie, le groupe résoluble $f(H)$ laisse invariants dans P un point Q_0, une droite Q_1 contenant Q_0, un plan Q_2 contenant Q_1, etc. Soit j le plus petit entier tel que Q_j rencontre V (définie dans l'énoncé du théorème 1). V étant une variété algébrique, l'intersection $Q_j \cap V$ se compose d'un nombre fini de points dont chacun est invariant pour $f(H)$. Par conséquent, il existe dans $G[S]$ au moins un point $G(S)g$ invariant pour H c'est-à-dire tel que, pour tout $g' \in H$, on ait $G(S)gg' = G(S)g$, mais alors $H \subseteq g^{-1}G(S)g$,

C. Q. F. D.

---

(2) On note $h(p)\, f(g)$ le transformé du point $h(p)$ par la projectivité $f(g)$.

REMARQUE. - En réunissant les lemmes 1 et 3, on peut énoncer la proposition suivante qui généralise le théorème de Lie mentionné plus haut.

Si $E = G/H$ est un R-espace, tout sous-groupe résoluble connexe de G, considéré comme un groupe de transformations de E, a un point fixe dans E. Les R-espaces sont les seuls espaces homogènes de groupes analytiques complexes jouissant de cette propriété [3].

Grâce au lemme 3, une partie du théorème 1 peut être généralisée au cas où P est un R-espace quelconque. Soient G et G' deux groupes semi-simples connexes, S et S' des systèmes de racines simples correspondants, $P = G'[S'_1]$ un R-espace quelconque de G' et $f : G \longrightarrow G'$ un homomorphisme analytique de G dans G'. Alors

THÉORÈME 2. - Il existe une partie S_1 de S et une application analytique $h : G[S_1] \longrightarrow P$ telles qu'on ait, pour tout $g \in G$ et tout $p \in G[S_1]$, $h(pg) = h(p)\, f(g)$.

DÉMONSTRATION. - En vertu du lemme 3, il existe au moins un élément g' de G' tel que $f(G(S)) \subseteq g'^{-1}\, G'(S')g'$. Posons alors $H' = g'^{-1}G'(S'_1)g'$ et soient S_1 et h définis par les relations

$$G(S_1) = f^{-1}(f(G) \cap H') \qquad \text{(cf. lemme 1)} \tag{2.1}$$

$$h(G(S_1)g) = G'(S'_1).g'.f(g) \quad . \tag{2.2}$$

La relation (2.2) a un sens parce que, en vertu de (2.1), son second membre dépend seulement de la classe $G(S_1)g$ et non du représentant particulier g de cette classe ; elle exprime que S_1 et h satisfont aux conditions de l'énoncé.

4. Projection, incidence, L-variétés.

S_1, S_2, S_3, $S_2^{(1)}$, ... désignent des parties de S.

Si $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S$, $G(S_1) \supseteq G(S_2)$ donc $G[S_1]$ est la base d'une fibration de $G[S_2]$ invariante pour G, et on peut parler de la projection d'un point de $G[S_2]$ sur $G[S_1]$. Les $G[S_1]$ correspondant aux diverses parties S_1 de S sont, en vertu du lemme 1, toutes les bases de fibrations de $G[S]$ invariantes pour G.

---

[3] Le lemme 3 et la première partie de cette dernière proposition sont cas particuliers de proposition beuacoup plus générales (cf. [1]).

Quelles que soient S_1 et S_2, un point p_1 de $G[S_1]$ et un point p_2 de $G[S_2]$ seront dits <u>incidents</u> s'ils sont projections d'un même point de $G[S]$, et l'ensemble P_2 des points de $G[S_1]$ qui sont incidents à p_2 est appelé <u>l'ombre</u> de p_2 sur $G[S_1]$. Si $p_2 = G(S_2)g$, $P_2 = G(S_1)G(S_2)g$; en particulier, si $S_1 \subseteq S_2$, P_2 se réduit à la projection de p_2 sur $G[S_1]$.

Une L-variété d'un R-espace $G[S_1]$ est une sous-variété de cet espace qui est l'ombre d'un point d'un espace $G[S_2]$; par exemple, les L-variétés d'un espace projectif complexe sont les variétés linéaires de cet espace.

Soit $D(\mathfrak{G})$ le schéma de Dynkin de $\mathfrak{G}$. Les sommets de $D(\mathfrak{G})$ correspondent biunivoquement (et canoniquement) aux éléments de S.

Un ensemble quelconque de sommets de $D(\mathfrak{G})$, et la partie de S qui lui correspond, seront représentés par le même symbole.

On dira que S_2 <u>sépare</u> S_1 et S_3, et on écrira en abrégé $S_1/S_2/S_3$ si toute partie connexe de $D(\mathfrak{G})$ qui contient un sommet appartenant à S_1 et un sommet appartenant à S_3 contient aussi un sommet appartenant à S_2. La <u>réduction</u> de S_2 mod. S_1 sera la plus petite partie S_2' de S_2 telle que $S_1/S_2'/S_2$; si $S_2 = S_2'$, S_2 sera dite <u>réduite</u> mod. S_1. Quelles que soient S_1 et S_2, S_2 est d'une et une seule façon, la réunion

$$S_2 = S_2^{\star} \cup S_2^{(1)} \cup S_2^{(2)} \cup \dots \tag{3.1}$$

de parties de S deux à deux disjointes, satisfaisant aux conditions suivantes

$$\begin{cases} S_2^{(i)} \text{ est réduite mod. } S_1 , \\ S_2^{\star}/\emptyset/S_1 , \\ S_1/S_2^{(i)}/S_2^{(j)} \text{ si et seulement si } i \leq j \end{cases} \tag{3.1'}$$

$S_2^{(1)}$ est la réduction de S_2 mod. S_1, et $S_2^{\star}$ est la partie de S_2 contenue dans les composantes connexes de $D(\mathfrak{G})$ qui ne contiennent pas de sommet appartenant à S_1. En particulier, si G est simple, $S_2^{\star}$ est toujours vide à moins que S_1 ne le soit, auquel cas $S_2^{\star} = S_2$.

LEMME 4. - <u>Soient</u> S_1, S_2 <u>et</u> S_3 <u>trois parties de</u> S, <u>et</u> g, g' <u>deux éléments de</u> G. <u>La condition nécessaire et suffisante pour que</u>

$$G(S_1).G(S_2).g \subseteq G(S_1).G(S_3).g' \tag{3.2}$$

est qu'on ait simultanément

$$S_1|S_2|S_3 \quad \underline{\text{et}} \quad g.g'^{-1} \in G(S_2').G(S_3)$$

où S_2' est la réduction de S_2 mod. S_1 .

DÉMONSTRATION. - Supposons d'abord vérifiée la relation (3.2), qui peut encore s'écrire

$$(3.3) \qquad G(S_2).g.g'^{-1} \subseteq G(S_1).G(S_3) \ .$$

Posons $g.g'^{-1} = g_1.g_1'$ avec $g_1 \in G(S_1)$ et $g_1' \in G(S_3)$.

S' étant une partie quelconque de S , on notera $\mathfrak{R}^+(S')$ (resp. $\mathfrak{R}^o(S')$) l'ensemble des racines positives $a = \sum k_i.a_i$ $(a_i \in S)$ telles que $\sum_{a_i \in S'} k_i > 0$ (resp. = 0), $\mathfrak{H}$ l'algèbre nilpotente engendrée par les e_{-a} correspondant aux racines $-a$ négatives, $\mathfrak{H}^+(S')$ (resp. $\mathfrak{H}^o(S') = \mathfrak{G}(S') \cap \mathfrak{H}$) l'idéal (resp. la sous-algèbre) de $\mathfrak{H}$ engendré (e) par les e_{-a} tels que $a \in \mathfrak{R}^+(S')$ (resp. $a \in \mathfrak{R}^o(S')$) , et H , $H^+(S')$, $H^o(S')$ les sous-groupes connexes de G engendrés respectivement par $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}^+(S')$, $\mathfrak{H}^o(S')$.

Pour toute partie S' de S , on a

$$\mathfrak{H}^o(S'') \cap \mathfrak{H}^+(S') + \mathfrak{H}^o(S'') \cap \mathfrak{H}^o(S') = \mathfrak{H}^o(S'')$$

d'où

$$(H^o(S'') \cap H^+(S')).(H^o(S'') \cap H^o(S')) = H^o(S'') \quad .$$

Par application répétée de cette identité

$$H^+(S_1).(H^o(S_1) \cap H^+(S_3)).(H^o(S_1) \cap H^o(S_3)) = H \quad .$$

D'autre part $G(S).H.G(S) = G$ (cf. [3] par exemple). Cela étant, posons $g_1 = g_2.h'.h.h''.g_2'$, avec g_2 , $g_2' \in G(S)$, $h' \in H^+(S_1)$, $h \in H^o(S_1) \cap H^+(S_3)$, $h'' \in H^o(S_1) \cap H^o(S_3)$. Puisque g_1 , g_2 , g_2' , h et $h'' \in G(S_1)$, $h'' \in H^+(S_1) \cap G(S_1) = \{1\}$ d'où $h'' = 1$. (3.3) devient alors

$$G(S_2).h \subsetneq G(S_1).G(S_3) \quad ,$$

qu'on peut encore écrire (puisque $h \in G(S_1)$)

$$h^{-1}.G(S_2).h \subseteq G(S_1).G(S_3) \quad ,$$

d'où, en particulier,

$$\text{ad } h(\mathfrak{G}(S_2)) \subseteq \mathfrak{G}(S_1) + \mathfrak{G}(S_3) \quad . \tag{3.4}$$

a désignant une racine positive quelconque, ad $h(e_{-a})$ est de la forme $e_{-a} + \sum_{b>a} k_b \cdot e_{-b}$. Par conséquent, si $e_{-a} \in \mathfrak{G}(S_2)$, $e_{-a} \in \mathfrak{G}(S_1) + \mathfrak{G}(S_3)$, donc

$$\mathfrak{G}(S_2) \subseteq \mathfrak{G}(S_1) + \mathfrak{G}(S_3) \quad .$$

Il s'ensuit que

$$\mathfrak{R}^+(S_1) \cap \mathfrak{R}^+(S_3) \subseteq \mathfrak{R}^+(S_2)$$

ce qui signifie simplement que $S_1/S_2/S_3$. D'autre part, si on pose $h = \exp \mathfrak{h}$ avec $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}^0(S_1) \cap \mathfrak{H}^+(S_3)$, on doit, d'après (3.4), avoir pour tout $a \in \mathfrak{R}^0(S_2)$,

$$e_{-a} + [\mathfrak{h}, e_{-a}] + \frac{1}{2}[\mathfrak{h}, [\mathfrak{h}, e_{-a}]] + \ldots \in \mathfrak{G}(S_1) + \mathfrak{G}(S_3) \quad ,$$

d'où, puisque

$$\mathfrak{h} \ , [\mathfrak{h}, e_{-a}] , [\mathfrak{h}, [\mathfrak{h}, e_{-a}]] , \ldots \in \mathfrak{H}^+(S_3) \quad ,$$

$$[\mathfrak{h}, e_{-a}] + \frac{1}{2}[\mathfrak{h}, [\mathfrak{h}, e_{-a}]] + \ldots \in \mathfrak{H}^0(S_1) \quad . \tag{3.5}$$

On en déduit, en faisant usage des propriétés élémentaires des racines, que $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}^0(S_2')$. (La réciproque n'est pas vraie ; en fait, (3.5) est équivalent à $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}^0(S_2' \cup S^*)$ où S^* est l'ensemble de toutes les racines simples a_i telles qu'on n'ait pas $S_1/S_2/a_i$). Au total

$$g \cdot g'^{-1} = (g_2 \cdot h) \cdot (h'' \cdot g_2' \cdot g_1') \in G(S_2') \cdot G(S_3) \quad .$$

Réciproquement, supposons que $S_1/S_2/S_3$, et $g \cdot g'^{-1} \in G(S_2') \cdot G(S_3)$. On a alors $S_1/S_2'/S_3$, donc $G^s(S_2')$ est le produit (localement direct) de deux sous-groupes semi-simples $M \subseteq G(S_1)$ et $N \subseteq G(S_3)$, et

$$G(S_1) \cdot G(S_2) \cdot g \cdot g'^{-1} \subseteq G(S_1) \cdot G(S_2') \cdot G(S_3) =$$

$$= (G(S_1) \cdot M) \cdot (N \cdot G^r(S_2') \cdot G(S_3)) = G(S_1) \cdot G(S_3)$$

C. Q. F. D.

Le lemme 4 a pour conséquences immédiates les théorèmes 3 et 4 ci-après.

THÉORÈME 3. - Pour qu'un point p_2 de $G[S_2]$ et un point p_3 de $G[S_3]$ aient la même ombre sur $G[S_1]$, il faut et il suffit que S_2 et S_3 aient la même réduction mod. S_1, soit S_2', et que p_2 et p_3 aient la même projection sur $G[S_2']$.

Ainsi, toute L-variété Q de $G[S_1]$ est l'ombre d'un point d'un espace $G[S_2]$, où S_2 est réduite mod. S_1 ; on dira que Q est un S_2-plan de $G[S_1]$.

COROLLAIRE. - Lorsque S_2 est réduite mod. S_1, l'espace $G[S_2]$ est (canoniquement isomorphe à) l'espace des S_2-plans de $G[S_1]$.

THÉORÈME 4. - Soient S_2 et S_3 réduites mod. S_1, $p_2 \in G[S_2]$ et $p_3 \in G[S_3]$ Pour que l'ombre de p_2 sur $G[S_1]$ soit contenue dans celle de p_3, il faut et il suffit que $S_1/S_2/S_3$ et que p_2 et p_3 soient incidents.

En observant que si $p_1 \in G[S_1]$, $p_2 \in G[S_2]$, ..., $p_s \in G[S_s]$ dont des points deux à deux incidents et si $S' = \cup S_i$ il existe un et un seul point $p' \in G[S']$ dont la projection sur $G[S_i]$ soit, pour tout i, le point p_i, on peut généraliser comme suit le corollaire du théorème 3.

THÉORÈME 5. - Soient S_1 et S_2 deux parties quelconques de S, et $S_2^{(i)}$, $S_2^{\star}$ les parties de S_2 définies par les relations (3.1) et (3.1'). Si $S_2^{\star}$ est vide, l'espace $G[S_2]$ est (canoniquement isomorphe à) l'espace des systèmes $\{Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots\}$, où $Q^{(i)}$ est un $S_2^{(i)}$-plan de $G[S_1]$, avec $Q^{(1)} \subset Q^{(2)} \subset \dots$.

Soient S_2 réduit par rapport à S_1 et Q un S_2-plan de $G[S_1]$. Le groupe G_Q des éléments de G qui conservent Q est transitif sur Q, donc, Q peut être vu comme un espace homogène de G_Q. Toutefois, G_Q n'est pas effectif sur Q ; en effet, si on prend pour Q la variété $G(S_1).G(S_2)$ (ce qui ne nuit pas à la généralité), on a $G_Q = G(S_2) = G^r(S_2).G^s(S_2)$, et $G^r(S_2)$ laisse fixes tous les points de Q. Il en résulte que les groupes G_Q et $H = G^s(S_2)$ induisent sur Q le même groupe de transformations. Le sous-groupe des éléments de H qui conservent le point $p = G(S_1)$ est $H \cap G(S_1) = H(S_1 - S_2)$, où $S_1 - S_2$ représente l'ensemble des racines simples a_i appartenant à S_1 et non à S_2 (pour comprendre la signification de l'expression $H(S_1 - S_2)$ il faut noter que H est un groupe semi-simple dont un système de racines simples est $S - S_2$).
Par conséquent $Q = H/H(S_1 - S_2) = H[S_1 - S_2]$ et on a le

THÉORÈME 6. - <u>Les S_2-plans de $G[S_1]$ sont des R-espaces isomorphes à l'espace $H[S_1 - S_2]$. De plus, les L-variétés de $G[S_1]$ contenues dans S_2-plan donné sont les L-variétés de ce S_2-plan.</u> De façon plus précise, si $S_1/S_2/S_3$, les S_3-plans de $G[S_1]$ contenus dans Q sont les $(S_3 - S_2)$-plans de Q.

REMARQUE. - Lorsqu'on veut étudier de façon plus détaillée les divers R-espaces, il est commode d'associer à tout espace $G[S_1]$ un schéma obtenu à partir de la figure de Schläfli de S en marquant d'un signe distinctif les sommets appartenant à S_1 (dans un tel schéma, les composantes connexes dont aucun sommet n'est marqué sont inessentielles). Les résultats généraux qui précèdent permettent alors d'énoncer une série de règles telles que :

Tout S_2-plan de $G[S_1]$ est un R-espace dont le schéma s'obtient en retirant du schéma de $G[S_1]$ les sommets appartenant à S_2 ;

Si $S_1/S_2/S_3$, l'espace des S_3-plans de $G[S_1]$ contenant un S_2-plan donné est un R-espace dont le schéma s'obtient à partir du schéma de Dynkin de $\mathfrak{G}$ en marquant les sommets appartenant à S_3 et en retirant du schéma obtenu les sommets appartenant à S_2 ; etc.

Les théorèmes suivants seront énoncés sans démonstration ; la démonstration du théorème 7 ne présente pas de difficulté.

Soient P un espace projectif, $h : G[S_1] \rightarrow P$ un plongement du type envisagé dans l'énoncé du théorème 1, Q un S_2-plan de $G[S_1]$ et P' la plus petite variété linéaire de P contenant $h(Q)$. La restriction h' de h à Q est un plongement du même type du R-espace Q dans P'. Alors,

THÉORÈME 7. - <u>Les entiers caractéristiques de h' sont égaux aux entiers caractéristiques de h correspondant aux racines a_i appartenant à $S_1 - S_2$.</u>

THÉORÈME 8. - <u>Dans tout R-espace, l'intersection d'une famille quelconque de L-variétés est vide ou est elle-même une L-variété.</u>

Supposons G simplement connexe (ce qui n'est pas une restriction essentielle en vertu du lemme 2) et désignons par u l'automorphisme anti-analytique de G défini par la relation

$$u\left(\sum k_i a_i + \sum \ell_a e_a\right) = \sum \overline{k_i}\, a_i + \sum \ell_a e_a \quad ,$$

les e_{-a} étant normalisés à la façon d'H. WEYL. u opère sur les R-espaces $G[S_1]$ de la manière suivante : $u(G(S_1)g) = G(S_1)u(g)$. Alors,