

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ROGER GODEMENT

## Les travaux de Hecke, II

*Séminaire N. Bourbaki*, 1954, exp. n° 59, p. 83-90

[<http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1951-1954\\_\\_2\\_\\_83\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__83_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LES TRAVAUX DE HECKE, II,

par Roger GODEMENT

1. Définition des séries  $L$ .

Soient  $k$  un corps de nombres algébriques,  $\mathfrak{f}$  un idéal entier de  $k$ ,  $\chi$  un caractère modulo  $\mathfrak{f}$  (voir exposé I, n° 2). On pose

$$(1) \quad L(s; \chi) = \sum_{\alpha} \frac{\chi(\alpha)}{N(\alpha)^s}$$

où la série est étendue aux idéaux entiers de  $k$  (et ne fait du reste intervenir que ceux qui sont premiers à  $\mathfrak{f}$ ). Pour des raisons évidentes, la convergence absolue de la série (1) est équivalente à celle du produit infini

$$(2) \quad L(s; \chi)^{-1} = \prod_{\mathfrak{p}} \left[ 1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} \right]$$

étendu aux idéaux premiers de  $k$ . On démontre facilement que (1) et (2) convergent absolument dans le demi-plan  $\Re(s) > 1$  et  $\chi$  représentent des fonctions homomorphes de  $s$ .

On va montrer que la fonction (1) se prolonge analytiquement en une fonction méromorphe (seuls pôles :  $s = 0, 1$ , qui disparaissent même lorsque  $\chi(0) \neq 1$ ) et vérifie une équation fonctionnelle simple.

2. Passage aux séries thêta.

On rappelle (exposé I, n° 1) qu'une grande classe est l'ensemble des idéaux de la forme  $x\alpha$ ,  $\alpha$  donné,  $x \in k$  non nul ; et qu'une classe modulo  $\mathfrak{f}$  est l'ensemble des  $\frac{x}{y}\alpha$ ,  $\alpha$  donné,  $x, y$  entiers tels que  $x \not\equiv y(f)$ .

La série (1) se décompose en séries partielles associées aux grandes classes. Soit  $C$  une telle classe, et choisissons dans  $C^{-1}$  un idéal  $\mathfrak{m}$  ; il est clair que  $\alpha \in C$  équivaut à  $\alpha \cdot \mathfrak{m} = (x)$  avec  $x \in \mathfrak{m}$  si  $\alpha$  entier ; donc la série partielle associée à  $C$  dans (1) est donnée par

$$\sum_{\alpha \in C} \frac{\chi(\alpha)}{N(\alpha)^s} = \sum_{\substack{x \in \mathfrak{m} \\ (x) \neq 0}} \frac{\chi(\frac{x}{\mathfrak{m}})}{N(\frac{x}{\mathfrak{m}})^s} = N(\mathfrak{m})^s \sum_{\substack{x \in \mathfrak{m} \\ (x) \neq 0}} \frac{\chi(\frac{x}{\mathfrak{m}})}{|N(x)|^s} ;$$

le  $\sum_{(x) \neq 0}$  désigne qu'on somme sur les idéaux  $(x)$  et non sur les nombres  $(x)$ .

On est donc conduit à introduire

$$(3) \quad L(s; \chi, \mathfrak{m}) = \sum_{\substack{x \in \mathfrak{m} \\ (x) \neq 0}} \frac{\chi\left(\frac{x}{\mathfrak{m}}\right)}{|N(x)|^s},$$

d'où

$$(4) \quad L(s; \chi) = \sum_{\mathfrak{m}} N(\mathfrak{m})^s \cdot L(s; \chi, \mathfrak{m})$$

où  $\sum_{\mathfrak{m}}$  est une somme étendue aux grandes classes.

Ceci dit, considérons les  $n$  isomorphismes  $x \rightarrow \sigma(x)$  de  $k$  dans le corps complexe ( $n = \text{degré de } k$ ). Parmi eux,  $r_1$  envoient  $k$  dans  $R$ ; les autres se répartissent en couples d'isomorphismes imaginaires conjugués  $\sigma, \overline{\sigma}$ , donc sont en nombre pair  $2r_2$ ; on a  $r_1 + 2r_2 = n$ . On va associer à chaque isomorphisme  $\sigma$  une variable  $t_\sigma$ , avec  $t_\sigma > 0$ , et ceci de telle sorte que

$$(5) \quad \tau = \overline{\sigma} \text{ implique } t_\tau = t_\sigma;$$

il y a donc  $r_1 + r_2$  variables indépendantes, qu'on peut regarder comme étant les coordonnées d'un point  $t$  du groupe multiplicatif  $(R_+^*)^{r_1 + r_2}$ . On pose

$$(6) \quad N(t) = \prod_{\sigma \in \Gamma} t_\sigma$$

( $\Gamma$  groupe de Galois de  $k$  sur  $Q$ ) et on note  $d\mu(t)$  la mesure de Haar de  $(R_+^*)^{r_1 + r_2}$ : c'est le produit des différentielles  $\frac{dt_\sigma}{t_\sigma}$  indépendantes (tenir compte de (5)).

Désignons par  $\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}$  les  $r_1$  isomorphismes réels, et par  $\tau_1, \dots, \tau_{r_2}$ ,  $r_2$  isomorphismes imaginaires deux à deux non conjugués. Pour  $x \in k$  on a

$$\frac{1}{|N(x)|^s} = \prod_1 \frac{1}{(|\sigma_1(x)|^2)^{s/2}} \cdot \prod_2 \frac{1}{(|\tau_1(x)|^2)^s};$$

utilisant la formule générale et évidente

$$\frac{\pi^{-u} \Gamma(u)}{(|\sigma(x)|^2)^u} = \int_0^\infty e^{-\pi t_\sigma \cdot |\sigma(x)|^2} t_\sigma^u \frac{dt_\sigma}{t_\sigma}$$

il vient immédiatement par multiplication

$$(7) \quad \frac{\pi^{-(r_1+2r_2)s/2} \cdot 2^{-r_2s} \Gamma(\frac{s}{2})^{r_1} \Gamma(s)^{r_2}}{|N(x)|^s} = \int_0 \frac{-\pi \sum_{\sigma} t_{\sigma} \cdot |\sigma(x)|^2}{N(t)^{s/2}} d\mu(t)$$

de sorte que (3) conduit à

$$(8) \quad \begin{aligned} \xi(s; \chi, m) &\equiv \pi^{-nsk} 2^{-r_2s} \Gamma(\frac{s}{2})^{r_1} \Gamma(s)^{r_2} L(s; \chi, m) = \\ &= \sum_{\substack{x \in m \\ (x) \neq 0}} \left( \chi\left(\frac{x}{m}\right) e^{-\pi \sum_{\sigma \in r} t_{\sigma} |\sigma(x)|^2} N(t)^{s/2} d\mu(t) \right). \end{aligned}$$

Maintenant, soit  $\varepsilon$  une unité de  $k$ . On a  $N(\varepsilon) = 1$ ; si donc l'on désigne par  $\xi t$  le point de  $(R_+^*)^{r_1+r_2}$  dont les coordonnées sont les  $|\sigma(\varepsilon t)|^2 t_{\sigma}$ , on voit que l'intégrale figurant au 2e membre de (8) porte sur une fonction de  $t$  qui est invariante par les transformations  $t \rightarrow \varepsilon t$ ; noter que cette transformation revient à remplacer  $x$  par  $\varepsilon x$ , ce qui ne change pas  $\chi(\frac{x}{m})$ ; si donc on désigne par  $E$  le groupe des unités de  $k$ , et par  $D$  un domaine fondamental de  $(R_+^*)^{r_1+r_2}$  relativement aux applications  $t \rightarrow \varepsilon t$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \int \chi\left(\frac{x}{m}\right) e^{-\pi \sum_{\sigma \in r} t_{\sigma} |\sigma(x)|^2} N(t)^{s/2} d\mu(t) &= \\ &= \sum_{\varepsilon \in E} \int_D \chi\left(\frac{\varepsilon x}{m}\right) e^{-\pi \sum_{\sigma \in r} t_{\sigma} |\sigma(\varepsilon x)|^2} N(t)^{s/2} d\mu(t); \end{aligned}$$

la relation  $(x) = (y)$  étant équivalente à  $y = \varepsilon x$  pour un  $\varepsilon$ , on déduit de là que (8) s'écrit

$$(9) \quad \xi(s; \chi, m) = \sum_{\substack{x \in m \\ x \neq 0}} \int_D \chi\left(\frac{x}{m}\right) e^{-\pi \sum_{\sigma \in r} t_{\sigma} |\sigma(x)|^2} N(t)^{s/2} d\mu(t)$$

(où cette fois le  $\sum_{x \neq 0}$  est étendu aux nombres non nuls de  $m$ ). En posant

$$(10) \quad \theta(t; \chi, m) = \sum_{x \in m} \chi\left(\frac{x}{m}\right) e^{-\pi \sum_{\sigma \in r} t_{\sigma} |\sigma(x)|^2}$$

on a donc

$$(11) \quad \xi(s; \chi, m) = \int_D [\theta(t; \chi, m) - \chi(0)] N(t)^{s/2} d\mu(t).$$

## 3. Transformation des séries thêta.

Puisque  $\chi\left(\frac{x}{\mathfrak{m}}\right)$  ne dépend que de la classe modulo  $\mathfrak{f}$  de l'idéal  $\frac{x}{\mathfrak{m}}$ , il est clair que  $x \equiv y(\mathfrak{f})$  implique  $\chi\left(\frac{x}{\mathfrak{m}}\right) = \chi\left(\frac{y}{\mathfrak{m}}\right)$ ; mais  $\mathfrak{m}$  étant premier à  $\mathfrak{f}$ ,  $x \equiv y(\mathfrak{f})$  implique (pour  $x, y \in \mathfrak{m}$ )  $x \equiv y(\mathfrak{m}\mathfrak{f})$ , i.e.  $y = x + z$  où  $z \in \mathfrak{m}\mathfrak{f}$ , et réciproquement. Donc on est conduit à introduire les séries partielles

$$(12) \quad \theta(t; x, \alpha) = \sum_{z \in \alpha} e^{-\pi \sum_{\sigma \in \Gamma} t_{\sigma} |\sigma(x+z)|^2}$$

grâce à quoi

$$(13) \quad \theta(t; \chi, \mathfrak{m}) = \sum_{\substack{x \in \mathfrak{m} \\ x \bmod \mathfrak{f}}} \chi\left(\frac{x}{\mathfrak{m}}\right) \theta(t; x, \mathfrak{m}\mathfrak{f})$$

On va appliquer la formule de Poisson à (12). Soit  $(a_q)$  ( $1 \leq q \leq n$ ) une base de  $\alpha$ ; posons

$$(14) \quad x = \sum \xi_q a_q, \quad z = \sum n_q a_q$$

( $\xi_q \in \mathbb{Q}$ , car on ne suppose pas  $x$  dans  $\alpha$ , et  $n_q \in \mathbb{Z}$ ) et

$$(15) \quad Q_t(n) = \sum_{\sigma \in \Gamma} t_{\sigma} \left| \sum_q \sigma(a_q) n_q \right|^2;$$

on a alors

$$\theta(t; x, \alpha) = \sum_{(n)} e^{-\pi Q_t(\xi+n)}$$

d'où (exposé I, paragraphe 2, n° 5)

$$\theta(t; x, \alpha) = \det(Q_t)^{-\frac{1}{2}} \sum_{(n)} e^{-\pi Q'_t(n) + 2\pi i(n, \xi)}$$

où  $Q'_t$  est la forme inverse de  $Q_t$  et où  $(n, \xi) = \sum n_q \xi_q$ . Pour calculer  $Q'_t$  on remarque que la matrice de  $Q_t$  est  $A_t^* A_t$ , où  $A_t$  est la matrice de terme général  $t_{\sigma}^{\frac{1}{2}} \sigma(a_q)$ ; donc la matrice de  $Q'_t$  est  $A_t^{-1} A_t^{*-1}$ . Or soient  $b_q \in k$  déterminés par

$$(16) \quad \text{Tr}(a_p b_q) = \sum_{\sigma} \sigma(a_p) \sigma(b_q) = \delta_{pq}$$

("base complémentaire de  $k$ ") ; ils engendrent l'idéal  $b = \frac{1}{\alpha} \mathfrak{o}$ ,  $\mathfrak{o}$  différente de  $k$ , et en posant  $u = \sum_q n_q b_q$  on voit donc que

$$(17) \quad Q_t'(n) = \sum \frac{1}{t_\sigma} |\sigma(u)|^2 ;$$

d'autre part, de (14) et (16) résulte immédiatement que

$$(18) \quad (n, \xi) = \text{Tr}(ux) ;$$

enfin, il est clair que

$$(19) \quad \det(Q_t) = |\det(A_t)|^2 = N(t) \cdot |\det(\sigma(a_q))|^2 = N(t) \cdot |d| \cdot N(\alpha)^2$$

où  $d$  est le discriminant de  $k$ . Comparant (15), (17), (18), (19) on voit que

$$(20) \quad \theta(t; x, \alpha) = \frac{N(t)^{-\frac{1}{2}}}{N(\alpha) \sqrt{|d|}} \sum_{u \in \frac{1}{\alpha} \delta} e^{-\pi \sum \frac{1}{t_\sigma} |\sigma(u)|^2 + 2\pi i \text{Tr}(ux)}$$

Revenant à (13) on trouve donc

$$\begin{aligned} \theta(t; \chi, \mathfrak{m}) &= \frac{N(t)^{-\frac{1}{2}}}{N(\mathfrak{m}f) \sqrt{|d|}} \sum_{\substack{u \in \frac{1}{\mathfrak{m}f} \delta \\ x \in \mathfrak{m} \\ x \bmod f}} \chi\left(\frac{x}{\mathfrak{m}}\right) e^{-\pi \sum \frac{1}{t_\sigma} |\sigma(u)|^2 + 2\pi i \text{Tr}(ux)} \\ &= \frac{N(t)^{\frac{1}{2}}}{N(\mathfrak{m}f) \sqrt{|d|}} \sum_{u \in \frac{1}{\mathfrak{m}f} \delta} e^{-\pi \sum \frac{1}{t_\sigma} |\sigma(x)|^2} \sum_{\substack{x \in \mathfrak{m} \\ x \bmod f}} \chi\left(\frac{x}{\mathfrak{m}}\right) e^{2\pi i \text{Tr}(ux)} \end{aligned}$$

Or si  $\chi$  est un caractère propre modulo  $\mathfrak{m}$  on a (exposé I, paragraphe 1, n° 3)

$$\sum_{\substack{x \in \mathfrak{m} \\ x \bmod f}} \chi(x) e^{2\pi i \cdot \text{Tr}(ux)} = c(\chi) \cdot \overline{\chi}(u \cdot f \cdot \delta) ;$$

donc il vient dans cette hypothèse

$$\theta(t; \chi, \mathfrak{m}) = c(\chi) \frac{N(t)^{\frac{1}{2}}}{N(\mathfrak{m}f) \sqrt{|d|}} \sum_{u \in \frac{1}{\mathfrak{m}f} \delta} \overline{\chi}(u \cdot \mathfrak{m} \cdot f \cdot \delta) e^{-\pi \sum \frac{1}{t_\sigma} |\sigma(x)|^2}$$

d'où la formule finale de transformation :

$$(21) \quad \theta(t; \chi, \mathfrak{m}) = c(\chi) \frac{N(t)^{-\frac{1}{2}}}{N(\mathfrak{m}f) \sqrt{|d|}} \theta(t^{-1}; \overline{\chi}, \frac{1}{\mathfrak{m}f} \delta) .$$

REMARQUE. - En itérant (21) on trouve

$$\theta(t; \chi, m) = c(\chi) \frac{N(t)^{-\frac{1}{2}}}{N(mf) \sqrt{|d|}} \cdot c(\overline{\chi}) \frac{N(t)^{\frac{1}{2}}}{N(\frac{1}{mf}) \sqrt{|d|}} \theta(t; \chi, m)$$

d'où

$$c(\chi)c(\overline{\chi}) = |d| N\left(\frac{f}{b}\right);$$

vu que la relation  $c(\overline{\chi}) = c(\chi)$  est évidente, on trouve donc

$$(22) \quad |c(\chi)| = \sqrt{N(f)}$$

en tenant compte du fait que  $N(d) = |d|$ .

#### 4. Equation fonctionnelle des fonctions L.

On reprend la relation

$$(11) \quad \xi(s; \chi, m) = \int_D [\theta(t; \chi, m) - \chi(0)] N(t)^{s/2} d\mu(t).$$

Désignons par  $G$  le groupe multiplicatif  $(R_+^*)^{r_1+r_2}$  et identifions le groupe  $E$  des unités de  $k$  au sous-groupe  $U$  des  $u \in G$  dont les coordonnées sont de la forme

$$u_\sigma = |\sigma(\varepsilon)|^2, \quad \varepsilon \in E;$$

$D$  n'est autre que le groupe quotient  $G/U$ . Considérons en outre le groupe  $G_0$  des  $t \in G$  tels que  $N(t) = 1$ ; il est clair que  $U \subset G_0 \subset G$  et que  $G/G_0$  est isomorphe (par  $t \rightarrow N(t)$ ) à  $R_+^*$ . D'autre part, d'après le théorème de Dirichlet sur les unités, le groupe  $G_0/U$  est compact.

Désignons par  $D_+$  l'ensemble des  $t \in D$  tels que  $N(t) \geq 1$ . On a évidemment d'après (11)

$$(23) \quad \begin{aligned} \xi(s; \chi, m) &= \int_{D_+} [\theta(t; \chi, m) - \chi(0)] N(t)^{s/2} d\mu(t) \\ &+ \int_{D_+} [\theta(t^{-1}; \chi, m) - \chi(0)] N(t)^{-s/2} d\mu(t). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $G_0/U$  est compact, on voit facilement que l'intégrale

$$\varphi(s; \chi, m) = \int_{D_+} [\theta(t; \chi, m) - \chi(0)] N(t)^{s/2} d\mu(t)$$

représente une fonction entière de  $s$ . D'autre part, (21) donne pour  $\Re(s) > 1$

$$\begin{aligned} \int_{D^+} [\theta(t^{-1}; \chi, m) - \chi(0) N(t)^{-s/2}] d\mu(t) &= \frac{C(\chi)}{N(mf) \sqrt{|d|}} \varphi(1-s; \overline{\chi}, \frac{1}{mf\delta}) \\ &+ \frac{\chi(0)C(\chi)}{N(mf) \sqrt{|d|}} \int_{D^+} N(t)^{\frac{1-s}{2}} d\mu(t) - \chi(0) \int_{D^+} N(t)^{-\frac{s}{2}} d\mu(t) \\ &= \frac{C(\chi)}{N(mf) \sqrt{|d|}} \varphi(1-s; \chi, \frac{1}{mf\delta}) + A \chi(0) \left[ \frac{C(\chi)}{N(mf) \sqrt{|d|}} \frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} \right] \end{aligned}$$

où  $A$  est une constante absolue liée de façon simple au volume de  $D$ . Donc  $\xi(s; \chi, m)$  se prolonge en une fonction méromorphe ayant (si  $\chi(0) \neq 0$ ) des pôles simples pour  $s = 0$ ,  $s = 1$ . En outre en posant

$$\Psi(s; \chi, m) = \varphi(s; \chi, m) + \frac{A \cdot \chi(0)}{s}$$

il vient

$$(24) \quad \xi(s; \chi, m) = \Psi(s; \chi, m) + \frac{C(\chi)}{N(mf) \sqrt{d}} \Psi(1-s; \overline{\chi}, \frac{1}{mf\delta})$$

Posant

$$\xi(s; \chi) = \sum_m N(m)^s \xi(s; \chi, m) = \pi^{-ns/2} 2^{-r_2 s} \Gamma(\frac{s}{2})^{r_1} \Gamma(s)^{r_2} L(s; \chi)$$

(le  $\sum_m$  est étendu aux grandes classes) et de même

$$\Psi(s; \chi) = \sum_m N(m)^s \Psi(s; \chi, m)$$

il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(m)} \sum_m N(m)^s \Psi(1-s; \overline{\chi}, \frac{1}{mf\delta}) &= \sum_m N(\frac{1}{m})^{1-s} \Psi(1-s; \overline{\chi}, \frac{1}{mf\delta}) \\ &= N(f\delta)^{1-s} \Psi(1-s; \overline{\chi}) = |d|^{1-s} N(f)^{1-s} \Psi(1-s; \overline{\chi}) \end{aligned}$$

d'où

$$\xi(s; \chi) = \Psi(s; \chi) + \frac{C(\chi)}{\sqrt{N(f)}} (|d|N(f))^{\frac{1}{2}-s} \Psi(1-s; \overline{\chi}).$$

Comme  $W(x) = \frac{C(\chi)}{\sqrt{N(f)}}$  vérifie  $W(\chi)W(\overline{\chi}) = 1$ , on déduit de là l'équation

fonctionnelle des séries L , à savoir que la fonction

$$\Lambda(s; \chi) = 2^{rs} |d|^{\frac{s}{2}} N(\mathfrak{f})^{\frac{s}{2}} \pi^{-\frac{rs}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2} L(s; \chi)$$

vérifie

$$\Lambda(1-s; \chi) = W(\chi) \Lambda(s; \overline{\chi}),$$

si  $\chi$  est un caractère propre modulo

#### BIBLIOGRAPHIE

HECKE (Erich). - Über die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper, Nach. königl. Gesellschaft Wiss. Göttingen, Math. phys. Klasse, 1917, p. 299-318.

---